

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Rodrigo Raimundo Freitas Santos

Vigas sob Pequenas Deformações
mas Grandes Rotações

Trabalho de Graduação
2015

***Engenharia Civil-
Aeronáutica***

Rodrigo Raimundo Freitas Santos

**Vigas sob Pequenas Deformações
mas Grandes Rotações**

Orientador

Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)

Co-orientador

Prof. Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)

Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Santos, Rodrigo Raimundo Freitas

Viga sob grandes rotações mas pequenas deformações / Rodrigo Raimundo Freitas Santos.
São José dos Campos, 2015.
61f.

Trabalho de Graduação – Engenharia Civil-Aeronáutica –
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2012. Orientador: Prof. Eliseu Lucena Neto.

1. Vigas (suportes). 2. Análise estrutural. 3. Sistemas não-lineares. 4. Método de elementos finitos.
5. Estruturas estaticamente indeterminadas. 6. Corpos em rotação. 7. Engenharia estrutural. 8.
Engenharia civil. I. Departamento de Ciência e Tecnologia. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
Divisão de Engenharia Civil-Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTOS, RODRIGO RAIMUNDO FREITAS. **Viga sob grandes rotações mas pequenas deformações**. 2015. 61f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Rodrigo Raimundo Freitas Santos

TÍTULO DO TRABALHO: Viga de Euler-Bernoulli sob pequenas deformações mas grandes rotações

TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação/2015

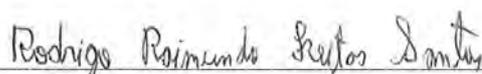
É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Rodrigo Raimundo Freitas Santos
Praça 11 de Novembro, 50 – Boca da mata
Alagoas – AL – Brasil. CEP: 27680-0001

VIGA SOB GRANDES ROTAÇÕES MAS PEQUENAS DEFORMAÇÕES

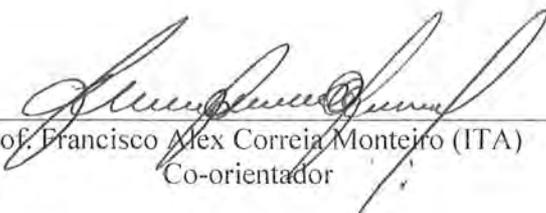
Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação



Rodrigo Raimundo Freitas Santos
Autor



Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Orientador



Prof. Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)
Co-orientador



Prof. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Coordenador do Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

São José dos Campos, 23 de novembro de 2015

Resumo

Dois elementos finitos para pórticos planos sob pequenas deformações mas grandes rotações, baseados na descrição lagrangiana total, são aqui analisados. O primeiro elemento decorre da teoria de vigas de Timoshenko com aproximações lineares para os deslocamentos axial e transversal assim como para a rotação. O segundo elemento decorre da teoria de vigas de Euler-Bernoulli com aproximações quadrática e cúbica para o deslocamento axial e transversal, respectivamente. Enquanto o travamento de cisalhamento transversal faz-se presente apenas no primeiro elemento, o travamento de membrana ocorre em ambos. Além de identificar analítica e numericamente os travamentos, mostramos neste trabalho como mitigá-los.

Abstract

Two finite elements for plane frames under small strains but large rotations, based on the total Lagrangian description, are analyzed herein. The first element stems from the Timoshenko beam theory with linear approximations for axial and transverse displacements as well as for the rotation. The second element stems from the Euler-Bernoulli beam theory with quadratic and cubic approximations for axial and transverse displacements, respectively. While the transverse shear locking is only present in the first element, the membrane locking appears in both. In addition to identify analytical and numerically these lockings, the work shows how to alleviate them.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 8 |
| 2 | Fundamentação Teórica | 11 |
| 2.1 | Relações Deformação-Deslocamento | 11 |
| 2.2 | Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno | 16 |
| 2.3 | Equações Constitutivas | 19 |
| 3 | Formulação de Elementos Finitos | 21 |
| 3.1 | Elemento T | 22 |
| 3.2 | Elemento EB | 26 |
| 4 | Aplicações Numéricas | 32 |
| 4.1 | Viga em Balanço com Carga-Momento na Extremidade..... | 33 |
| 4.2 | Viga em Balanço com Carga Transversal na Extremidade..... | 36 |
| 4.3 | Barra sob Compressão Axial | 45 |
| 5 | Conclusões | 48 |
| A | Soluções Analíticas | 50 |
| A.1 | Viga em Balanço com Carga-Momento na Extremidade..... | 52 |
| A.2 | Viga em Balanço com Carga Transversal na Extremidade..... | 53 |
| A.3 | Barra sob Compressão Axial..... | 56 |
| | Referências | 60 |

Capítulo 1

Introdução

O movimento de um sólido no espaço é ilustrado na Figura 1.1, para fins didático, por uma viga dividida em quatro elementos finitos e submetida a uma carga-momento. Suponha que se deseja determinar a configuração C_n do elemento próximo à extremidade livre, quando a carga que atua tem magnitude M_n . A natureza não linear do problema requer que a solução seja obtida em etapas: conhecem-se antes as configurações $C_0, C_1, \dots, C_i, \dots, C_{n-1}$ para, em seguida, determinar-se a configuração C_n . Quatro dessas configurações são indicadas na Figura 1.1: a configuração inicial C_0 , uma configuração intermediária C_i , a configuração C_{n-1} e a configuração atual C_n que se deseja determinar.

Se no processo incremental-iterativo para a determinação de C_n as equações são estabelecidas tomando-se como referência uma configuração conhecida, é dito que se está utilizando uma descrição lagrangiana: na descrição lagrangiana total C_0 é a configuração de referência; na descrição lagrangiana atualizada a referência é a configuração C_{n-1} . CESCOTTO *et al.* (1979) sugerem o nome “generalizada” para a descrição com referência numa configuração intermediária C_i , que tem como casos particulares a descrição lagrangiana total ($C_i = C_0$) e a atualizada ($C_i = C_{n-1}$). A descrição Euleriana usaria como referência a própria configuração desconhecida C_n .

Nos problemas geometricamente lineares é tácito o uso da descrição lagrangiana total devido à proximidade entre C_0 e C_n .

Para grandes rotações sob pequenas deformações, os elementos finitos corrotacionais têm mostrado uma certa superioridade em relação aos elementos que usam descrições lagrangianas. Esses elementos adotam uma configuração indeformada auxiliar C_{0n} , muito

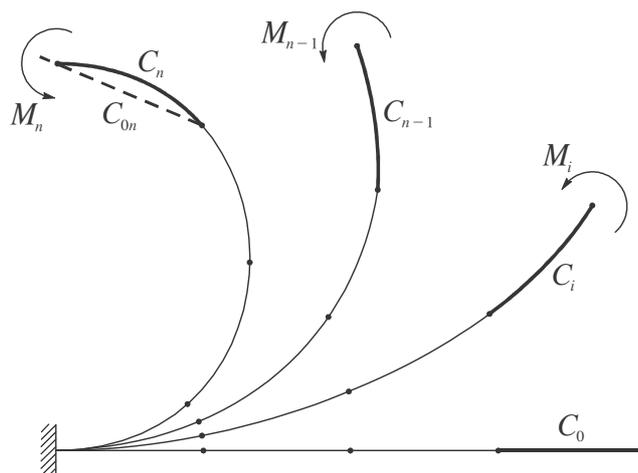


Figura 1.1 O elemento está em equilíbrio nas configurações C_0 , C_i , C_{n-1} e C_n . Apesar de ser apenas auxiliar, a configuração C_{0n} é fundamental para os elementos corrotacionais.

próxima à C_n , que no caso ideal é obtida exclusivamente pelo movimento de corpo rígido do elemento de sua configuração C_0 . É o movimento entre C_{0n} e C_n que deforma o elemento. Utilizando-se de ambas as configurações C_0 e C_{0n} como referência, a formulação corrotacional não pode ser, a rigor, classificada como lagrangiana ou euleriana, como às vezes aparece rotulada na literatura.

Dois elementos finitos para pórticos planos sob pequenas deformações mas grandes rotações, baseados na descrição lagrangiana total, são aqui analisados. O primeiro elemento, denominado elemento T, decorre da teoria de vigas de Timoshenko com aproximações lineares para os deslocamentos axial e transversal assim como para a rotação. FELIPPA (2014) discute aspectos teóricos desse elemento sem mostrar nenhum resultado numérico. O segundo elemento, denominado elemento EB, decorre da teoria de vigas de Euler-Bernoulli com aproximações quadrática e cúbica para o deslocamento axial e transversal, respectivamente. O elemento é proposto por NANAKORN e VU (2006), que mostram resultados numéricos mas não discutem as limitações do elemento oriundas das singularidades em seu campo de deslocamento assim como do travamento de membrana. Os dois elementos são analisados detalhadamente em vista da necessidade futura de incorporar no melhor deles materiais piezelétricos com não linearidade física decorrente da interação entre a polarização e o campo elétrico.

Apresentamos no Capítulo 2 a teoria de vigas de Timoshenko restrita a pequenas de-

formações, mas sujeitas a grandes rotações, na qual a restrição de pequenas deformações é incorporada de maneira consistente. O desenvolvimento dos elementos se dá no Capítulo 3, onde discutimos o travamento de membrana (ambos os elementos o possuem) e o de cisalhamento transversal (só o elemento T o possui) e como mitigá-los. Testes numéricos são aplicados no Capítulo 4 por meio das estruturas comumente empregadas na literatura para esse fim. As conclusões são apresentadas no Capítulo 5. O Apêndice A contém as soluções analíticas dos problemas usados nos testes numéricos, restritas a uma deformação axial nula do eixo da viga assim como a uma deformação de cisalhamento transversal nula.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Apresentamos neste capítulo a teoria de vigas de Timoshenko restrita a pequenas deformações, mas sujeitas a grandes rotações, na qual a restrição de pequenas deformações é incorporada de maneira consistente.

2.1 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Um ponto $B(X, Y, Z)$ da viga na configuração inicial move-se para o ponto $b(x, y, z)$ na configuração atual, como mostra a Figura 2.1. Pontos nas duas configurações são identificados nos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais XYZ e xyz , respectivamente. Sob a hipótese de Timoshenko, na qual as seções transversais são infinitamente rígidas e permanecem planas mas não necessariamente normais ao eixo da viga na transformação entre as duas configurações, as coordenadas dos pontos relacionam-se por

$$\begin{aligned}x &= X + u + Z \operatorname{sen} \theta \\y &= Y \\z &= w + Z \operatorname{cos} \theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

para movimentos no plano XZ (ou xz). As componentes

$$u = u(X) \quad v = 0 \quad w = w(X)\tag{2.2}$$

são do deslocamento do ponto $A(X, Y, 0)$ sobre o eixo da viga, e $\theta(X)$ é a rotação da seção transversal em torno do eixo Y .

