

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles

Formulação Corrotacional Consistente para Pórticos Planos

Trabalho de Graduação
2016

**Engenharia Civil-
Aeronáutica**

Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles

Formulação Corrotacional Consistente para Pórticos Planos

Orientador

Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)

Coorientador

Prof. Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)

Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Meireles, Jéssica Gomes de Souza Alcântara
Formulação Corrotacional Consistente para Pórticos Planos / Jéssica Gomes de Souza Alcântara
Meireles.
São José dos Campos, 2016.
37f.

Trabalho de Graduação – Engenharia Civil-Aeronáutica –
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. Orientador: Prof. Eliseu Lucena Neto.

1. Não-linearidade geométrica. 2. Análise estrutural. 3. Viga (suportes). 4. Método dos elementos finitos. 5. Formulação corrotacional. 6. Engenharia civil. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MEIRELES, JÉSSICA GOMES DE SOUZA ALCÂNTARA. **Formulação Corrotacional Consistente para Pórticos Planos. 2016. 37f.** Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles
TÍTULO DO TRABALHO: Formulação Corrotacional Consistente para Pórticos Planos
TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação/2016

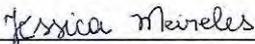
É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Jéssica Meireles

Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles
Rua Antonina do Norte, 351 apto 408 B – Monte Castelo
Fortaleza – CE – Brasil. CEP: 60325-610

FORMULAÇÃO CORROTACIONAL CONSISTENTE PARA PÓRTICOS PLANOS

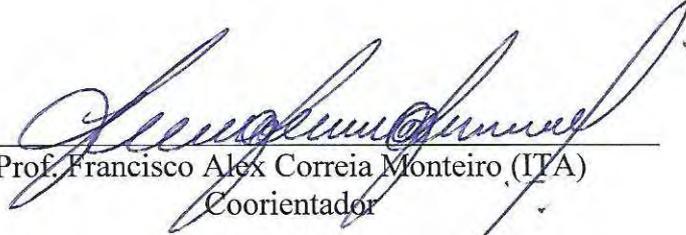
Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação



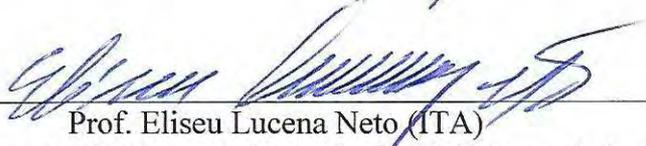
Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles
Autor



Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Orientador



Prof. Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)
Coorientador



Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Coordenador do Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

São José dos Campos, 25 de novembro de 2016

Agradecimentos

Ao meu professor orientador Eliseu, que me inspirou a entender os bastidores da mecânica das estruturas, ministrou excelentes aulas e proporcionou uma base teórica necessária para a realização deste trabalho.

Ao meu professor coorientador Alex, que me motivou a ter uma experiência prática de engenharia e compartilhou comigo seu conhecimento técnico computacional para a implementação do programa deste trabalho.

Ao meu professor relator Adriano, por revisar atentamente este trabalho e estar ajudando na possível continuação.

À minha mãe, por ser a minha emoção e minha amiga, me apoiando e incentivando a ser uma mulher humilde e independente. Ao meu pai, por ser a minha calma e meu mestre, me trazendo serenidade nos momentos difíceis e me ensinando desde menina. Ao meu irmão, exemplo de inteligência e bondade no coração, que me inspira e me motiva a seguir em frente.

Ao Matheus, por me fazer sempre uma pessoa melhor, por ter sido minha calma durante todo o curso e me motivado na escolha do tema deste trabalho.

Aos meus amigos de colégio Jessica, Juliana, Lima, Maiara e Renato, que mesmo distantes fisicamente foram importantes para essa conquista. Às minhas companheiras de quarto Drica, Giu, Taíse e Sarah, que tornaram esses anos de alojamento mais fáceis. Ao Alencar e à Thaís, amigos que o CPOR me deu e que foram essenciais nesse último ano.

À eterna Civil-16, sem vocês eu nem estaria formando. Em especial ao Piti, que sempre deixava os momentos de estudo mais leves, e à Dafne, minha companheira nos semestres mais difíceis que me ensinou muito mais do que as matérias que tivemos juntas.

Por fim, ao Emanuel e Rafael, que me acompanharam nos últimos semestres no desafio de ser a menor turma da história da Civil do ITA, com apenas três alunos.

Resumo

Um elemento finito corrotacional eficiente e preciso para a análise de pórticos planos, sob pequenas deformações mas grandes rotações, é desenvolvido neste trabalho. O elemento é localmente formulado como o elemento linear tradicional baseado na teoria de Euler-Bernoulli para pequenas rotações. Uma técnica incremental iterativa baseada no método de Newton-Raphason é empregada para a solução das equações não lineares de equilíbrio. Apresentam-se exemplos numéricos que demonstram a eficiência e a capacidade da formulação corrotacional em lidar com grandes rotações. Os resultados obtidos são validados por meio de soluções exatas disponíveis na literatura. Uma boa precisão pode ser encontrada em todos os casos.

Abstract

An efficient and accurate corotational finite element for the analysis of plane frames, under small strains but large rotations, is developed in this work. The element is locally formulated as the traditional linear element based on the Euler-Bernoulli theory for small rotations. An incremental-iterative technique based on the Newton-Raphson method is employed for the solution of the nonlinear equilibrium equations. Numerical examples that demonstrate the efficiency and large rotation capability of the corotational formulation are presented. The element results are validated by exact solutions available in the literature. Very good agreement is found in all cases.

Sumário

1	Introdução	9
2	Fundamentação Teórica	12
2.1	Equações Referidas a C_{0n}	13
2.2	Equações Referidas a C_0	15
2.3	Linearização Consistente	17
3	Aplicações Numéricas	21
3.1	Viga em Balanço com Carga-Momento na Extremidade.....	21
3.2	Viga em Balanço com Carga Transversal na Extremidade.....	25
3.3	Viga sob Compressão Axial	30
4	Conclusões	35
	Referências	36

Capítulo 1

Introdução

O movimento de um sólido no espaço é ilustrado na Figura 1.1, para fins didático, por uma viga dividida em quatro elementos finitos e submetida a uma carga-momento. Suponha que se deseja determinar a configuração C_n do elemento próximo à extremidade livre, quando a carga que atua tem magnitude M_n . A natureza não linear do problema requer que a solução seja obtida em etapas: conhecem-se antes as configurações $C_0, C_1, \dots, C_i, \dots, C_{n-1}$ para, em seguida, determinar-se a configuração C_n . Quatro dessas configurações são indicadas na Figura 1.1: a configuração inicial C_0 , uma configuração intermediária C_i , a configuração C_{n-1} e a configuração atual C_n que se deseja determinar.

Se no processo incremental iterativo para a determinação de C_n as equações são estabelecidas tomando-se como referência uma configuração conhecida, é dito que se está utilizando uma descrição lagrangiana: na descrição lagrangiana total C_0 é a configuração de referência; na descrição lagrangiana atualizada a referência é a configuração C_{n-1} . CESCOTTO *et al.* (1979) sugerem o nome “generalizada” para a descrição com referência numa configuração intermediária C_i , que tem como casos particulares a descrição lagrangiana total ($C_i = C_0$) e a atualizada ($C_i = C_{n-1}$). A descrição euleriana, que usaria como referência a própria configuração C_n , é de uso limitado na mecânica dos sólidos pelo fato de C_n ser uma configuração desconhecida no processo de solução.

Nos problemas geometricamente lineares é tácito o uso da descrição lagrangiana total devido à proximidade entre C_0 e C_n .

