

**Fundamentos
de
Elasticidade e Plasticidade**

IG-209

Eliseu Lucena Neto

(12) 98156-2521

eliseu@ita.br

2025

Ementa

Meio contínuo. O conceito de tensão. Estado de tensão num ponto. Equações de equilíbrio.

⇒ *Capítulo 1 (12 aulas)*

O conceito de deformação. Estado de deformação num ponto. Relações deformação-deslocamento.

⇒ *Capítulo 2 (6 aulas)*

Outras medidas de tensão.

⇒ *Capítulo 3 (3 aulas)*

Equações constitutivas do material hiperelástico. Simetria do material.

⇒ *Capítulo 4 (6 aulas)*

Teoria linear da elasticidade.

⇒ *Capítulo 5 (3 aulas)*

Superfície de escoamento. Lei de endurecimento. Lei de escoamento. Valores efetivos da tensão e da deformação plástica. Equações constitutivas do material elastoplástico.

⇒ *Capítulo 6 (12 aulas)*

Avaliação

Será adotado o seguinte critério:

- Provas bimestrais (orais: 30%; escritas: 70%)
- Exame final (oral: 30%; escrito: 70%)

Todos DEVEM fazer as avaliações no MESMO HORÁRIO.

Referências

- Atanackovic, T. M., and Guran, A., 2000, *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston.
- Batra, R. C., 2006, *Elements of Continuum Mechanics*, AIAA Education Series, Reston.
- Bonet, J., Gil, A. J., and Wood, R. D., 2016, *Nonlinear Solid Mechanics for Finite Element Analysis: Statics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Calladine, C. R., 2000, *Plasticity for Engineers: Theory and Applications*, Horwood, Chichester.
- Chandrasekharaiah, D. S., and Debnath, L., 1994, *Continuum Mechanics*, Academic Press, Boston.
- Chen, W. F., 1975, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam.
- Chen, W. F., and Han, D. J., 1988, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York.
- Chou, P. C., and Pagano, N., 1992, *Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches*, Dover, New York.
- Frederick, D., and Chang, T. S., 1965, *Continuum Mechanics*, Allyn and Bacon, Boston.
- Fung, Y. C., and Tong, P., 2001, *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific, Singapore.
- Gonzalez, O., and Stuart, A. M., 2008, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Gould, P. L., and Feng, Y., 2018, *Introduction to Linear Elasticity*, 4th ed., Springer, Cham.
- Holzappel, G. A., 2000, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley, Chichester.
- Jaunzemis, W., 1967, *Continuum Mechanics*, Macmillan, New York.
- Kachanov, L. M., 1971, *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland, Amsterdam.
- Lai, W. M., Rubin, D., and Krempl, E., 2010, *Introduction to Continuum Mechanics*, 4th ed., Elsevier, Amsterdam.
- Lubliner, J., 2008, *Plasticity Theory*, Dover, Mineola.
- Lucena Neto, E., 2021, *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*, Orsa Maggiore, Florianópolis.
- Lucena Neto, E., 2021, *Soluções dos Problemas Propostos em Fundamentos da Mecânica das Estruturas*, Orsa Maggiore, Florianópolis.
- Malvern, L. E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.
- Mase, G. T., Smelser, R. E. and Mase, G. E., 2010, *Continuum Mechanics for Engineers*, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton.
- Mendelson, A., 1968, *Plasticity: Theory and Application*, Macmillan, New York.
- Novozhilov, V. V., 1961, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, New York.
- Novozhilov, V. V., 1999, *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, Dover, Mineola.
- Oliveira, E. R. A., 1999, *Elementos da Teoria da Elasticidade*, IST Press, Lisboa.
- Pilkey, W. D., 2002, *Analysis and Design of Elastic Beams: Computational Methods*, John Wiley, New York.
- Reddy, J. N., 2013, *An Introduction to Continuum Mechanics*, 2nd ed., Cambridge University

Press, Cambridge.

Saada, A. S., 1993, *Elasticity: Theory and Applications*, Krieger, Malabar.

Slaughter, W. S., 2002, *The Linearized Theory of Elasticity*, Birkhäuser, Boston.

Sokolnikoff, I. S., 1974, *Mathematical Theory of Elasticity*, Tata McGraw-Hill, New Delhi.

Spencer, A. J. M., 2004, *Continuum Mechanics*, Dover, Mineola.

Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.

Prefácio

É familiar na mecânica definir *partícula* como sendo um ente físico sem dimensão mas com massa, e *corpo* como sendo um ente físico com dimensão e com distribuição contínua de massa no volume. Em cada *ponto material* do corpo, onde o conceito de dimensão ou de uma certa quantidade de massa não se aplica, é possível definir grandezas como massa específica ($= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta m / \Delta v$ onde Δm é a massa de um volume Δv que reduz progressivamente, mas sempre contendo o ponto material) dada a hipótese da continuidade. A mecânica ocupa-se em descrever o comportamento de partículas e corpos sob a ação de forças.