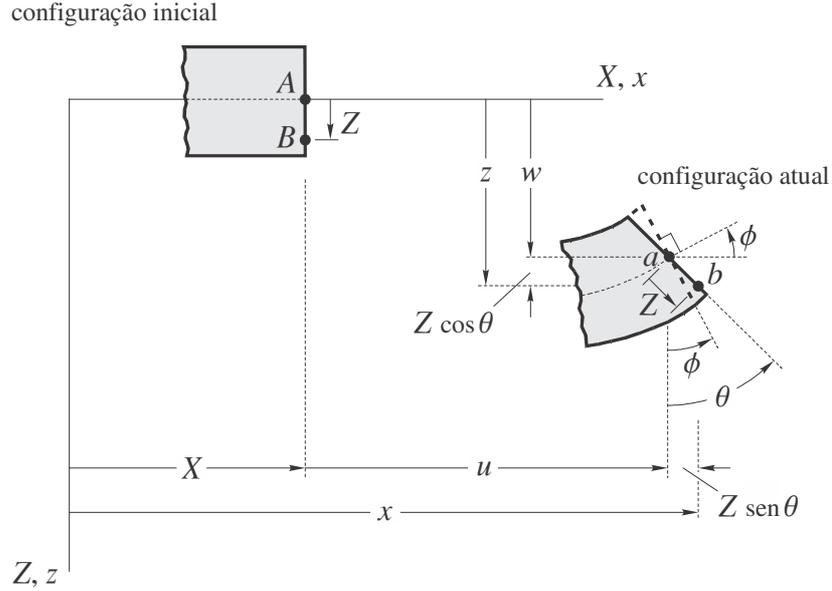


Figura 2.1 Viga nas configurações inicial e atual. O ângulo θ passa a ser igual a ϕ numa viga de Euler-Bernoulli.

O gradiente da transformação é dado por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u' + Z\theta' \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ w' - Z\theta' \text{sen } \theta & 0 & \text{cos } \theta \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

O tensor deformação de Green é

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \epsilon_X & 0 & \frac{1}{2} \gamma_{XZ} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{XZ} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \epsilon_0 + [(1 + u') \cos \theta - w' \text{sen } \theta] Z\theta' + \frac{1}{2} Z^2 \theta'^2 \\ \gamma_{XZ} &= (1 + u') \text{sen } \theta + w' \text{cos } \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

e

$$\epsilon_0 = u' + \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2). \quad (2.6)$$

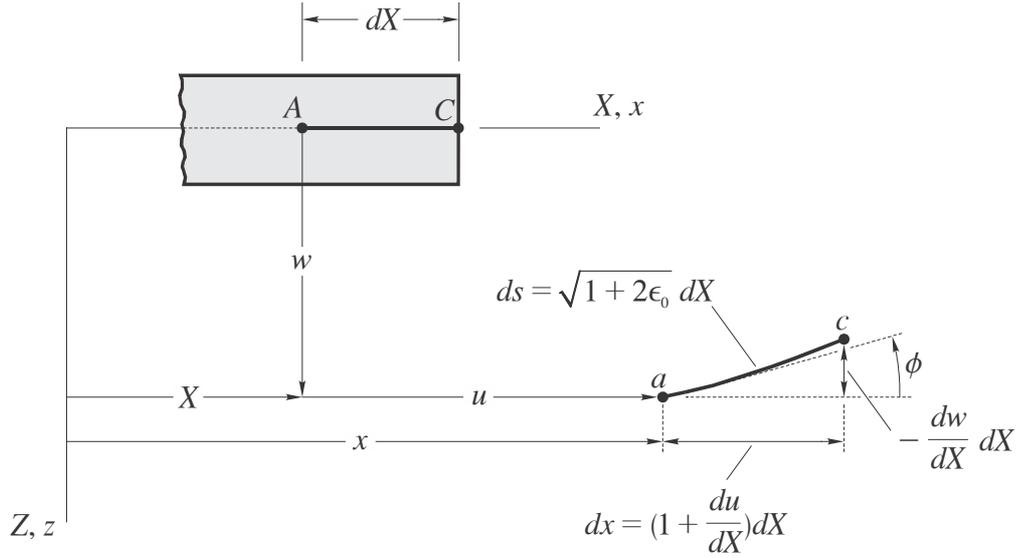


Figura 2.2 Deslocamento da fibra AC do eixo da viga.

As expressões (2.5) são exatas no contexto da teoria de Timoshenko. Se as deformações forem pequenas, podemos simplificar ϵ_X substituindo-a pela expressão mais simples

$$\epsilon_X \approx e_0 + Z\kappa \quad (2.7)$$

onde

$$e_0 = (1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta - 1 \quad \kappa = \theta'. \quad (2.8)$$

Definindo $\gamma = \gamma_{XZ}$, as relações deformação-deslocamento da teoria escrevem-se

$$\begin{Bmatrix} e_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta - 1 \\ \theta' \\ (1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

onde $u(X)$, $w(X)$ e $\theta(X)$ são variáveis independentes.

Para demonstrar de maneira consistente a simplificação (2.7), vamos reescrever \mathbf{F} na forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_N \quad (2.10)$$

onde a primeira parcela

$$\mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} 1 + u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ w' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

contém os termos lineares de \mathbf{F} e a segunda parcela é dada por

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{F}}_N. \quad (2.12)$$

Considerando que \mathbf{R} é ortogonal,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R} (\mathbf{R}^T \mathbf{F}_L + \bar{\mathbf{F}}_N) \\ &= \mathbf{R}\bar{\mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

a ação de \mathbf{F} pode ser vista como sendo constituída da ação de $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}_L + \bar{\mathbf{F}}_N$ seguida de uma rotação de corpo rígido em torno de Y de um ângulo θ representada por \mathbf{R} .

Das relações

$$\text{sen } \phi = -\frac{w'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}} \quad \cos \phi = \frac{1+u'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}} \quad (2.14)$$

obtidas da Figura 2.2, escrevemos

$$(1+u') \text{sen } \phi + w' \cos \phi = 0. \quad (2.15)$$

Vamos usar (2.15), além de

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos (\phi + \theta - \phi) \\ &= \cos \phi \cos (\theta - \phi) - \text{sen } \phi \text{sen } (\theta - \phi) \\ \text{sen } \theta &= \text{sen } (\phi + \theta - \phi) \\ &= \text{sen } \phi \cos (\theta - \phi) + \cos \phi \text{sen } (\theta - \phi), \end{aligned} \quad (2.16)$$

para estabelecer

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \begin{bmatrix} (1+u') \cos \theta - w' \text{sen } \theta + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1+u') \text{sen } \theta + w' \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [(1+u') \cos \phi - w' \text{sen } \phi] \cos (\theta - \phi) + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ [(1+u') \cos \phi - w' \text{sen } \phi] \text{sen } (\theta - \phi) & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uma forma alternativa para o tensor deformação de Green (2.4) é

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}). \quad (2.18)$$

Sabendo-se que o gradiente da parcela do deslocamento associada a $\bar{\mathbf{F}}$ é

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}, \quad (2.19)$$

então

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} [(1 + u') \cos \phi - w' \sin \phi] \cos (\theta - \phi) - 1 + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [(1 + u') \cos \phi - w' \sin \phi] \sin (\theta - \phi) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

A relação

$$(1 + u') \cos \phi - w' \sin \phi = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \quad (2.21)$$

obtida de (2.14) permite reescrever

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \cos (\theta - \phi) - 1 + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \sin (\theta - \phi) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

As componentes não nulas de \mathbf{H} são necessariamente pequenas para vigas sob pequenas deformações pois

$$\sqrt{1 + 2\epsilon_0} \approx 1 \quad |Z\theta'| \ll 1 \quad \theta - \phi \approx 0, \quad (2.23)$$

onde consideramos que a curvatura $d\theta/ds = (1/\sqrt{1 + 2\epsilon_0}) d\theta/dX \approx d\theta/dX$ (veja Figura 2.2). Verifique (2.23) impondo $|\epsilon_0| \ll 1$, $|Z|$ e $|\theta'|$ com a ordem de grandeza da altura e curvatura da viga, e $\theta - \phi$ como sendo a variação angular (em radianos) provocada pelo cisalhamento transversal. A substituição de (2.19) em (2.18) conduz a

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.24)$$

e indica que podemos adotar a simplificação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \cos (\theta - \phi) - 1 + Z\theta' & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \sin (\theta - \phi) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \sin (\theta - \phi) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta - 1 + Z\theta' & 0 & \frac{1}{2} [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

cuja componente ϵ_X é antecipada em (2.7). Note a forma alternativa

$$e_0 = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \cos(\theta - \phi) - 1 \quad \gamma = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \sin(\theta - \phi) \quad (2.26)$$

que se mostrará útil em discussões futuras.

Com a hipótese de Euler-Bernoulli, as seções transversais planas são supostas permanecerem planas e perpendiculares ao eixo da viga. Assim, o ângulo θ passa a ser igual a ϕ e a decomposição (2.13) degenera-se na decomposição polar visto que

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} (1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

verifica agora a relação $\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ (MALVERN, 1969; CHANDRASEKHARAIHAH e DEBNATH, 1994). Nessas condições, a decomposição (2.13) permite a interpretação de que \mathbf{F} transforma fibras entre as configurações inicial e atual em duas etapas. Na primeira, a viga é conduzida da configuração inicial a uma configuração intermediária com as fibras paralelas ao eixo X alongando-se ou encurtando-se pela ação de $\bar{\mathbf{F}}$, mas nada acontecendo com as fibras paralelas aos eixos Y ou Z . Essa ação seletiva de $\bar{\mathbf{F}}$ sobre as fibras é coerente com a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Na segunda etapa, o conjunto é rigidamente rotacionado da configuração intermediária à configuração atual pela ação de \mathbf{R} . A forma simplificada (2.25) reduz a

$$\epsilon \approx \begin{bmatrix} \sqrt{1 + 2\epsilon_0} - 1 + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta - 1 + Z\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

mostrando que

$$\epsilon_X = e_0 + Z\kappa \quad (2.29)$$

é a única componente não nula do tensor deformação.