Para grandes rotações sob pequenas deformações, os elementos finitos corrotacionais têm mostrado uma certa superioridade em relação aos elementos que usam descrições la-

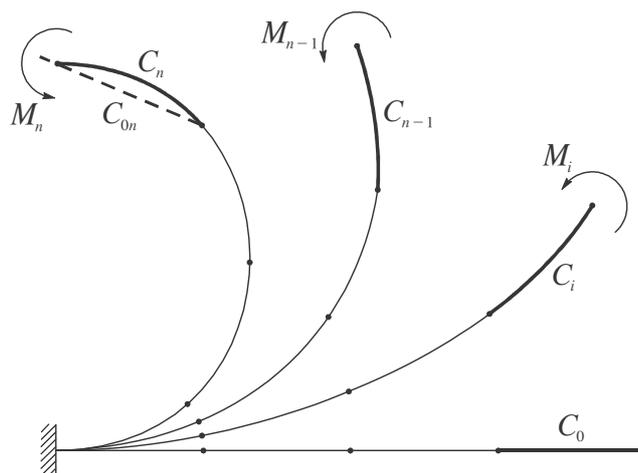


Figura 1.1 O elemento está em equilíbrio nas configurações C_0 , C_i , C_{n-1} e C_n . Apesar de ser apenas auxiliar, a configuração C_{0n} é fundamental para os elementos corrotacionais.

grangianas. Tais elementos adotam uma configuração indeformada auxiliar C_{0n} , muito próxima à C_n , que é obtida exclusivamente pelo movimento de corpo rígido do elemento de sua configuração C_0 . Nenhuma parcela de movimento de corpo rígido existe entre as configurações C_{0n} e C_n , de modo que todo deslocamento entre essas configurações é revertido em deformação. Identificar C_{0n} com essa propriedade seria o ideal sob o ponto de vista da descrição corrotacional, que tem suas raízes no teorema da decomposição polar (MALVERN, 1969; CHANDRASEKHARAI AH e DEBNATH, 1994). Utilizando-se de ambas as configurações C_0 e C_{0n} como referência, a descrição corrotacional não pode, a rigor, ser classificada como lagrangiana ou euleriana, como às vezes aparece rotulada na literatura.

Para uma melhor compreensão por que o uso simultâneo das configurações C_0 e C_{0n} é tão essencial para o sucesso dos elementos finitos corrotacionais, perceba que podemos aproximar C_{0n} de C_n tanto quanto desejamos reduzindo o tamanho do elemento com o refinamento da malha. Visto que a deformação é medida em relação a C_{0n} , e não em relação a C_0 como faz, por exemplo, a formulação lagrangiana total (SANTOS, 2015), podemos adotar um simples elemento linear para descrever o movimento entre C_{0n} e C_n . Toda a não linearidade geométrica que se dá no movimento completo entre C_0 e C_n é nitidamente externa à formulação local (entre C_{0n} e C_n) do elemento. É a relação que estabelecemos entre os incrementos dos deslocamentos nodais entre as configurações C_{0n} e C_n e as configurações C_0 e C_n que responderá pela não linearidade geométrica na formulação.

WEMPNER (1969), BELYTSCHKO e HSIEH (1973) e ORAN (1973a; 1973b) foram pioneiros na introdução dos elementos finitos corrotacionais. É no trabalho de BELYTSCHKO e GLAUM (1979) que o nome “corrotacional” aparece pela primeira vez para designar a existência de um sistema local de eixos que translada e gira continuamente com o elemento. Depois disso, a maioria do artigo publicados sobre o assunto passaram a adotar a mesma terminologia.

Desenvolvemos neste trabalho uma formulação corrotacional de maneira consistente para pórticos planos sob pequenas deformações mas grandes rotações. O movimento entre as configurações C_{0n} de C_n ficará por conta do simples elemento linear da teoria de vigas Euler-Bernoulli (COOK *et al.*, 2002). Ou seja, polinômios linear e cúbico serão adotados para as componentes axial e transversal do deslocamento, respectivamente, na descrição desse movimento.

Apresentamos no Capítulo 2 a formulação corrotacional. Os resultados numéricos na forma de tabelas e curvas, demonstrando a eficiência da formulação e sua capacidade em lidar com grandes rotações, são apresentados no Capítulo 3. Finalmente, apresentamos no Capítulo 4 as conclusões e sugestões para futuros desdobramentos deste trabalho.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

A Figura 2.1 mostra um elemento de viga na configuração C_0 , com as extremidades nos nós 1 e 2; na configuração C_{0n} , com os nós em 1^* e $2''$; na configuração C_n , com os nós em 1^* e 2^* . O movimento entre C_0 e C_{0n} pode ser imaginado da seguinte forma. Primeiro, o elemento translada rigidamente de u_1 e v_1 segundo os eixos globais x e y , respectivamente, de maneira que o nó 1 passa para 1^* e o nó 2 para $2'$. Em seguida, gira rigidamente de $\alpha - \alpha_0$ em torno de z , passando o nó $2'$ para $2''$ mas mantendo o nó 1^* fixo.

Denotemos por

$$\mathbf{d} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2}]^T \quad (2.1)$$

os deslocamentos nodais entre as configurações C_0 e C_n no sistema global xy , e por

$$\bar{\mathbf{d}} = [\bar{u}_2 \quad \bar{\theta}_{z1} \quad \bar{\theta}_{z2}]^T \quad (2.2)$$

os deslocamentos nodais entre as configurações C_{0n} e C_n no sistema local $\bar{x}\bar{y}$. Este sistema é escolhido de maneira a transladar e girar continuamente com o elemento, mantendo sua origem no nó 1^* e o eixo \bar{x} apontando para o nó 2^* . Perceba que as componentes \bar{u}_1 , \bar{v}_1 e \bar{v}_2 são omitidas de $\bar{\mathbf{d}}$ por serem nulas. Os deslocamentos $\bar{\mathbf{d}}$ não são afetados por movimento de corpo rígido e são os únicos responsáveis pela deformação do elemento. As seguintes relações geométricas não lineares entre as componentes de $\bar{\mathbf{d}}$ e \mathbf{d} podem ser escritas a partir da Figura 2.1:

$$\bar{u}_2 = L - L_0 \quad \bar{\theta}_{z1} = \theta_{z1} - (\alpha - \alpha_0) \quad \bar{\theta}_{z2} = \theta_{z2} - (\alpha - \alpha_0) \quad (2.3)$$

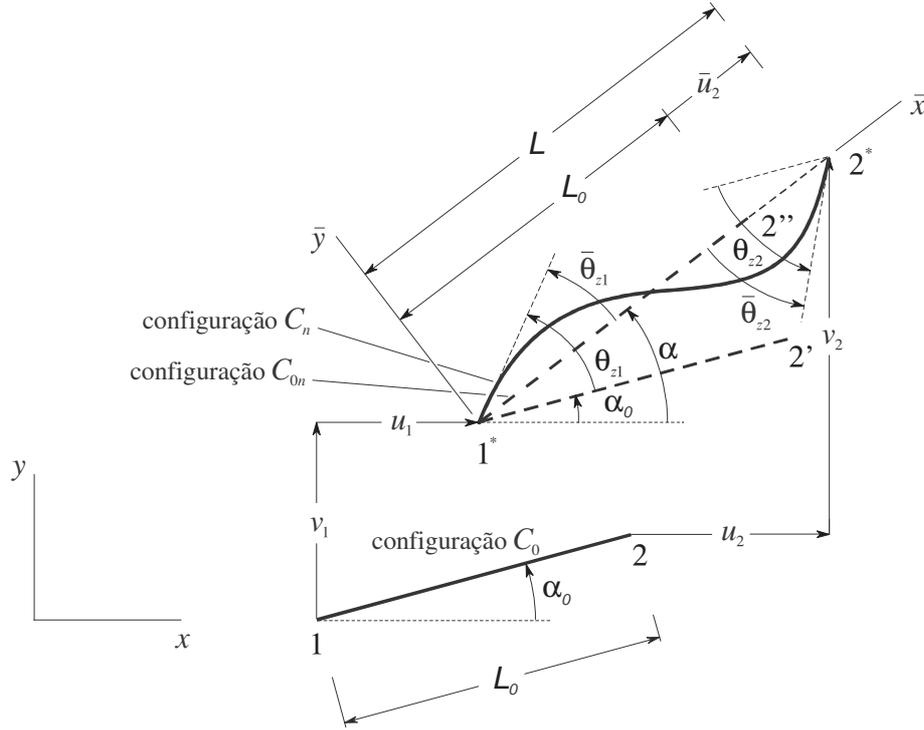


Figura 2.1 Elemento de viga nas configurações C_0 , C_{0n} e C_n .