A mecânica é dividida em vários ramos. Além da *mecânica da partícula*, existem outros ramos definidos em função da natureza do corpo em análise, com clara superposição entre eles. Por exemplo, se o corpo em repouso não tem capacidade de resistir a tensões de cisalhamento, ele é dito um *fluido* (gás ou líquido) e seu comportamento é analisado na *mecânica dos fluidos*. Se, ao contrário, é capaz de oferecer em repouso resistência a tensões de cisalhamento, o corpo é dito um *sólido*, passando a ser analisado pela *mecânica dos sólidos*. Quando a deformação de um sólido pode ser desprezada, sua análise é feita na *mecânica do corpo rígido*. Uma coleção de sólidos arranjados e apoiados com a função de resistir e transmitir cargas é denominada *estrutura*, cujo comportamento é analisado na *mecânica das estruturas*. A *mecânica dos meios contínuos* (*mecânica do contínuo* para os íntimos) é um ramo relativamente novo que contém a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos tratadas de maneira unificada.

O advento do computador acrescentou aos dois pilares clássicos do método científico, teoria e experimento, um outro que tem expandido as fronteiras do conhecimento muito além do que se podia imaginar. Na mecânica, particularmente, nasceu a *mecânica computacional* que procura solucionar os problemas por meio de simulações numéricas implementadas em computadores.

Um ramo da mecânica pode aparecer subdividido em vários outros. A *teoria da elasticidade* e a *teoria da plasticidade* são, por exemplo, ramos da mecânica dos sólidos definidos com base no material que constitui o corpo. Por sua vez, a *teoria de vigas*, de *placas* ou de *cascas* são ramos da mecânica das estruturas definidos com base na geometria do corpo.

Três grupos de equações compõem qualquer modelo matemático que descreve o comportamento de um sólido: as equações de equilíbrio, as relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas, cuja solução deverá satisfazer certas condições de contorno. O que determinamos de um modelo adotado corresponde exatamente ao que ocorre com o sólido? Provavelmente não. Cada modelo é fruto de hipóteses e, conseqüentemente, sua aplicabilidade vai até onde as hipóteses permitem. Saber identificar o limite da aplicação e, quando necessário, transpor esse limite por meio de modelos mais refinados nos ensina a conviver com a incerteza. É por não existir um modelo correto de forma absoluta que é preferível focar a atenção nos fundamentos. Estes, sim, são universais por lastrearem todos os possíveis modelos. Um modelo matemático, mais do que uma receita para realizar cálculos, precisa ser visto como um guia do pensamento para uma melhor compreensão dos fatos.

O que discutimos nos Capítulos 1-4, complementado com as condições de contorno apresentadas no Capítulo 5, representa a essência da teoria da elasticidade. A forma linearizada clássica dessa teoria, sintetizada no Capítulo 5, transforma-se na teoria clássica da plasticidade quando as equações constitutivas são as dadas no Capítulo 6.

Sumário

Ementa

Avaliação

Referências

Prefácio

1 Tensão

- 1.1 Vetor Tensão
- 1.2 Tensor Tensão
- 1.3 Mudança de Base
- 1.4 Tensões Principais
- 1.5 Componentes Esférica e Desviadora
- 1.6 Diagrama de Mohr
- 1.7 Equações de equilíbrio

Problemas

⇒ Capítulo 1 do livro *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*

2 Deformação

- 2.1 Configuração, Transformação e Deformação
- 2.2 Gradiente da Transformação
- 2.3 Tensor Deformação
- 2.4 Relações Deformação-Deslocamento

- 2.5 Tensor Pequena Deformação
- 2.6 Interpretação Geométrica
- 2.7 Medição Experimental
- 2.8 Compatibilidade das Componentes do Tensor Deformação
- 2.9 Decomposição Polar
- 2.10 Tensor Pequena Rotação

Problemas

⇒ Capítulo 2 do livro *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*

3 Outras Medidas de Tensão

- 3.1 Mudança de Volume
- 3.2 Mudança de Área
- 3.3 Primeiro Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff
- 3.4 Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff
- 3.5 Equações de Equilíbrio Referidas à Configuração Inicial

Problemas

⇒ Capítulo 3 do livro *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*

4 Equações Constitutivas

- 4.1 Material Hiperelástico
- 4.2 Mudança de Base
- 4.3 Simetria do Material

Problemas

⇒ Capítulo 4 do livro *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*

5 Teoria Linear da Elasticidade

- 5.1 Linearização das Equações
- 5.2 Condições de Contorno

Problemas

⇒ Capítulo 5 do livro *Fundamentos da Mecânica das Estruturas*, sem a Seção 5.3

6 Equações Constitutivas do Material Elastoplástico

6-1

6.1 Modelo Uniaxial 6-3

6.2 Superfície de Escoamento 6-6

6.3 Lei de Endurecimento 6-20

6.4 Lei de Escoamento 6-24

6.5 Equações Constitutivas 6-28

6.6 Valores Efetivos da Tensão e Deformação Plástica 6-33

6.7 Considerações Finais 6-41

Problemas 6-45

⇒ Apostila

D Espaço de Haigh-Westergaard

⇒ Apostila