2.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A Figura 2.3 mostra a viga, num diagrama de corpo livre, sob carregamento distribuído (por unidade de comprimento na configuração inicial) e nas extremidades, assim como os

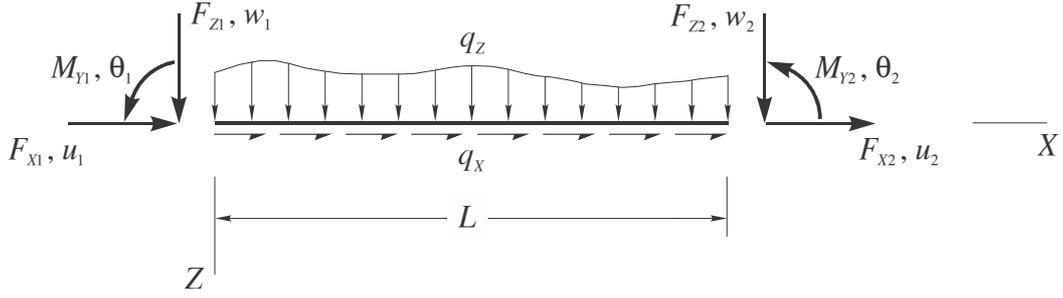


Figura 2.3 Diagrama de corpo livre de uma viga sob carregamento distribuído e nas extremidades.

deslocamentos e rotações nas extremidades. Considerando que a viga tenha seção transversal de área A , a expressão do princípio dos deslocamentos virtuais escreve-se

$$\begin{aligned}
 & - \iiint (S_X \delta \epsilon_X + S_{XY} \delta \gamma_{XY}) dA dx + \int_0^L (q_X \delta u + q_Z \delta w) dx \\
 & + F_{X1} \delta u_1 + F_{X2} \delta u_2 + F_{Z1} \delta w_1 + F_{Z2} \delta w_2 + M_{Y1} \delta \theta_1 + M_{Y2} \delta \theta_2 = 0
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde a tensão normal S_X e de cisalhamento S_{XY} referem-se ao segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff. O desenvolvimento de

$$\begin{aligned}
 \iiint (S_X \delta \epsilon_X + S_{XY} \delta \gamma_{XY}) dA dx & = \iiint [S_X (\delta e_0 + Z \delta \kappa) + S_{XY} \delta \gamma] dA dx \\
 & = \int_0^L (N \delta e_0 + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dx
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

reduz o princípio a

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L (N \delta e_0 + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dx + \int_0^L (q_X \delta u + q_Z \delta w) dx \\
 & + F_{X1} \delta u_1 + F_{X2} \delta u_2 + F_{Z1} \delta w_1 + F_{Z2} \delta w_2 + M_{Y1} \delta \theta_1 + M_{Y2} \delta \theta_2 = 0
 \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde

$$N = \int_A S_X dA \quad M = \int_A S_X Z dA \quad Q = \int_A S_{XY} dA \quad (2.33)$$

são a força normal, momento fletor e força cortante que atuam numa seção transversal.

O uso de

$$\begin{aligned}
 \delta e_0 & = \cos \theta \delta u' - \sin \theta \delta w' - [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] \delta \theta \\
 \delta \kappa & = \delta \theta' \\
 \delta \gamma & = \sin \theta \delta u' + \cos \theta \delta w' + [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \delta \theta
 \end{aligned} \quad (2.34)$$

conduz a

$$\begin{aligned} & \int_0^L (N \delta e_0 + M \delta \kappa + Q \delta \gamma) dx \\ &= \int_0^L \{ (N \cos \theta + Q \sin \theta) \delta u' - (N \sin \theta - Q \cos \theta) \delta w' + M \delta \theta' \\ & \quad - \{ N [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] - Q [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \} \delta \theta \} dx. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo as integrações por partes

$$\begin{aligned} \int_0^L (N \cos \theta + Q \sin \theta) \delta u' dx &= \int_0^L [(N \cos \theta + Q \sin \theta) \delta u]' dx - \int_0^L (N \cos \theta + Q \sin \theta)' \delta u dx \\ &= (N \cos \theta + Q \sin \theta) \delta u|_0^L - \int_0^L (N \cos \theta + Q \sin \theta)' \delta u dx \\ \int_0^L (N \sin \theta - Q \cos \theta) \delta w' dx &= \int_0^L [(N \sin \theta - Q \cos \theta) \delta w]' dx - \int_0^L (N \sin \theta - Q \cos \theta)' \delta w dx \\ &= (N \sin \theta - Q \cos \theta) \delta w|_0^L - \int_0^L (N \sin \theta - Q \cos \theta)' \delta w dx \\ \int_0^L M \delta \theta' dx &= \int_0^L (M \delta \theta)' dx - \int_0^L M' \delta \theta dx \\ &= M \delta \theta|_0^L - \int_0^L M' \delta \theta dx, \end{aligned} \quad (2.36)$$

a expressão (2.32) toma a forma

$$\begin{aligned} & \int_0^L \{ [(N \cos \theta + Q \sin \theta)' + q_X] \delta u - [(N \sin \theta - Q \cos \theta)' - q_Z] \delta w \\ & \quad + \{ M' + N [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] - Q [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \} \delta \theta \} dx \\ & + [N \cos \theta + Q \sin \theta + F_{X1}] \delta u_1 - [N \cos \theta + Q \sin \theta - F_{X2}] \delta u_2 \\ & - [N \sin \theta - Q \cos \theta - F_{Z1}] \delta w_1 + [N \sin \theta - Q \cos \theta + F_{Z2}] \delta w_2 \\ & + (M + M_{Y1}) \delta \theta_1 - (M - M_{Y2}) \delta \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Em $0 < X < L$ as quantidades δu , δw e $\delta \theta$ são arbitrárias e independentes. Em $X = 0$, L um deslocamento virtual (δu_1 , δw_1 , etc.) é nulo se o correspondente deslocamento real for conhecido ($u_1 = \bar{u}_1$, $w_1 = \bar{w}_1$, etc.); caso contrário, é arbitrário e independente dos demais deslocamentos. Portanto, do lema fundamental do cálculo variacional identificamos

as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} (N \cos \theta + Q \sin \theta)' + q_X &= 0 \\ (N \sin \theta - Q \cos \theta)' - q_Z &= 0 \\ M' + N[(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] - Q[(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

que devem ser satisfeitas em cada ponto do domínio $0 < X < L$. Identificamos também as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_1 = \bar{u}_1 \quad \text{ou} \quad N \cos \theta + Q \sin \theta &= -F_{X1} \\ w_1 = \bar{w}_1 \quad \text{ou} \quad N \sin \theta - Q \cos \theta &= F_{Z1} \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 \quad \text{ou} \quad M &= -M_{Y1} \quad \text{em} \quad X = 0 \\ \\ u_2 = \bar{u}_2 \quad \text{ou} \quad N \cos \theta + Q \sin \theta &= F_{X2} \\ w_2 = \bar{w}_2 \quad \text{ou} \quad N \sin \theta - Q \cos \theta &= -F_{Z2} \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 \quad \text{ou} \quad M &= M_{Y2} \quad \text{em} \quad X = L. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Para um material homogêneo, isotrópico e elástico linear, as duas componentes ϵ_X e γ_{XZ} da deformação (as únicas de interesse para a construção da teoria) assim se escrevem em termos das tensões:

$$\epsilon_X = \frac{1}{E} [S_X - \nu (S_Y + S_Z)] \quad \gamma_{XZ} = \frac{S_{XZ}}{G} \quad (2.40)$$

onde E e G são os módulos de Young e de cisalhamento. Desprezando-se em ϵ_X a contribuição de S_Y e S_Z em relação à contribuição de S_X , conforme evidências experimentais com vigas,

$$S_X = E\epsilon_X \quad S_{XZ} = G\gamma_{XZ}. \quad (2.41)$$

Substituindo em (2.33),

$$\begin{aligned} N &= \int_A S_X dA = \int_A E\epsilon_X dA = \int_A E(e_0 + Z\kappa) dA = EAe_0 \\ M &= \int_A S_X Z dA = \int_A E\epsilon_X Z dA = \int_A E(e_0 + Z\kappa) Z dA = EI\kappa \\ Q &= \int_A S_{XZ} dA \approx \int_A KG\gamma_{XZ} dA = KGA\gamma \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde

$$I = \int_A Z^2 dA \quad (2.43)$$

é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo Y , K é o fator de correção do cisalhamento transversal e $\int_A Z dA = 0$ por considerar a origem do sistema XYZ no centróide da seção. Com a hipótese de Euler-Bernoulli, a equação constitutiva $Q = KGA\gamma$ deve ser eliminada.

Empregando um procedimento distinto do que é adotado neste capítulo, HJELMSTAD (2005) obtém a mesma teoria de Timoshenko aqui apresentada.

Capítulo 3

Formulação de Elementos Finitos

Os campos u , w e θ são independentes numa viga de Timoshenko. Os termos de contorno em (2.34) mostram que u , w e θ são também as variáveis primárias da forma fraca (2.30), devendo ser contínuas entre elementos numa malha de elementos finitos (REDDY, 2006). O elemento finito T de dois nós desenvolvido neste capítulo a partir de (2.30) usa polinômios lineares nas aproximações de u , w e θ . Uma excelente discussão teórica sobre este elemento é dada por FELIPPA (2014).

A hipótese de Euler-Bernoulli introduz a dependência

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{w'}{1 + u'} \quad (3.1)$$

entre u , w e θ (veja equação (2.10) para $\phi = \theta$), continuando essas quantidades como variáveis primárias na correspondente forma fraca a ser apresentada na Seção 3.2. Quando o problema é linear, a continuidade de θ entre elementos é facilmente atendida visto que a dependência degenera-se em algo simples como $\theta = -w'$. Por outro lado, satisfazer a continuidade dessa variável para grandes rotações é complicado, constituindo-se numa desvantagem da formulação lagrangiana total neste caso. O elemento finito EB de três nós desenvolvido neste capítulo satisfaz todas as continuidades exigidas usando aproximações quadrática e cúbica para u e w , respectivamente (NANAKORN e VU, 2006).

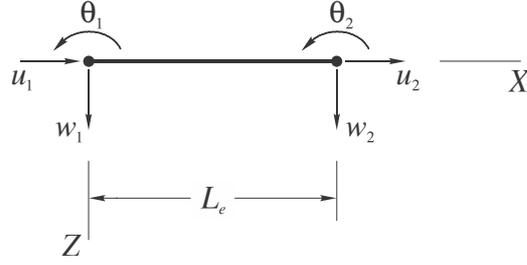


Figura 3.1 Deslocamentos nodais do elemento T no sistema local XZ .