onde

$$L = \sqrt{(L_0 \cos \alpha_0 + u_2 - u_1)^2 + (L_0 \sin \alpha_0 + v_2 - v_1)^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{L_0 \sin \alpha_0 + v_2 - v_1}{L_0 \cos \alpha_0 + u_2 - u_1}. \quad (2.4)$$

2.1 EQUAÇÕES REFERIDAS A C_{0n}

Se o elemento da Figura 2.1 for suficientemente pequeno, seu movimento entre as configurações C_{0n} e C_n envolverá apenas pequenas rotações, justificando o uso da teoria linear de vigas na descrição desse movimento. Em particular, $|\bar{\theta}_{z1}| \ll 1$ e $|\bar{\theta}_{z2}| \ll 1$. Na teoria de vigas de Euler-Bernoulli (REDDY, 2002), por exemplo, as componentes do deslocamento no sistema $\bar{x}\bar{y}$ são dadas por

$$u_x(\bar{x}, \bar{y}) = u(\bar{x}) - \bar{y} \frac{dv}{d\bar{x}} \quad u_y(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}). \quad (2.5)$$

A única componente de deformação não nula é

$$\epsilon_x = \epsilon_m + \bar{y}\kappa. \quad (2.6)$$

Visto que o elemento finito tradicional nessa teoria admite u e v como polinômios completos linear e cúbico (COOK *et al.*, 2002), respectivamente, então

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x} - \frac{2\bar{x}^2}{L_0} + \frac{\bar{x}^3}{L_0^2} & -\frac{\bar{x}^2}{L_0} + \frac{\bar{x}^3}{L_0^2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \quad (2.7)$$

e, portanto,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{d\bar{x}} \\ -\frac{d^2v}{d\bar{x}^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{L_0} - \frac{6\bar{x}}{L_0^2} & \frac{2}{L_0} - \frac{6\bar{x}}{L_0^2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{d}}. \quad (2.8)$$

O equilíbrio do elemento pode ser localmente estabelecido (equilíbrio em C_n referido a C_{0n}) usando princípio dos deslocamentos virtuais

$$-\int_0^{L_0} \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_m \\ \delta\kappa \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} d\bar{x} + \delta\bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{r}} = 0. \quad (2.9)$$

Supomos que todas as cargas sejam aplicadas diretamente nos nós das estrutura, N e M sejam a força normal e o momento fletor e

$$\bar{\mathbf{r}} = [\bar{r}_{x2} \quad \bar{r}_{\theta 1} \quad \bar{r}_{\theta 2}]^T \quad (2.10)$$

sejam as reações nodais.

Enquanto a segunda tensão de Piola-Kirchhoff e a deformação de Green são usadas para medir a tensão e a deformação na descrição lagrangiana total, na formulação corrotacional podemos medir localmente essas quantidades por meio da tensão de Cauchy e da deformação linearizada.

A substituição de (2.8) em (2.9) conduz a

$$\delta\bar{\mathbf{d}}^T \left(-\int_0^{L_0} \mathbf{B}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} d\bar{x} + \bar{\mathbf{r}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\bar{\mathbf{d}}^T (-\bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{r}}) = 0. \quad (2.11)$$

Admitindo a equação constitutiva

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde E é o módulo de Young do material, A é a área da seção transversal da viga e I é seu momento de inércia,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &= \int_0^{L_0} \mathbf{B}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} d\bar{x} = \left(\int_0^{L_0} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \mathbf{B} d\bar{x} \right) \bar{\mathbf{d}} \\ &= \frac{E}{L_0} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 4I & 2I \\ 0 & 2I & 4I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Perceba que $\bar{\mathbf{k}}$ é a tradicional matriz de rigidez do elemento de viga de Euler-Bernoulli com a omissão das linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos \bar{u}_1 , \bar{v}_1 e \bar{v}_2 nulos. Supondo que as componentes de $\delta\bar{\mathbf{d}}$ sejam arbitrárias e independentes, temos de (2.11)

$$\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{r}}.\quad (2.14)$$

Essa equação do elemento tem como incógnitas as três componentes de $\bar{\mathbf{d}}$ e a três componentes de $\bar{\mathbf{r}}$. É uma equação linear em $\bar{\mathbf{d}}$.

2.2 EQUAÇÕES REFERIDAS A C_0

Para estabelecer a equação do elemento em relação a C_0 , devolvendo assim ao elemento o movimento de corpo rígido removido, devemos antes identificar a relação entre $\delta\bar{\mathbf{d}}$ e $\delta\mathbf{d}$. Ou seja,

$$\delta\bar{\mathbf{d}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{d}}}{\partial\mathbf{d}}\delta\mathbf{d} = \mathbf{T}\delta\mathbf{d}\quad (2.15)$$

onde

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\bar{\mathbf{d}}}{\partial\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\theta_{z2}} \\ \frac{\partial\bar{\theta}_{z1}}{\partial u_1} & \frac{\partial\bar{\theta}_{z1}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\bar{\theta}_{z1}}{\partial\theta_{z2}} \\ \frac{\partial\bar{\theta}_{z2}}{\partial u_1} & \frac{\partial\bar{\theta}_{z2}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\bar{\theta}_{z2}}{\partial\theta_{z2}} \end{bmatrix}.\quad (2.16)$$

De (2.3), escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial L}{\partial u_1} = -\cos\alpha & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial v_1} &= \frac{\partial L}{\partial v_1} = -\text{sen}\alpha & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\theta_{z1}} &= 0 \\ \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial u_2} &= \frac{\partial L}{\partial u_2} = \cos\alpha & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial v_2} &= \frac{\partial L}{\partial v_2} = \text{sen}\alpha & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\theta_{z2}} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = -\frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial v_1} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v_1} = \frac{\text{cos } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial \theta_{z1}} &= 1 \\
\frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial u_2} = \frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial v_2} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v_2} = -\frac{\text{cos } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z1}}{\partial \theta_{z2}} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = -\frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial v_1} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v_1} = \frac{\text{cos } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial \theta_{z1}} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial u_2} = \frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial v_2} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v_2} = -\frac{\text{cos } \alpha}{L} & \frac{\partial \bar{\theta}_{z2}}{\partial \theta_{z2}} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Assim,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \\ \mathbf{T}_2^T \\ \mathbf{T}_3^T \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1^T &= \begin{bmatrix} -\text{cos } \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 & \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_2^T &= \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\text{cos } \alpha}{L} & 1 & \frac{\text{sen } \alpha}{L} & -\frac{\text{cos } \alpha}{L} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_3^T &= \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen } \alpha}{L} & \frac{\text{cos } \alpha}{L} & 0 & \frac{\text{sen } \alpha}{L} & -\frac{\text{cos } \alpha}{L} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Admitindo que o trabalho realizado pelas reações nodais $\bar{\mathbf{r}}$ não muda com o movimento de corpo rígido, podemos impor a igualdade

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{r}} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{d}^T \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{r}} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \tag{2.20}$$

para obter

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{r}}. \tag{2.21}$$

Analogamente,

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}. \tag{2.22}$$

Multiplicando (2.14) por \mathbf{T}^T , obtemos

$$\mathbf{T}^T (\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{T}^T \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \Psi(\mathbf{d}) = \mathbf{f} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{2.23}$$

que é equação do elemento no sistema global xy referida à configuração C_0 . Perceba a introdução da não linearidade em (2.23) por meio de \mathbf{T} (matriz não linear nas componentes de $\bar{\mathbf{d}}$).

2.3 LINEARIZAÇÃO CONSISTENTE

O sistema de seis equações não lineares (2.23) representa o equilíbrio das forças nodais internas e externas associadas aos seis parâmetros nodais d_i . Se o sistema não é satisfeito para um dado carregamento, o vetor das forças nodais $\Psi(\mathbf{d})$ fica em desequilíbrio. Correções $\Delta\mathbf{d}$ podem ser obtidas pelo método de Newton-Raphson (ZIENKIEWICZ et al., 2013), onde o vetor

$$\Psi(\mathbf{d}+\Delta\mathbf{d}) = \Psi(\mathbf{d}) + \Delta\Psi(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

é forçado a ser nulo e

$$\Delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{d}}\Delta\mathbf{d} = \mathbf{k}\Delta\mathbf{d}. \quad (2.25)$$

O sistema não linear (2.23) do elemento é então substituído pela forma linear

$$\mathbf{k}\Delta\mathbf{d} = -\Psi(\mathbf{d}) \quad (2.26)$$

a ser usada num processo iterativo. O vetor

$$\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} \quad (2.27)$$

é corrigido a cada iteração, assim como a matriz de rigidez tangente

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{d}}. \quad (2.28)$$

Como o elemento é localmente linear, $\bar{\mathbf{r}}$ independe de $\bar{\mathbf{d}}$ e, conseqüentemente, \mathbf{r} também independe de \mathbf{d} pois $\bar{\mathbf{r}}$ e \mathbf{r} referem-se aos mesmos esforços que ocorrem em C_n e que devem ser invariantes a movimento de corpo rígido. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{d}} = \frac{\partial(\mathbf{f} - \mathbf{r})}{\partial\mathbf{d}} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{d}} (\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{f}}) \\ &= \mathbf{T}^T \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}}{\partial\mathbf{d}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{d}} (\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{f}})_{\bar{\mathbf{f}} \text{ constante}} \\ &= \mathbf{T}^T \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}}{\partial\mathbf{d}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{d}} (\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Na parcela $\frac{\partial}{\partial\mathbf{d}} (\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{f}})_{\bar{\mathbf{f}} \text{ constante}}$ a derivada é efetuada com $\bar{\mathbf{f}}$ mantido constante. Não avaliar

com rigor essa parcela é o que torna alguns modelos corrotacionais inconsistentes. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{d}} &= \mathbf{T}^T \frac{\partial (\bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{r}}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\left[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3 \right] \begin{Bmatrix} \bar{r}_{x2} \\ \bar{r}_{\theta 1} \\ \bar{r}_{\theta 2} \end{Bmatrix} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} (\bar{r}_{x2} \mathbf{T}_1 + \bar{r}_{\theta 1} \mathbf{T}_2 + \bar{r}_{\theta 2} \mathbf{T}_3) \\
&= \bar{r}_{x2} \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{d}} + \bar{r}_{\theta 1} \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{d}} + \bar{r}_{\theta 2} \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{d}}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Desenvolvendo o primeiro termo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{d}} &= \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \text{sen } \alpha \\ -\text{cos } \alpha \\ 0 \\ -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v_1} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_{z1}} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v_2} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_{z2}} \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \text{sen } \alpha \\ -\text{cos } \alpha \\ 0 \\ -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \left[\frac{\text{sen } \alpha}{L} \quad -\frac{\text{cos } \alpha}{L} \quad 0 \quad -\frac{\text{sen } \alpha}{L} \quad \frac{\text{cos } \alpha}{L} \quad 0 \right] \\
&= \frac{1}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde

$$\mathbf{z} = \left[\text{sen } \alpha \quad -\text{cos } \alpha \quad 0 \quad -\text{sen } \alpha \quad \text{cos } \alpha \quad 0 \right]^T. \tag{2.32}$$

Escrevendo \mathbf{T}_2 na forma

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \text{sen } \alpha \\ -\text{cos } \alpha \\ 0 \\ -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{L} \mathbf{z}, \quad (2.33)$$

obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{d}} = -\frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{d}} + \frac{1}{L^2} \mathbf{z} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.34)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} = [\text{cos } \alpha \quad \text{sen } \alpha \quad 0 \quad -\text{cos } \alpha \quad -\text{sen } \alpha \quad 0]^T = -\mathbf{T}_1$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{2L} \begin{pmatrix} -2(L_0 \text{cos } \alpha_0 + u_2 - u_1) \\ -2(L_0 \text{sen } \alpha_0 + v_2 - v_1) \\ 0 \\ 2(L_0 \text{cos } \alpha_0 + u_2 - u_1) \\ 2(L_0 \text{sen } \alpha_0 + v_2 - v_1) \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\text{cos } \alpha \\ -\text{sen } \alpha \\ 0 \\ \text{cos } \alpha \\ \text{sen } \alpha \\ 0 \end{pmatrix}^T = \mathbf{T}_1^T. \quad (2.35)$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{L^2} \mathbf{T}_1 \mathbf{z}^T + \frac{1}{L^2} \mathbf{z} \mathbf{T}_1^T = \frac{1}{L^2} (\mathbf{T}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{T}_1^T) \quad (2.36)$$

Sabendo-se que

$$\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{d}}, \quad (2.37)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}})_{\bar{\mathbf{f}} \text{ constante}} &= \bar{r}_{x2} \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{d}} + \bar{r}_{\theta 1} \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{d}} + \bar{r}_{\theta 2} \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{d}} \\ &= \frac{\bar{r}_{x2}}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{r}_{\theta 1} + \bar{r}_{\theta 2}}{L^2} (\mathbf{T}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{T}_1^T) \end{aligned} \quad (2.38)$$

e, portanto,

$$\mathbf{k} = \underbrace{\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T}}_{\mathbf{k}_1} + \underbrace{\frac{\bar{r}_{x2}}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{r}_{\theta 1} + \bar{r}_{\theta 2}}{L^2} (\mathbf{T}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{T}_1^T)}_{\mathbf{k}_2}. \quad (2.39)$$

Note que a matriz de rigidez tangente global do elemento é composta da parcela constitutiva

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T} \quad (2.40)$$

e da parcela geométrica

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\bar{r}_{x2}}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{r}_{\theta 1} + \bar{r}_{\theta 2}}{L^2} (\mathbf{T}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{T}_1^T). \quad (2.41)$$

Capítulo 3

Aplicações Numéricas

A trajetória de equilíbrio em cada exemplo apresentado neste capítulo é determinada por incrementos de cargas seguidos de iterações do método de Newton-Raphson até que o equilíbrio seja restabelecido. O critério de convergência utilizado é dado por (COOK *et al.*, 2002)

$$\max(e_D; e_F) \leq 10^{-3} \quad (3.1)$$

onde

$$e_D = \sqrt{\frac{\{\Delta D\}_k^T \{\Delta D\}_k}{\{D\}_{k+1}^T \{D\}_{k+1}}} \quad e_F = \sqrt{\frac{\{\Psi\}_k^T \{\Psi\}_k}{\{F\}^T \{F\}}}. \quad (3.2)$$

A quantidade e_D é a razão entre a norma euclidiana do vetor dos incrementos dos deslocamentos nodais no final de uma iteração k e a do vetor dos deslocamentos nodais após a correção; e_F é a razão entre a norma euclidiana do vetor das forças nodais desequilibradas no final da iteração k e a do vetor das forças nodais externas. Nos casos em que houve indícios de não convergência, dado por um número excessivo de iterações, o processo foi interrompido usando-se, em seguida, um maior número de incrementos.