3.1 ELEMENTO T

Pela ordem de derivação de $u(X)$, $w(X)$ e $\theta(X)$ em (2.30), essas variáveis podem ser aproximadas pelos polinômios simples de primeiro grau

$$u(X) = a_0 + a_1X \quad w(X) = b_0 + b_1X \quad \theta(X) = c_0 + c_1X. \quad (3.2)$$

Os coeficientes a_i podem ser expressos em função dos valores nodais de u indicados na Figura 3.1:

$$u(0) = u_1 \quad u(L_e) = u_2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = u_1 \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L_e}. \quad (3.3)$$

Ou seja,

$$u(X) = \left(1 - \frac{X}{L_e}\right) u_1 + \frac{X}{L_e} u_2. \quad (3.4)$$

Procedendo de maneira análoga,

$$w(X) = \left(1 - \frac{X}{L_e}\right) w_1 + \frac{X}{L_e} w_2 \quad \theta(X) = \left(1 - \frac{X}{L_e}\right) \theta_1 + \frac{X}{L_e} \theta_2. \quad (3.5)$$

Em vista de

$$\begin{aligned} \delta e_0 &= \cos \theta \delta u' - \sin \theta \delta w' - [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] \delta \theta \\ \delta \kappa &= \delta \theta' \\ \delta \gamma &= \sin \theta \delta u' + \cos \theta \delta w' + [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \delta \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \int_0^{L_e} N \delta e_0 dx &= \int_0^{L_e} N \{ \cos \theta \delta u' - \sin \theta \delta w' - [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] \delta \theta \} dx \\ \int_0^{L_e} M \delta \kappa dx &= \int_0^{L_e} M \delta \theta' dx \\ \int_0^{L_e} Q \delta \gamma dx &= \int_0^{L_e} Q \{ \sin \theta \delta u' + \cos \theta \delta w' + [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \delta \theta \} dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $N = EAe_0$, $M = EI\kappa$ e $Q = KGA\gamma$.

Se os deslocamentos e reações nodais do elemento são ordenados segundo

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2]^T \\ \mathbf{f} &= [F_{X1} \quad F_{Z1} \quad M_{Y1} \quad F_{X2} \quad F_{Z2} \quad M_{Y2}]^T, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a definição

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \left[\frac{\partial u}{\partial u_1} \quad \frac{\partial u}{\partial w_1} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial u}{\partial u_2} \quad \frac{\partial u}{\partial w_2} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right]^T \\ &= \left[1 - \frac{X}{L_e} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{X}{L_e} \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ \mathbf{N}_w &= \left[\frac{\partial w}{\partial u_1} \quad \frac{\partial w}{\partial w_1} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial w}{\partial u_2} \quad \frac{\partial w}{\partial w_2} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta_2} \right]^T \\ &= \left[0 \quad 1 - \frac{X}{L_e} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{X}{L_e} \quad 0 \right]^T \\ \mathbf{N}_\theta &= \left[\frac{\partial \theta}{\partial u_1} \quad \frac{\partial \theta}{\partial w_1} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial w_2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} \right]^T \\ &= \left[0 \quad 0 \quad 1 - \frac{X}{L_e} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{X}{L_e} \right]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

permite escrever

$$\begin{aligned} \delta u &= \mathbf{N}_u^T \delta \mathbf{d} & \delta u' &= \mathbf{N}'_u \delta \mathbf{d} \\ \delta w &= \mathbf{N}_w^T \delta \mathbf{d} & \delta w' &= \mathbf{N}'_w \delta \mathbf{d} \\ \delta \theta &= \mathbf{N}_\theta^T \delta \mathbf{d} & \delta \theta' &= \mathbf{N}'_\theta \delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

As expressões (3.7) reduzem-se a

$$\begin{aligned} \int_0^{L_e} N \delta e_0 dx &= \delta \mathbf{d}^T \int_0^{L_e} N \{ \cos \theta \mathbf{N}'_u - \sin \theta \mathbf{N}'_w - [(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta] \mathbf{N}_\theta \} dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_N(\mathbf{d}) \\ \int_0^{L_e} M \delta \kappa dx &= \delta \mathbf{d}^T \int_0^{L_e} M \mathbf{N}'_\theta dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_M(\mathbf{d}) \\ \int_0^{L_e} Q \delta \gamma dx &= \delta \mathbf{d}^T \int_0^{L_e} Q \{ \sin \theta \mathbf{N}'_u + \cos \theta \mathbf{N}'_w + [(1 + u') \cos \theta - w' \sin \theta] \mathbf{N}_\theta \} dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_Q(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e o princípio dos deslocamentos virtuais (2.30) torna-se

$$\delta \mathbf{d}^T \left[-\mathbf{f}_N(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_M(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_Q(\mathbf{d}) + \int_0^{L_e} (q_X \mathbf{N}_u + q_Z \mathbf{N}_w) dx + \mathbf{f} \right] = 0. \quad (3.12)$$

Admitindo que as componentes de $\delta \mathbf{d}$ sejam arbitrárias e independentes, obtemos da expressão anterior

$$\Psi(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

onde

$$\Psi(\mathbf{d}) = -\mathbf{f}_N(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_M(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_Q(\mathbf{d}) + \int_0^{L_e} (q_X \mathbf{N}_u + q_Z \mathbf{N}_w) dx + \mathbf{f}. \quad (3.14)$$

O sistema de seis equações não lineares (3.13) representa o equilíbrio das forças nodais internas e externas associadas aos seis parâmetros nodais d_i . Se o sistema não é satisfeito por \mathbf{d} para um dado carregamento, correções $\Delta \mathbf{d}$ podem ser obtidas pelo método de Newton-Raphson (ZIENKIEWICZ et al., 2013). Nesse método, o vetor das forças nodais desequilibradas

$$\Psi(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}) = \Psi(\mathbf{d}) + \Delta \Psi(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

é forçado a ser nulo e

$$\Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{k} \Delta \mathbf{d}. \quad (3.16)$$

O sistema não linear (3.13) do elemento é então substituído pela forma linear

$$\mathbf{k} \Delta \mathbf{d} = -\Psi(\mathbf{d}) = \Delta \mathbf{f} \quad (3.17)$$

a ser usada num processo iterativo. Por uma questão de ênfase, $\Psi(\mathbf{d})$ é denominado $-\Delta \mathbf{f}$ para lembrar que são forças nodais desequilibradas. O vetor

$$\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d} \quad (3.18)$$

é corrigido a cada iteração, assim como a matriz de rigidez tangente

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}}. \quad (3.19)$$

Numa forma expandida, o sistema linear (3.17) escreve-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial u_1} & \frac{\partial \Psi_6}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_6}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta \theta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

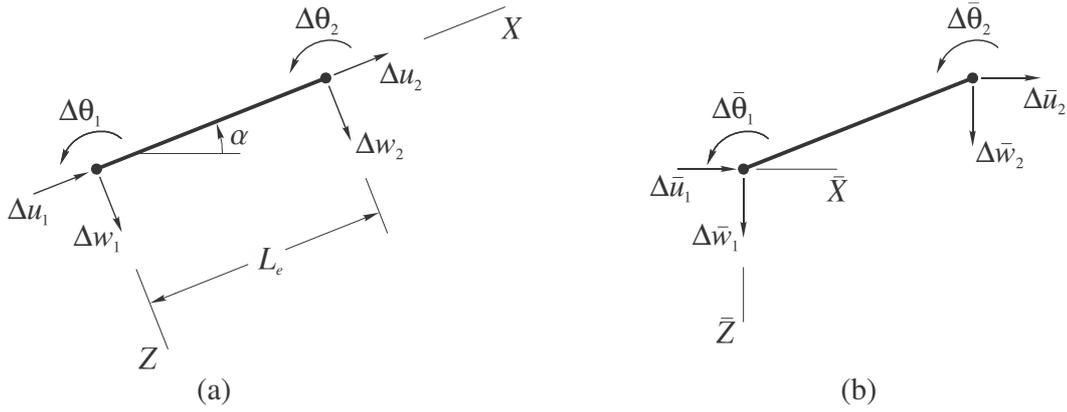


Figura 3.2 Incrementos dos deslocamentos nodais do elemento T no sistema: (a) local XZ ; (b) global $\bar{X}\bar{Z}$.

Para uma dada iteração do método de Newton-Raphson, o sistema linear de toda a estrutura pode ser obtida das contribuições de cada elemento, após expressar a equação matricial (3.17) no sistema global $\bar{X}\bar{Z}$ comum a todos os elementos. Usando a notação da Figura 3.2, os incrementos $\Delta \mathbf{d}$ e $\Delta \mathbf{f}$ no sistema local XY relacionam-se aos incrementos $\Delta \bar{\mathbf{d}}$ e $\Delta \bar{\mathbf{f}}$ no sistema global $\bar{X}\bar{Z}$ por meio de

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad \Delta \mathbf{f} = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{f}}. \quad (3.21)$$

Considerando que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

é ortogonal, a matriz de rigidez nos dois sistemas relacionam-se por

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}. \quad (3.23)$$

O vetor $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ pode ser obtido de maneira exata usando apenas um ponto de integração de Gauss. Mostraremos numericamente no próximo capítulo que o elemento possui um suave travamento de membrana e um travamento de cisalhamento transversal mais acentuado. Ambos podem ser aliviados usando um ponto de integração de Gauss (integração reduzida) na avaliação dos vetores $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$.

A suavidade do travamento de membrana pode ser antecipada analisando a expressão de e_0 dada em (2.26):

$$e_0 = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \cos(\theta - \phi) - 1. \quad (3.24)$$

Para pequenas deformações $\theta \approx \phi$, o que torna a expressão

$$e_0 \approx \sqrt{1 + 2\epsilon_0} - 1. \quad (3.25)$$

A restrição $e_0 \rightarrow 0$ implica $\epsilon_0 \rightarrow 0$ e vice-versa. A substituição das aproximações (3.2) em ϵ_0 (veja expressão (2.6)) conduz a

$$\epsilon_0 = a_1 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2), \quad (3.26)$$

mostrando que o campo de deslocamento adotado pode atender à restrição $e_0 \rightarrow 0$ sem necessariamente zerar nenhum coeficiente.

A maior intensidade do travamento de cisalhamento transversal pode também ser antecipada analisando a expressão de γ dada em (2.26):

$$\gamma = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \operatorname{sen}(\theta - \phi). \quad (3.27)$$

Se as deformações são pequenas ($\theta \approx \phi$ e $\epsilon_0 \rightarrow 0$), então

$$\gamma \approx \theta - \phi. \quad (3.28)$$

A substituição das aproximações (3.2) resulta em

$$\gamma = c_0 + \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_1}{1 + a_1} + c_1 X, \quad (3.29)$$

onde a expressão (2.10) é levada em conta. Nos problemas em que $\gamma \rightarrow 0$, o coeficiente de X e o coeficiente independente dele devem anular-se. Para anular o coeficiente de X , a restrição $c_1 \rightarrow 0$ é naturalmente introduzida na solução do problema tornando a curvatura efetivamente nula e, conseqüentemente, enrijecendo o elemento.

3.2 ELEMENTO EB

A remoção do trabalho interno realizado pela força cortante da expressão (2.30) resulta em

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L_e} (N \delta e_0 + M \delta \kappa) dx + \int_0^{L_e} (q_X \delta u + q_Z \delta w) dx \\ & + F_{X1} \delta u_1 + F_{X2} \delta u_2 + F_{Z1} \delta w_1 + F_{Z2} \delta w_2 + M_{Y1} \delta \theta_1 + M_{Y2} \delta \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

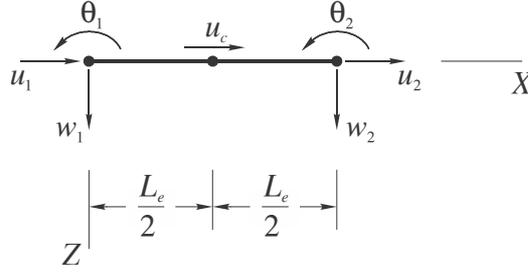


Figura 3.3 Deslocamentos nodais do elemento EB no sistema local XZ .

que é o princípio dos deslocamentos virtuais da teoria de Euler-Bernoulli. Lembramos que

$$e_0 = (1 + u') \cos \theta - w' \operatorname{sen} \theta - 1 \quad \kappa = \theta' \quad (3.31)$$

são os mesmos da teoria de Timoshenko e que existe a dependência (3.1) entre u , w e θ .

Pela ordem de derivação de $u(X)$ e $w(X)$ em (3.30), essas variáveis precisam ser aproximadas por polinômios, no mínimo, quadráticos. NANAKORN e VU (2006) propõem que $u(X)$ e $w(X)$ sejam aproximados por polinômios quadrático e cúbico, respectivamente:

$$\begin{aligned} u(X) &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \\ w(X) &= b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os coeficientes a_i e b_i podem ser expressos em função dos valores nodais de u , w e θ indicados na Figura 3.3:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0) = a_0 \\ w_1 &= w(0) = b_0 \\ \theta_1 &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{-w'(0)}{1 + u'(0)} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-b_1}{1 + a_1} \\ \\ u_2 &= u(L_e) = a_0 + a_1 L_e + a_2 L_e^2 \\ w_2 &= w(L_e) = b_0 + b_1 L_e + b_2 L_e^2 + b_3 L_e^3 \\ \theta_2 &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{-w'(L_e)}{1 + u'(L_e)} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-b_1 - 2b_2 L_e - 3b_3 L_e^2}{1 + a_1 + 2a_2 L_e} \\ \\ u_c &= u\left(\frac{L_e}{2}\right) = a_0 + a_1 \frac{L_e}{2} + a_2 \frac{L_e^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Resolvendo o sistema (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= u_1 \\
a_1 &= -\frac{1}{L_e} (3u_1 - 4u_c + u_2) \\
a_2 &= \frac{2}{L_e^2} (u_1 - 2u_c + u_2) \\
\\
b_0 &= w_1 \\
b_1 &= -\frac{1}{L_e} (L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 \\
b_2 &= -\frac{1}{L_e^2} [3(w_1 - w_2) - 2(L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 - (L_e + u_1 - 4u_c + 3u_2) \operatorname{tg} \theta_2] \\
b_3 &= \frac{1}{L_e^3} [2(w_1 - w_2) - (L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 - (L_e + u_1 - 4u_c + 3u_2) \operatorname{tg} \theta_2]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
u(X) &= u_1 - (3u_1 - 4u_c + u_2) \frac{X}{L_e} + 2(u_1 - 2u_c + u_2) \frac{X^2}{L_e^2} \\
w(X) &= w_1 - (L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 \frac{X}{L_e} \\
&\quad - [3(w_1 - w_2) - 2(L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 - (L_e + u_1 - 4u_c + 3u_2) \operatorname{tg} \theta_2] \frac{X^2}{L_e^2} \\
&\quad + [2(w_1 - w_2) - (L_e - 3u_1 + 4u_c - u_2) \operatorname{tg} \theta_1 - (L_e + u_1 - 4u_c + 3u_2) \operatorname{tg} \theta_2] \frac{X^3}{L_e^3}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Note que as aproximações $u(X)$ e $w(X)$ são singulares para ângulos $\theta_i = \pm (2k - 1) \pi/2$ onde $k = 1, 2, \dots$. É possível mostrar que a troca da aproximação cúbica de $w(X)$ por uma quadrática tem a vantagem de remover o nó central, mas conduz a singularidades bem mais severas.

Derivando ambos os membros de (3.1) em relação a X ,

$$\frac{\theta'}{\cos^2 \theta} = \frac{u''w' - (1 + u') w''}{(1 + u')^2}, \tag{3.36}$$

e aplicando (2.10) para $\phi = \theta$, obtemos

$$\theta' = \frac{u''w' - (1 + u') w''}{1 + 2\epsilon_0}. \tag{3.37}$$

Sabendo-se que e_0 é dado por (2.26) com $\theta = \phi$ e que $\kappa = \theta'$, então

$$\begin{aligned}\delta e_0 &= \frac{1+u'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}}\delta u' + \frac{w'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}}\delta w' \\ \delta \kappa &= \frac{(1+u')[(1+u')w'' - 2u''w'] - w'^2w''}{(1+2\epsilon_0)^2}\delta u' + \frac{w'}{1+2\epsilon_0}\delta u'' \\ &\quad + \frac{(1+u')[(1+u')u'' + 2w'w''] - u''w'^2}{(1+2\epsilon_0)^2}\delta w' - \frac{1+u'}{1+2\epsilon_0}\delta w''.\end{aligned}\quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^{L_e} N \delta e_0 dx &= \int_0^{L_e} (A_1 \delta u' + A_2 \delta w') dx \\ \int_0^{L_e} M \delta \kappa dx &= \int_0^{L_e} (B_1 \delta u' + B_2 \delta u'' + B_3 \delta w' + B_4 \delta w'') dx\end{aligned}\quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1+u'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}}N & A_2 &= \frac{w'}{\sqrt{1+2\epsilon_0}}N \\ B_1 &= \frac{(1+u')[(1+u')w'' - 2u''w'] - w'^2w''}{(1+2\epsilon_0)^2}M & B_2 &= \frac{w'}{1+2\epsilon_0}M \\ B_3 &= \frac{(1+u')[(1+u')u'' + 2w'w''] - u''w'^2}{(1+2\epsilon_0)^2}M & B_4 &= -\frac{1+u'}{1+2\epsilon_0}M.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Se os deslocamentos e reações nodais do elemento são ordenados segundo

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad u_c]^T \\ \mathbf{f} &= [F_{X1} \quad F_{Z1} \quad M_{Y1} \quad F_{X2} \quad F_{Z2} \quad M_{Y2} \quad 0]^T,\end{aligned}\quad (3.41)$$

a definição

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= \left[\frac{\partial u}{\partial u_1} \quad \frac{\partial u}{\partial w_1} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial u}{\partial u_2} \quad \frac{\partial u}{\partial w_2} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial u}{\partial u_c} \right]^T \\ \mathbf{N}_w &= \left[\frac{\partial w}{\partial u_1} \quad \frac{\partial w}{\partial w_1} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial w}{\partial u_2} \quad \frac{\partial w}{\partial w_2} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial w}{\partial u_c} \right]^T\end{aligned}\quad (3.42)$$

permite escrever

$$\begin{aligned}\delta u &= \mathbf{N}_u^T \delta \mathbf{d} & \delta u' &= \mathbf{N}_u'^T \delta \mathbf{d} & \delta u'' &= \mathbf{N}_u''^T \delta \mathbf{d} \\ \delta w &= \mathbf{N}_w^T \delta \mathbf{d} & \delta w' &= \mathbf{N}_w'^T \delta \mathbf{d} & \delta w'' &= \mathbf{N}_w''^T \delta \mathbf{d}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

As expressões (3.39) reduzem-se a

$$\begin{aligned}\int_0^{L_e} N \delta \epsilon_0 dx &= \delta \mathbf{d}^T \int_0^{L_e} (A_1 \mathbf{N}'_u + A_2 \mathbf{N}'_w) dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_N(\mathbf{d}) \\ \int_0^{L_e} M \delta \kappa dx &= \delta \mathbf{d}^T \int_0^{L_e} (B_1 \mathbf{N}'_u + B_2 \mathbf{N}''_u + B_3 \mathbf{N}'_w + B_4 \mathbf{N}''_w) dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_M(\mathbf{d})\end{aligned}\quad (3.44)$$

e o princípio dos deslocamentos virtuais (3.30) torna-se

$$\delta \mathbf{d}^T \left[-\mathbf{f}_N(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_M(\mathbf{d}) + \int_0^{L_e} (q_X \mathbf{N}_u + q_Z \mathbf{N}_w) dx + \mathbf{f} \right] = 0. \quad (3.45)$$

Admitindo que as componentes de $\delta \mathbf{d}$ sejam arbitrárias e independentes, obtemos da expressão acima

$$\Psi(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

onde

$$\Psi(\mathbf{d}) = -\mathbf{f}_N(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_M(\mathbf{d}) + \int_0^{L_e} (q_X \mathbf{N}_u + q_Z \mathbf{N}_w) dx + \mathbf{f}. \quad (3.47)$$

A solução de um problema discretizado com o elemento EB se dá de maneira semelhante à solução com o elemento T. A ausência de $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ remove do problema a possibilidade de travamento de cisalhamento transversal. No entanto, podemos perceber que o elemento apresenta travamento de membrana substituindo as aproximações (3.32) na expressão (2.6):

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= u' + \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) \\ &= a_1 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2) + 2(a_2 + a_1 a_2 + b_1 b_2) X + (2a_2^2 + 2b_2^2 + 3b_1 b_3) X^2 + 6b_2 b_3 X^3 + \frac{9}{2} b_3^2 X^4\end{aligned}\quad (3.48)$$