3.1 VIGA EM BALANÇO COM CARGA-MOMENTO NA EXTREMIDADE

A viga em balanço da Figura 3.1 talvez seja a estrutura mais utilizada na literatura para testes com grandes rotações. As componentes do deslocamento e a rotação na extremidade livre obtidas pela formulação corrotacional são identificadas por U , W e Θ . Os valores exatos

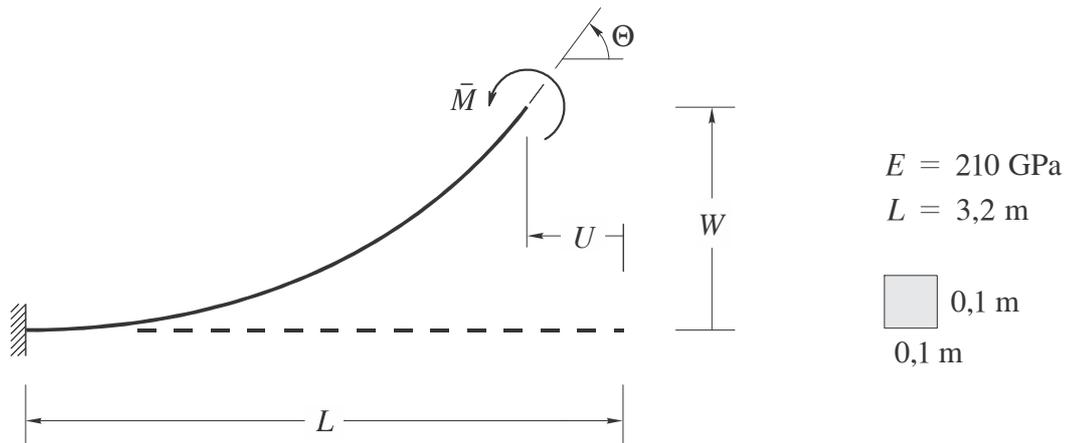


Figura 3.1 Viga em balanço com carga-momento aplicada na extremidade.

U_{exato} , W_{exato} , Θ_{exato} dessas quantidades podem ser obtidos da teoria de Euler-Bernoulli desprezando-se a deformação axial do eixo da viga (SANTOS, 2015). A Tabela 3.1 apresenta esses valores para $\bar{M}L/2\pi EI = 0,5; 1; 1,5$ e 2 , que correspondem à viga deformada em meia volta (semicircunferência), uma volta (circunferência), uma volta e meia, e duas voltas, respectivamente.

Tabela 3.1 Valores exatos U_{exato} , W_{exato} e Θ_{exato} para a viga com carga-momento na extremidade.

$\bar{M}L/2\pi EI$	U_{exato}/L	W_{exato}/L	Θ_{exato}
0,5	1	$2/\pi$	π
1	1	0	2π
1,5	1	$2/3\pi$	3π
2	1	0	4π

A Tabela 3.2 mostra os parâmetros

$$k_u = \frac{U}{U_{\text{exato}}} \quad k_w = \frac{W}{W_{\text{exato}}} \quad k_\theta = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{exato}}}$$

para a viga discretizada em 2 elementos. A tabela também traz o número mínimo Inc_{min} de incrementos necessários à convergência, assim como o número médio $Iter_{\text{med}}$ de iterações por incremento. A discretização com apenas 2 elementos inviabiliza a solução para $\bar{M}L/2\pi EI = 1,5$ e 2 . Na aplicação do método de Newton-Raphson, usamos uma estimativa inicial nula

para os deslocamentos nodais de modo que a solução da primeira iteração corresponde à solução linear.

Tabela 3.2 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 2 elementos.

$\bar{M}L/2\pi EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
0,5	1,001	1,110	1,001	1	9,0
1	1,000	†	1,000	50	3,7
1,5	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-

† $W_{\text{obtido}} = 0$ ($W_{\text{exato}} = 0$)

Os resultados para a malha refinada em 4, 8, 16 e 100 elementos aparecem nas Tabelas 3.3 - 3.6.

Tabela 3.3 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 4 elementos.

$\bar{M}L/2\pi EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
0,5	1,000	1,026	1,000	3	7,0
1	1,000	†	1,000	3	7,3
1,5	1,000	1,275	1,000	5	7,0
2	1,000	†	1,000	133	3,2

† $W_{\text{obtido}} = 0$ ($W_{\text{exato}} = 0$)

Tabela 3.4 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 8 elementos.

$\bar{M}L/2\pi EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
0,5	1,000	1,007	1,000	1	9,0
1	1,000	†	1,000	2	11,0
1,5	1,000	1,060	1,000	10	13,0
2	1,000	†	1,000	5	13,6

† $W_{\text{obtido}} = 0$ ($W_{\text{exato}} = 0$)

Tabela 3.5 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 16 elementos.

$\bar{M}L/2\pi EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
0,5	1,000	1,002	1,000	2	13,0
1	1,000	†	1,000	3	9,0
1,5	1,000	1,015	1,000	4	11,0
2	1,000	†	1,000	5	11,0

† $W_{\text{obtido}} = 0$ ($W_{\text{exato}} = 0$)

Tabela 3.6 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 100 elementos.

$\bar{M}L/2\pi EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
0,5	1,000	1,000	1,000	7	12,0
1	1,000	†	1,000	14	12,0
1,5	1,000	1,000	1,000	21	12,0
2	1,000	†	1,000	28	12,0

† $W_{\text{obtido}} = 0$ ($W_{\text{exato}} = 0$)

A Figura 3.2 mostra a viga deformada para alguns valores de $M^* = \bar{M}L/2\pi EI$. O resultado exato vem diretamente das expressões (A.19) e (A.23) de SANTOS (2015). Podemos observar uma boa precisão da formulação corrotacional com uma discretização da viga em 8 e 16 elementos. O efeito de uma maior discretização em 16 elementos aparece mais nitidamente para maiores valores de M^* .

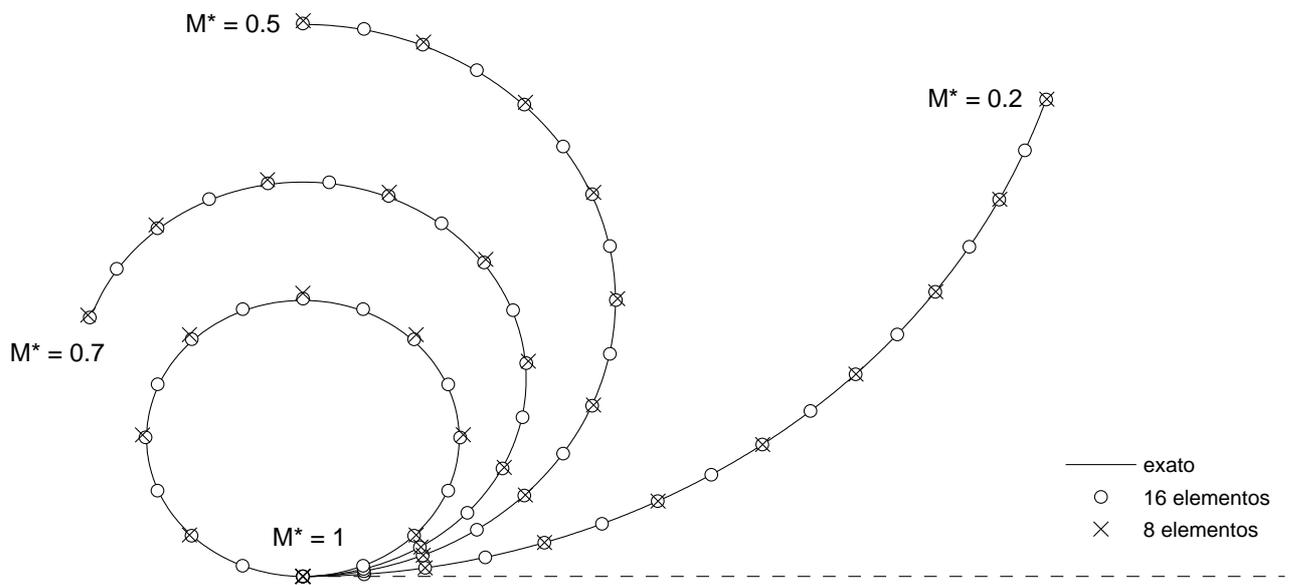


Figura 3.2 Configurações deformadas da viga para alguns valores de $M^* = \bar{M}L/2\pi EI$.