Nos problemas em que $e_0 \rightarrow 0$, cada coeficiente do polinômio deve anular-se separadamente pois $\epsilon_0 \rightarrow 0$. Para anular o coeficiente de X^4 , a restrição $b_3 \rightarrow 0$ deverá ocorrer naturalmente na solução do problema implicando também na anulação do coeficiente de X^3 . Com $b_3 \rightarrow 0$, o coeficiente de X^2 será nulo para $a_2^2 + b_2^2 \rightarrow 0$ que implica $a_2, b_2 \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, a anulação do coeficiente de X . Portanto, com as restrições

$$a_2, b_2, b_3 \rightarrow 0 \quad (3.49)$$

a deformação e_0 tenderá a zero por meio de coeficientes a_1 e b_1 não nulos mas sob a restrição

$$a_1 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2) \rightarrow 0. \quad (3.50)$$

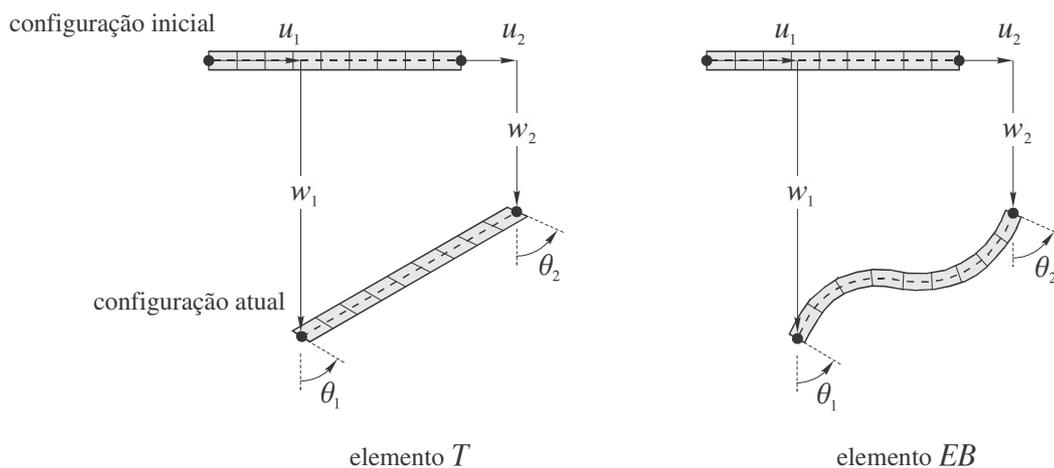


Figura 3.4 Elementos T e EB nas configurações inicial e atual.

Face a (3.49), os deslocamentos $u(X)$ e $w(X)$ passam efetivamente a serem aproximados por polinômios lineares e a curvatura torna-se nula ($u'' = w'' = 0$). Esse travamento de membrana será verificado numericamente no próximo capítulo, e aliviado usando dois pontos de integração de Gauss (integração reduzida) na obtenção de $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$.

A Figura 3.4 mostra os elementos T e EB nas configurações inicial e atual, ilustrando que a independência entre as variáveis u , w e θ no elemento T o faz capaz de ajustar-se à configuração atual mesmo com simples aproximações lineares dessas variáveis.

Capítulo 4

Aplicações Numéricas

Os três exemplos a seguir foram escolhidos por dois motivos: primeiro, possuem solução analítica quando as restrições $e_0 = \gamma = 0$ são introduzidas na teoria apresentada no Capítulo 2, como mostra o Apêndice A; segundo, constituem-se em excelentes testes para avaliar a capacidade dos elementos propostos em lidar com fortes não-linearidades geométricas oriundas de grandes rotações. A trajetória de equilíbrio em cada exemplo é determinada por incrementos de cargas seguidos de iterações do método de Newton-Raphson até que o equilíbrio seja restabelecido.

O critério de convergência utilizado é dado por (COOK *et al.*, 2002)

$$\max(e_D; e_F) \leq 10^{-3} \quad (4.1)$$

onde

$$e_D = \sqrt{\frac{\{\Delta D\}_k^T \{\Delta D\}_k}{\{D\}_{k+1}^T \{D\}_{k+1}}} \quad e_F = \sqrt{\frac{\{\Psi\}_k^T \{\Psi\}_k}{\{F\}^T \{F\}}}. \quad (4.2)$$

A quantidade e_D é a razão entre a norma euclidiana do vetor dos incrementos dos deslocamentos nodais no final de uma iteração k e a do vetor dos deslocamentos nodais após a correção; e_F é a razão entre a norma euclidiana do vetor das forças nodais desequilibradas no final da iteração k e a do vetor das forças nodais externas. Nos casos em que houve indícios de não convergência, dado por um número excessivo de iterações, o processo foi interrompido usando-se, em seguida, um maior número de incrementos.

Para contornar problemas de travamento, os vetores $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$, $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ são todos obtidos com apenas um ponto de integração de Gauss no elemento T, e os vetores $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$

e $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ são obtidos com três e dois pontos de integração de Gauss, respectivamente, no elemento EB (não existe $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$).

4.1 VIGA EM BALANÇO COM CARGA-MOMENTO NA EXTREMIDADE

A viga em balanço da Figura 4.1 talvez seja a estrutura mais utilizada na literatura para testes com grandes rotações. As componentes do deslocamento e a rotação na extremidade livre obtidas por elementos finitos são identificadas por $U = -u(L)$, $W = -w(L)$ e $\Theta = \theta(L)$, e os valores oriundos da solução analítica para $e_0 = \gamma = 0$, obtidos de (A.19) e (A.23), são denotados por U_{exato} , W_{exato} , Θ_{exato} .

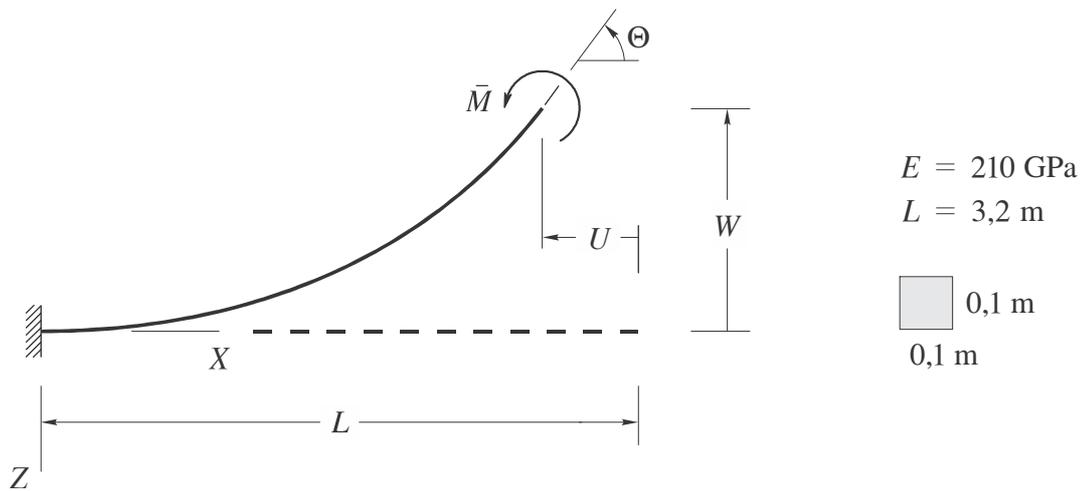


Figura 4.1 Viga em balanço com carga-momento aplicada na extremidade.

A Tabela 4.1 mostra os parâmetros

$$k_u = \frac{U}{U_{\text{exato}}} \quad k_w = \frac{W}{W_{\text{exato}}} \quad k_\theta = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{exato}}}$$

para a viga discretizada em 5 elementos T. Os valores $\bar{M}L/2\pi EI = 0,5; 1; 1,5$ e 2 correspondem na solução analítica à viga deformada em meia volta (semicircunferência), uma volta (circunferência), uma volta e meia, e duas voltas, respectivamente. A tabela também traz o número mínimo Inc_{min} de incrementos necessários à convergência, assim como o número médio $Iter_{\text{med}}$ de iterações por incremento. Os resultados para a malha refinada em 10, 20

e 50 elementos T aparecem nas Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4. A discretização em 50 elementos traz um ganho de precisão insignificativo comparado à discretização em 20 elementos.

Tabela 4.1 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 5 elementos T.

| $\bar{M}L/2\pi EI$ | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 0,5 | 1,000 | 1,017 | 1,000 | 1 | 30,0 |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6 | 9,2 |
| 1,5 | 1,000 | 1,165 | 1,000 | 9 | 9,1 |
| 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 11 | 14,3 |

Tabela 4.2 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 10 elementos T.

| $\bar{M}L/2\pi EI$ | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 0,5 | 1,000 | 1,004 | 1,000 | 3 | 16,0 |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6 | 14,5 |
| 1,5 | 0,999 | 1,038 | 0,999 | 8 | 18,9 |
| 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 12 | 14,0 |

Tabela 4.3 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 20 elementos T.

| $\bar{M}L/2\pi EI$ | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 0,5 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 4 | 11,3 |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 7 | 12,1 |
| 1,5 | 1,000 | 1,009 | 1,000 | 10 | 11,1 |
| 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 13 | 8,4 |

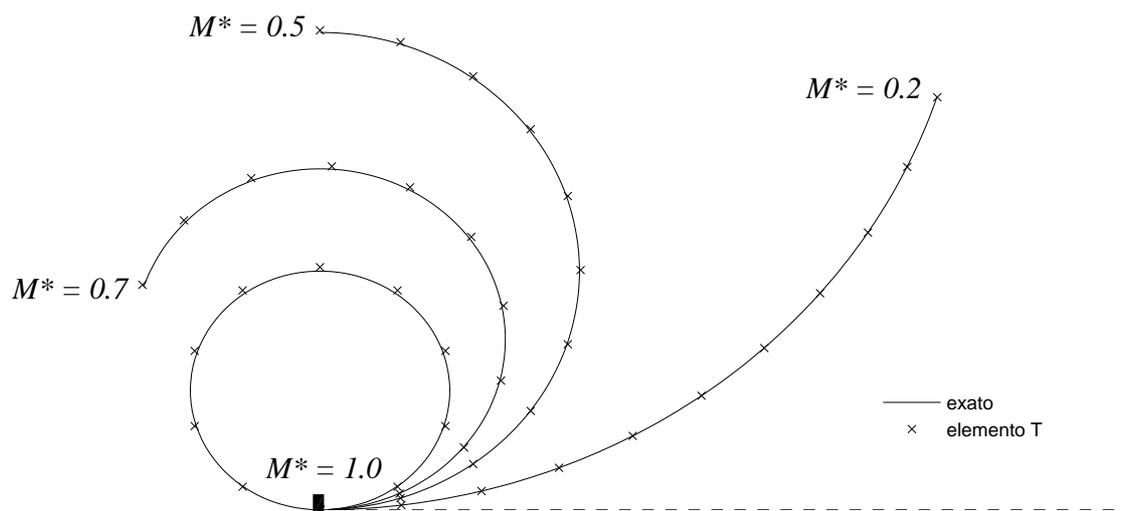


Figura 4.2 Configurações deformadas para a viga discretizada em 10 elementos T para alguns valores de $M^* = \bar{M}L/2\pi EI$.