3.2 VIGA EM BALANÇO COM CARGA TRANSVERSAL NA EXTREMIDADE

O segundo exemplo é a viga da Figura 3.3. Os valores de U_{exato} , W_{exato} e Θ_{exato} oriundos da teoria de Euler-Bernoulli, desprezando-se a deformação axial do eixo da viga, são dados em SANTOS (2015) por meio de integrais elípticas de 1ª e 2ª espécies. Esses valores também aparecem, já em forma tabular, no trabalho de MATTIASSON (1981) e são dados na Tabela 3.7 para $P_w L^2/EI = 1; 4; 7$ e 10 .

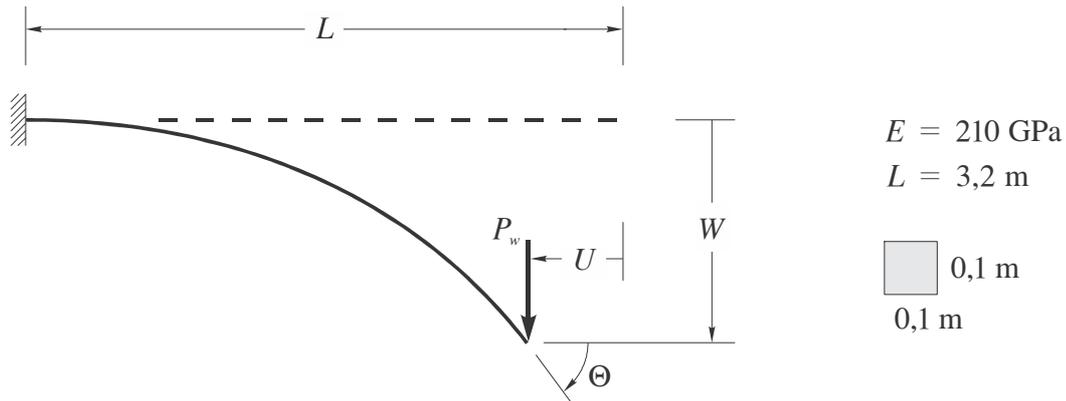


Figura 3.3 Viga em balanço com carga transversal aplicada na extremidade.

Tabela 3.7 Valores exatos de U , W e Θ para a viga com carga transversal na extremidade.

$P_w L^2 / EI$	U_{exato} / L	W_{exato} / L	Θ_{exato} (rad)
1	0,05643	0,30172	0,46135
4	0,32894	0,66996	1,12124
7	0,47293	0,76737	1,33496
10	0,55500	0,81061	1,43029

As Tabelas 3.8 - 3.12 mostram os parâmetros

$$k_u = \frac{U}{U_{\text{exato}}} \quad k_w = \frac{W}{W_{\text{exato}}} \quad k_\theta = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{exato}}}$$

para a viga discretizada em 2, 4, 8, 16 e 100 elementos. De maneira semelhante ao primeiro exemplo, na aplicação do método de Newton-Raphson, usamos uma estimativa inicial nula para os deslocamentos nodais.

Tabela 3.8 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 2 elementos.

$P_w L^2 / EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1	0,961	1,007	1,006	1	5,0
4	0,998	1,031	1,027	1	7,0
7	1,013	1,041	1,032	1	7,0
10	1,023	1,047	1,033	2	7,0

Tabela 3.9 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 4 elementos.

$P_w L^2 / EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1	0,990	1,002	1,001	1	5,0
4	0,997	1,007	1,006	1	7,0
7	1,000	1,009	1,006	1	7,0
10	1,001	1,011	1,007	2	7,0

Tabela 3.10 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 8 elementos.

$P_w L^2 / EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1	0,997	1,001	1,000	1	5,0
4	0,999	1,002	1,002	1	7,0
7	1,000	1,003	1,001	1	7,0
10	1,000	1,003	1,002	2	7,0

Tabela 3.11 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 16 elementos.

$P_w L^2 / EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1	0,999	1,000	1,000	1	6,0
4	1,000	1,001	1,001	1	7,0
7	1,000	1,001	1,000	1	9,0
10	1,000	1,001	1,001	2	7,5

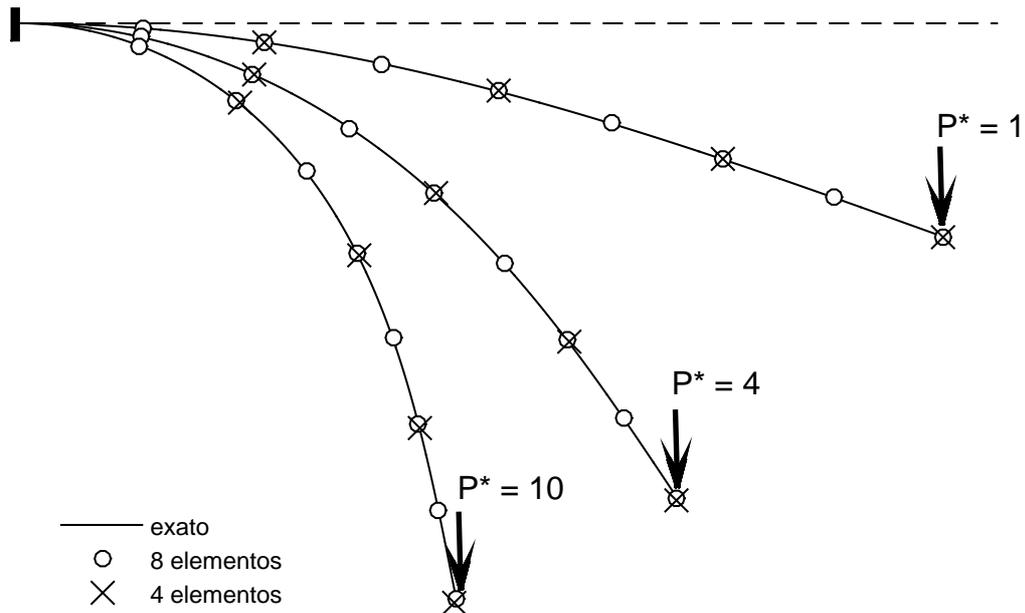


Figura 3.4 Configurações deformadas da viga para alguns valores de $P^* = P_w L^2 / EI$.

Tabela 3.12 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 100 elementos.

$P_w L^2 / EI$	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1	1,000	1,000	1,000	2	9,5
4	1,000	1,000	1,000	5	10,2
7	1,000	1,001	0,999	8	8,1
10	1,000	1,001	1,000	16	6,0

A Figura 3.4 mostra a viga deformada para alguns valores de $P^* = P_w L^2 / EI$. Podemos observar uma boa precisão da formulação corrotacional com uma discretização da viga em 4 e 8 elementos. Os valores exatos do deslocamento indicados na figura foram obtidos usando o seguinte roteiro:

1. escolhemos um $P_w L^2 / EI$ na Tabela 3.7;

2. avaliamos

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_w}{EI}} \quad p = \sqrt{\frac{1 + \text{sen } \Theta_{\text{exato}}}{2}} \quad \bar{\omega} = \text{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2p}}.$$

O parâmetro ω varia continuamente ao longo da viga, valendo $\bar{\omega}$ no engaste e $\pi/2$ na extremidade livre. Escolhemos um valor $\bar{\omega} \leq \omega = \omega_e \leq \pi/2$ e determinamos a coordenada $X = X_e$ correspondente, que varia de $X = 0$ no engaste a $X = L$ na extremidade livre, empregando a equação (A.35) de SANTOS (2015):

$$\int_0^{X_e} dX = \int_{\bar{\omega}}^{\omega_e} \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}}.$$

Adotando-se a notação

$$K(A, p) = \int_0^A \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}}$$

para integral elíptica de 1ª espécie, obtemos

$$X_e = \frac{1}{\alpha} (K(\omega_e, p) - K(\bar{\omega}, p));$$

3. pela expressão (A.40) de SANTOS (2015), determinamos o deslocamento horizontal u do ponto com coordenada X_e :

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{2p \text{sen } \omega}{\alpha} - \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right) d\omega \\ \int_0^{u_e} du &= \int_{\bar{\omega}}^{\omega_e} \left(\frac{2p \text{sen } \omega}{\alpha} - \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right) d\omega \\ u_e &= \frac{2p}{\alpha} (\cos \bar{\omega} - \cos \omega_e) - X_e. \end{aligned}$$

Usando a equação (A.43), determinamos a componente vertical w :

$$\begin{aligned} dw &= \frac{1 - 2(1 - p^2 \text{sen}^2 \omega)}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} d\omega \\ \int_0^{w_e} dw &= \int_{\bar{\omega}}^{\omega_e} \frac{1 - 2(1 - p^2 \text{sen}^2 \omega)}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} d\omega \\ w_e &= X_e - \frac{2}{\alpha} (E(\omega_e, p) - E(\bar{\omega}, p)) \end{aligned}$$

onde

$$E(A, p) = \int_0^A \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega} d\omega$$

denota integral elíptica de 2ª espécie;

4. repetimos os passos 2 e 3 para determinar os deslocamentos de vários outros pontos da viga.

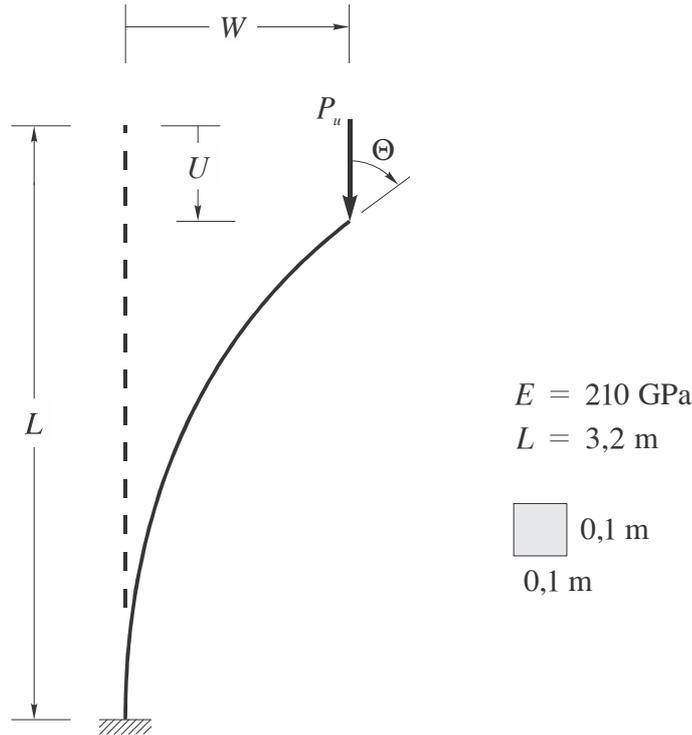


Figura 3.5 Viga sob compressão axial.

3.3 VIGA SOB COMPRESSÃO AXIAL

A viga da Figura 3.5 está inicialmente sob compressão axial. Fazendo a carga P_u crescer a partir de zero, a viga permanece vertical até o valor $P_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$. A partir daí aparecem duas trajetórias de equilíbrio: a viga continua vertical, se não houver nenhuma perturbação (equilíbrio instável), ou a viga se inclina e alcança uma nova forma de equilíbrio estável (THOMPSON e HUNT, 1973).

Na avaliação dos parâmetros k_u , k_w e k_θ , os valores de U_{exato} , W_{exato} e Θ_{exato} oriundos da teoria de Euler-Bernoulli, desprezando-se a deformação axial do eixo da viga, são dados em SANTOS (2015) por meio de integrais elípticas de 1ª e 2ª espécies. A Tabela 3.13 apresenta esses valores para $P_u/P_{cr} = 1,015; 1,294; 2,542$ e $15,218$, determinados a partir da fixação de $\Theta_{\text{exato}} = 20^\circ; 80^\circ; 140^\circ; 179^\circ$ respectivamente.

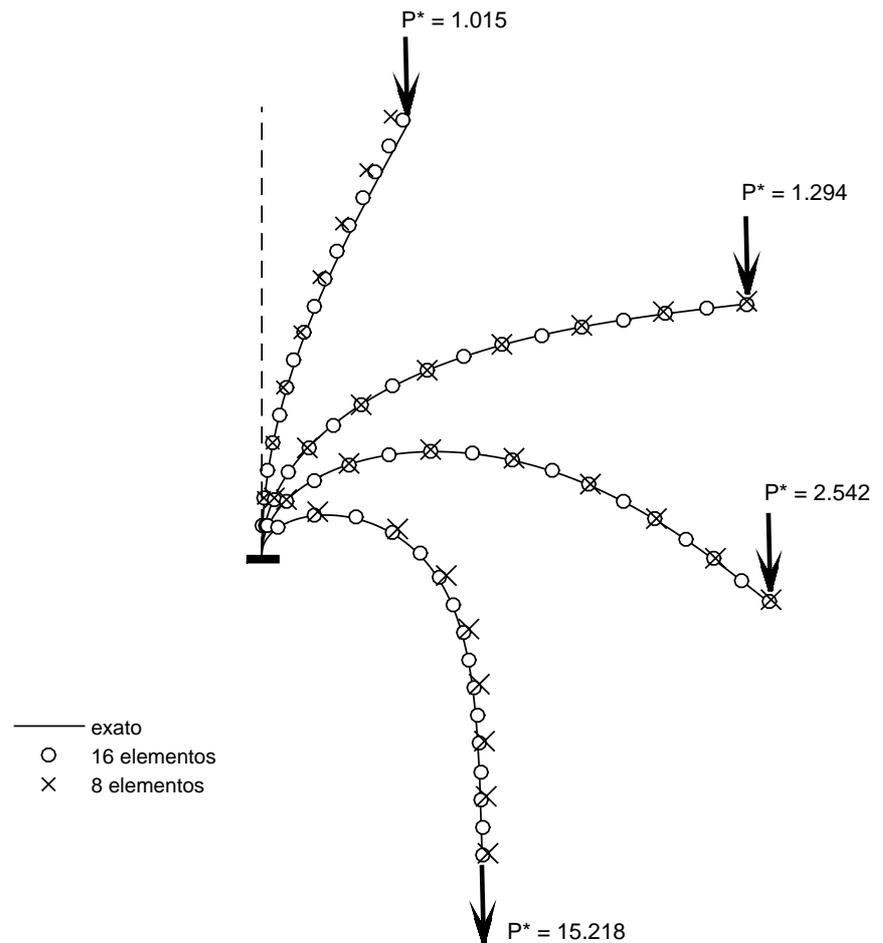


Figura 3.6 Configurações deformadas da viga para alguns valores de $P^* = P_u/P_{cr}$.

Tabela 3.13 Valores exatos de U , W e Θ para a viga sob compressão axial.

P_u/P_{cr}	U_{exato}/L	W_{exato}/L	Θ_{exato}
1,015	0,03027	0,21941	20°
1,294	0,44060	0,71950	80°
2,542	1,10692	0,75039	140°
15,218	1,67355	0,32637	179°

As Tabelas 3.14 - 3.18 mostram os parâmetros

$$k_u = \frac{U}{U_{\text{exato}}} \quad k_w = \frac{W}{W_{\text{exato}}} \quad k_\theta = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{exato}}}$$

para a viga discretizada 2, 4, 8, 16 e 100 elementos.

Tabela 3.14 Viga sob compressão axial discretizada em 2 elementos.