Tabela 4.4 Viga com carga-momento na extremidade discretizada em 50 elementos T.

| $\bar{M}L/2\pi EI$ | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 0,5 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 3 | 10,3 |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6 | 10,2 |
| 1,5 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 9 | 10,1 |
| 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 12 | 10,1 |

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram a viga deformada para alguns valores de $M^* = \bar{M}L/2\pi EI$ usando uma discretização em 10 e 50 elementos T, respectivamente.

A singularidade do campo de deslocamento do elemento EB para valores nodais $\theta_i =$

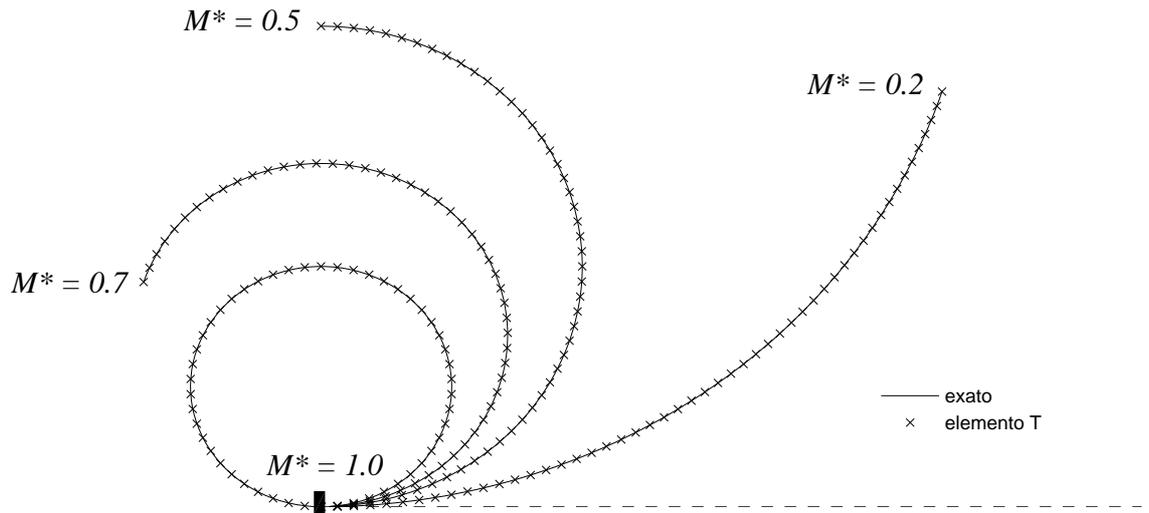


Figura 4.3 Configurações deformadas para a viga discretizada em 50 elementos T para alguns valores de $M^* = \bar{M}L/2\pi EI$.

$\pm(2k-1)\pi/2$ onde $k = 1, 2, \dots$ o impede de ser usado neste exemplo com o algoritmo incremental-iterativo adotado.

4.2 VIGA EM BALANÇO COM CARGA TRANSVERSAL NA EXTREMIDADE

O segundo exemplo é a viga da Figura 4.4. Na avaliação dos parâmetros k_u , k_w e k_θ , os valores de U_{exato} , W_{exato} e Θ_{exato} oriundos da solução analítica para $e_0 = \gamma = 0$ são dados em termos de integrais elípticas de 1ª e 2ª espécies na Seção A.2. Esses valores também aparecem, já em forma tabular, no trabalho de MATTIASSON (1981).

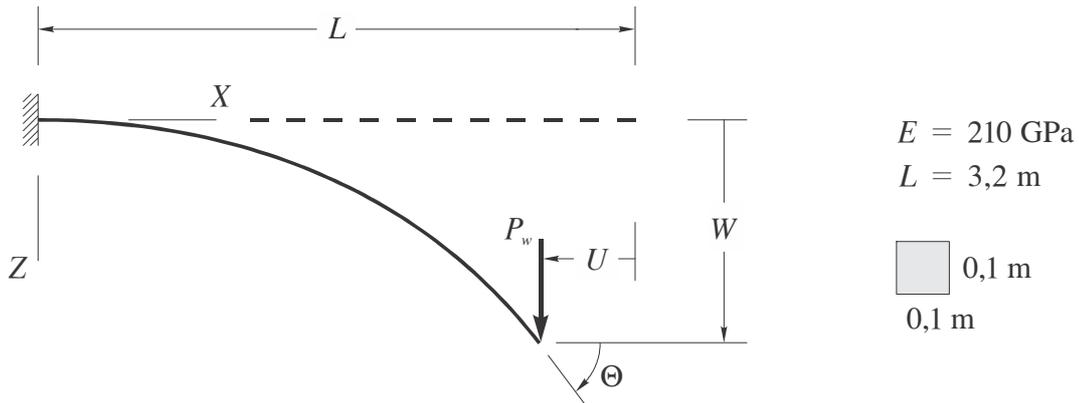


Figura 4.4 Viga em balanço com carga transversal aplicada na extremidade.

Como o elemento EB não apresenta singularidade neste exemplo, aproveitamos para analisar numericamente o travamento de membrana em ambos os elementos T e EB assim como o travamento de cisalhamento transversal no elemento T. À viga discretizada em 5 elementos são atribuídos diversos valores à altura h da seção transversal: $h = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08$ e $0,1$ m, esperando um aumento de travamento para valores menores de h . A carga adotada é de $P_w L^2 / EI = 5$.

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram que o ideal é avaliar os vetores $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$, $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ do elemento T com apenas um ponto de Gauss, enquanto a Figura 4.7 indica que os vetores $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ do elemento EB deveriam ser avaliados com três e dois pontos de Gauss, respectivamente. Adotando o número ideal de pontos de Gauss na integração numérica, obtemos os resultados apresentados nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 para a viga discretizada em 5, 10 e 20 elementos T ou EB. Para malhas menos refinadas, o elemento EB conduz a resultados mais precisos. A Figura 4.8 mostra a viga deformada para alguns valores de $P^* = P_w L^2 / EI$ usando uma discretização em 20 elementos.

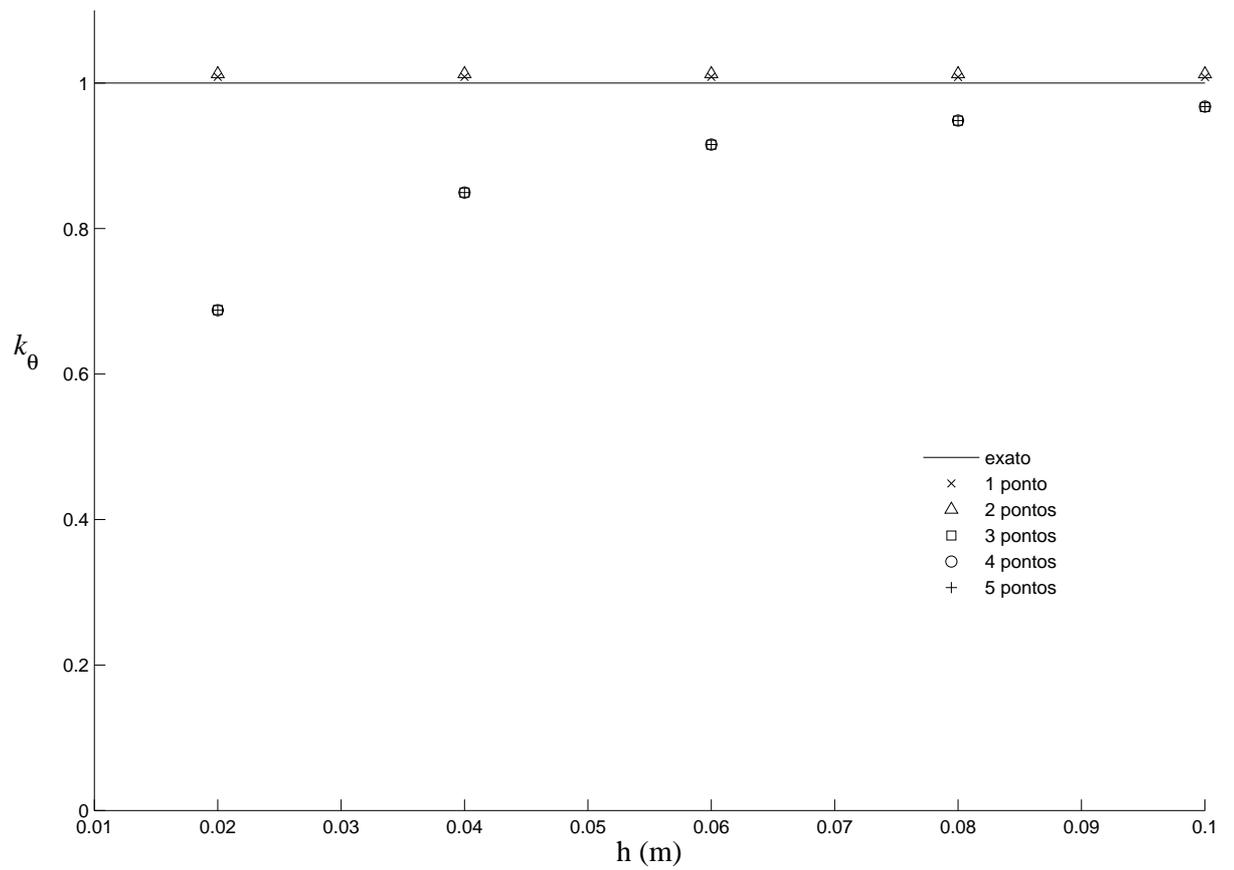


Figura 4.5 Viga modelada em cinco elementos T com um ponto de Gauss em $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$, e diferentes pontos em $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ para $P_w L^2/EI = 5$.