P_u/P_{cr}	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1,015	-	-	-	-	-
1,294	0,825	0,968	0,924	1	11,0
2,542	0,972	1,086	1,013	2	8,0
15,218	-	-	-	-	-

Tabela 3.15 Viga sob compressão axial discretizada em 4 elementos.

P_u/P_{cr}	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1,015	-	-	-	-	-
1,294	0,957	0,994	0,983	1	7,0
2,542	0,988	1,018	1,002	3	7,0
15,218	1,000	1,125	1,003	17	4,6

Tabela 3.16 Viga sob compressão axial discretizada em 8 elementos.

P_u/P_{cr}	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1,015	0,764	0,873	0,871	1	7,0
1,294	0,989	0,998	0,996	1	7,0
2,542	0,997	1,004	1,000	2	10,0
15,218	0,997	1,027	1,001	18	4,7

Tabela 3.17 Viga sob compressão axial discretizada em 16 elementos.

P_u/P_{cr}	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1,015	0,956	0,956	0,955	1	7,0
1,294	1,000	1,000	1,000	1	9,0
2,542	0,999	1,001	1,000	2	11,0
15,218	1,000	1,006	1,011	5	9,8

Tabela 3.18 Viga sob compressão axial discretizada em 100 elementos.

P_u/P_{cr}	k_u	k_w	k_θ	Inc_{\min}	$Iter_{\text{med}}$
1,015	0,967	0,980	0,980	5	7,0
1,294	1,000	1,000	1,000	5	10,0
2,542	1,000	1,000	1,000	17	6,1
15,218	1,002	1,000	1,000	81	3,4

Para obter a solução por elementos finitos, uma pequena carga transversal é aplicada na extremidade livre com $P_u = P_{cr}$. Os deslocamentos nodais assim obtidos são usados pelo método de Newton-Raphson como estimativa inicial no problema original para determinar o primeiro ponto da trajetória de equilíbrio secundária.

A Figura 3.6 mostra a viga deformada para alguns valores de $P^* = P_u/P_{cr}$. Podemos observar uma boa precisão da formulação corrotacional com uma discretização da viga em 8 e 16 elementos. Os valores exatos do deslocamento indicados na figura foram obtidos usando o seguinte roteiro:

1. escolhamos um P_u/P_{cr} na Tabela 3.13;
2. avaliamos

$$p = \text{sen} \frac{\Theta_{\text{exato}}}{2} \quad \alpha = \sqrt{\frac{P_u}{EI}};$$

3. escolhamos um valor $0 \leq \omega = \omega_e \leq \pi/2$ e determinamos a coordenada $X = X_e$ correspondente, que varia de $X = 0$ no engaste a $X = L$ na extremidade livre, empregando a equação (A.57) de SANTOS (2015):

$$\int_0^{X_e} dX = \int_0^{\omega_e} \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}}.$$

O parâmetro ω varia continuamente ao longo da viga, valendo 0 no engaste e $\pi/2$ na extremidade livre. Adotando-se a notação

$$K(A, p) = \int_0^A \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}}$$

para integral elíptica de 1ª espécie, obtemos

$$X_e = \frac{1}{\alpha} K(\omega_e, p);$$

4. pela expressão (A.61) de SANTOS (2015), determinamos o deslocamento horizontal u do ponto com coordenada X_e :

$$du = \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega} - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right) d\omega$$

$$\int_0^{u_e} du = \int_0^{\omega_e} \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega} - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right) d\omega$$

$$u_e = 2 \left(\frac{E(\omega_e, p)}{\alpha} - X_e \right).$$

Usando a equação (A.64), determinamos a componente vertical w :

$$dw = \frac{2p}{\alpha} \text{sen } \omega d\omega$$

$$\int_0^{w_e} dw = \int_0^{\omega_e} \frac{2p}{\alpha} \text{sen } \omega d\omega$$

$$w_e = \frac{2p}{\alpha} (1 - \cos \omega_e).$$

5. repetimos os passos 3 e 4 para determinar os deslocamentos de vários outros pontos da viga.

Capítulo 4

Conclusões

Podemos inferir dos exemplos numéricos apresentados:

- (a) a excelente capacidade que a formulação corrotacional apresenta em lidar com fortes não-linearidades geométricas, associadas a grandes rotações, apesar do uso de um simples elemento linear para descrever a deformação;
- (b) quanto maior é a rotação, maior é o número de incrementos necessários para reproduzir o equilíbrio. O número médio de iterações por incremento tende a ser, nesse caso, menor;
- (c) a melhora dos resultados com o refinamento da malha torna-se mais evidente para os casos com maior rotação.

Esperamos num futuro próximo:

- (a) a realização de mais testes numéricos;
- (b) a troca do elemento de viga de Euler-Bernoulli pelo correspondente de Timoshenko. É uma tarefa simples, visto que ambos os elementos apresentam os mesmos nós com os mesmos graus de liberdade;
- (c) a inclusão de efeitos piezelétricos.

Referências

BELYTSCHKO, T., and GLAUM, L. W., 1979, Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis, *Computers and Structures*, vol. 10, no. 1-2, pp. 175-182.

BELYTSCHKO, T., and HSIEH, B. J., 1973, Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, no. 3, pp. 255-271.

CESCOTTO, S., FREY, F., and FONDER, G., 1979, Total and updated Lagrangian descriptions in non-linear structural analysis: a unified approach, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, R. Glowinski, E. Y. Rodin, and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley, Chichester, pp. 283-296.

CHANDRASEKHARAIHAH, D. S., and DEBNATH, L., 1994, *Continuum Mechanics*, Academic Press, Boston.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., and WITT, R. J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., John Wiley, New York.

MALVERN, L. E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.

MATTIASSON, K., 1981, Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, no. 1, pp. 145-153.

ORAN, C., 1973a, Tangent stiffness in plane frames, *Journal of Structural Division*, vol. 99, pp. 973-985.

ORAN, C., 1973b, Tangent stiffness in space frames, *Journal of Structural Division*, vol. 99, pp. 987-1001.

REDDY, J. N., 2002, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, 2nd ed., John Wiley, Hoboken.

SANTOS, R. R. F., 2015, *Vigas sob Pequenas Deformações mas Grandes Rotações*, Trabalho de Graduação, Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

THOMPSON, J. M. T., and HUNT, G. W., 1973, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.

WEMPNER, G., 1969, Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 5, no. 2, pp. 117-153.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., and ZHU, J. Z., 2013, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th edn, Elsevier, Amsterdam.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TC</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">22 de novembro de 2016</p>	3. REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/TC-052/2016</p>	4. N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">37</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Formulação corrotacional consistente para pórticos planos.			
6. AUTOR(ES): Jéssica Gomes de Souza Alcântara Meireles			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: 1. Não-linearidade geométrica. 2. Análise estrutural. 3. Viga. 4. Viga (formas estruturais). 5. Método dos elementos finitos. 6. Formulação corrotacional. 7. Engenharia civil.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Vigas (suportes); Análise estrutural; Sistemas não-lineares; Método dos elementos finitos; Engenharia estrutural; Engenharia civil.			
10. APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;">X Nacional Internacional</p> ITA, São José dos Campos. Curso de Graduação em Engenharia Civil – Aeronáutica. Orientador: Eliseu Lucena Neto; coorientador: Alex Correia Monteiro. Publicado em 2016.			
11. RESUMO: Um elemento finito corrotacional eficiente e preciso para a análise de pórticos planos, sob pequenas deformações mas grandes rotações, é desenvolvido neste trabalho. O elemento é localmente formulado como o elemento linear tradicional baseado na teoria de Euler-Bernoulli para pequenas rotações. Uma técnica incremental iterativa baseada no método de Newton Raphason é empregada para a solução das equações não lineares de equilíbrio. Apresentam-se exemplos numéricos que demonstram a eficiência e a capacidade da formulação corrotacional em lidar com grandes rotações. Os resultados obtidos são validados por meio de soluções exatas disponíveis na literatura. Uma boa precisão pode ser encontrada em todos os casos.			
12. GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;">(X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO</p>			