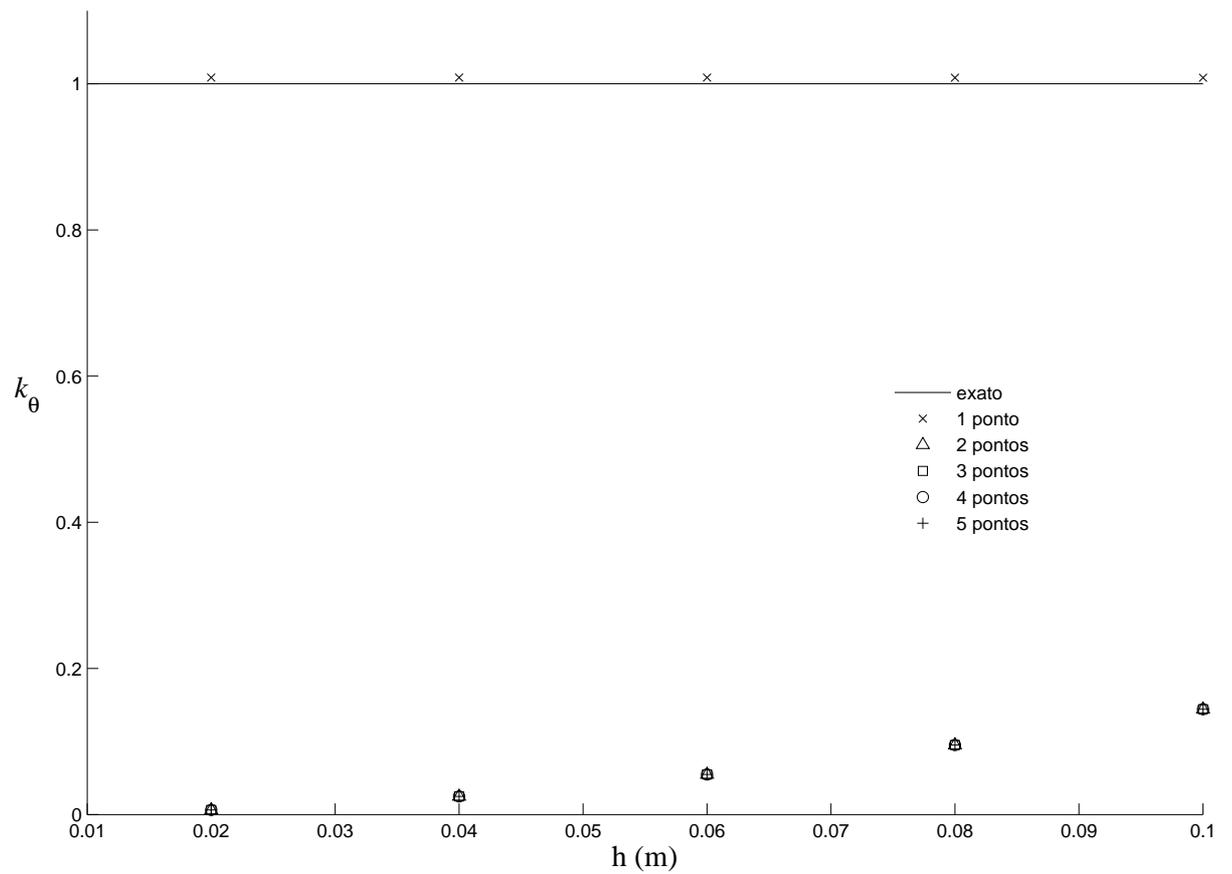


Figura 4.6 Viga discretizada em cinco elementos T com um ponto de Gauss em $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$, e diferentes pontos em $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ para $P_w L^2/EI = 5$.

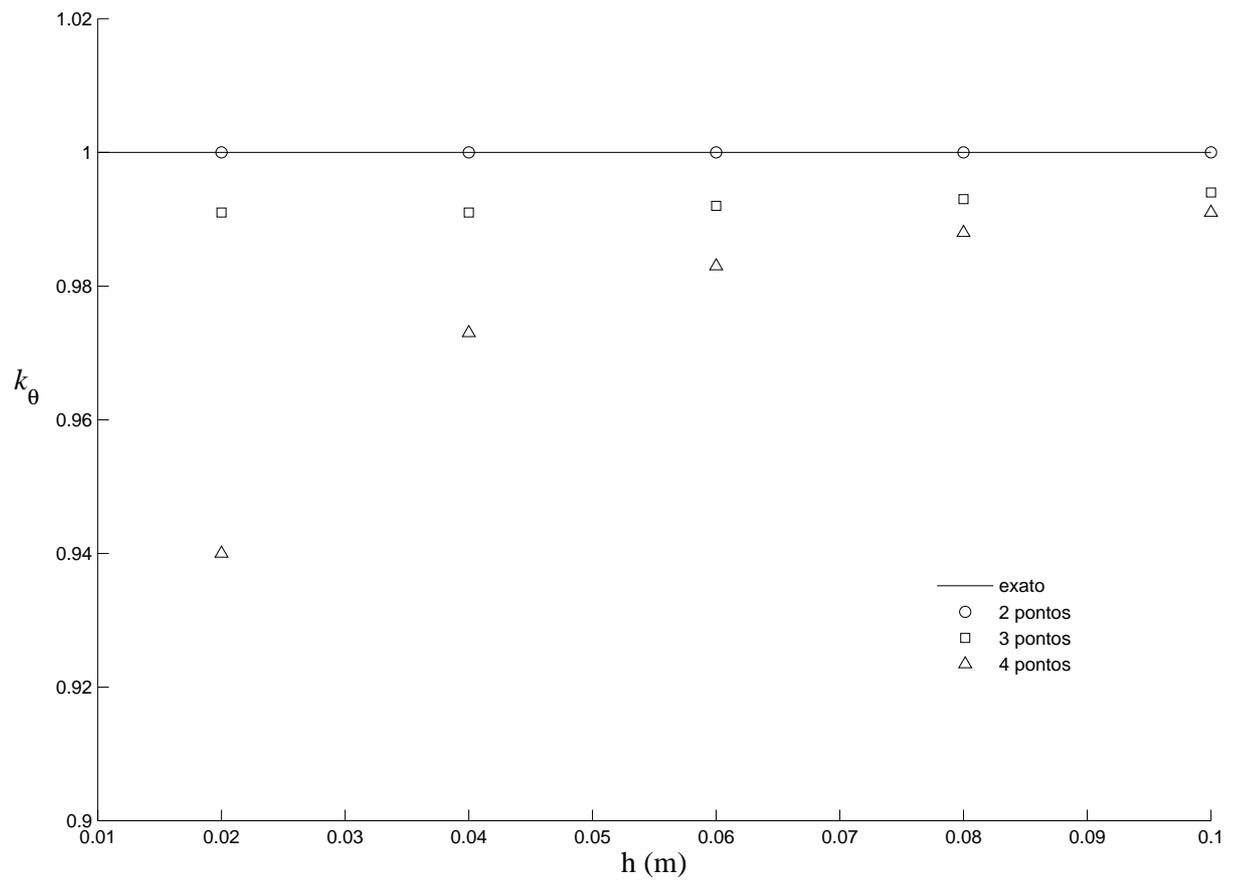


Figura 4.7 Viga discretizada em cinco elementos EB com três pontos de Gauss em $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ e diferentes pontos em $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ para $P_w L^2 / EI = 5$.

Tabela 4.5 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 5 elementos T ou EB.

| PL^2/EI | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|-----------|--------------------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1 | 0,980 [†] | 0,993 | 1,002 | 1 | 7,0 |
| | 1,000 [‡] | 1,000 | 1,000 | 1 | 9,0 |
| 2 | 0,985 | 0,996 | 1,005 | 1 | 13,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1 | 10,0 |
| 3 | 0,988 | 0,997 | 1,006 | 2 | 11,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 2 | 6,5 |
| 4 | 0,990 | 0,998 | 1,008 | 3 | 6,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 3 | 6,0 |
| 5 | 0,991 | 0,999 | 1,008 | 3 | 8,6 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 3 | 7,0 |
| 6 | 0,992 | 0,999 | 1,009 | 4 | 7,0 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 4 | 5,5 |
| 7 | 0,993 | 0,999 | 1,009 | 5 | 5,0 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 5 | 5,2 |
| 8 | 0,993 | 0,999 | 1,009 | 5 | 5,8 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 5 | 5,8 |
| 9 | 0,993 | 0,999 | 1,009 | 6 | 5,6 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 6 | 5,0 |
| 10 | 0,993 | 0,999 | 1,009 | 6 | 5,8 |
| | 0,999 | 1,000 | 1,000 | 7 | 4,9 |

† Elemento T

‡ Elemento EB

Tabela 4.6 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 10 elementos T ou EB.

| PL^2/EI | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|-----------|--------------------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1 | 0,996 [†] | 0,999 | 1,000 | 1 | 7,0 |
| | 1,000 [‡] | 1,000 | 1,000 | 1 | 5,0 |
| 2 | 0,997 | 0,999 | 1,001 | 2 | 6,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1 | 10,0 |
| 3 | 0,997 | 1,000 | 1,001 | 2 | 8,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 2 | 6,0 |
| 4 | 0,998 | 1,000 | 1,002 | 3 | 6,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 3 | 5,6 |
| 5 | 0,998 | 1,000 | 1,002 | 3 | 9,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 6 | 8,0 |
| 6 | 0,998 | 1,000 | 1,002 | 4 | 5,5 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 5 | 4,8 |
| 7 | 0,998 | 1,001 | 1,002 | 5 | 4,8 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 5 | 5,0 |
| 8 | 0,998 | 1,001 | 1,002 | 5 | 5,4 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 6 | 4,8 |
| 9 | 0,999 | 1,001 | 1,002 | 6 | 4,7 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 8 | 4,5 |
| 10 | 0,999 | 1,001 | 1,002 | 6 | 6,0 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 10 | 4,2 |

† Elemento T

‡ Elemento EB

Tabela 4.7 Viga com carga transversal na extremidade discretizada em 20 elementos T ou EB.

| PL^2/EI | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|-----------|--------------------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1 | 0,999 [†] | 1,000 | 1,000 | 1 | 7,0 |
| | 1,000 [‡] | 1,000 | 1,000 | 1 | 6,0 |
| 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1 | 12,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1 | 6,0 |
| 3 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 2 | 8,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 2 | 7,0 |
| 4 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 3 | 6,0 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 2 | 6,0 |
| 5 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 3 | 7,6 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 4 | 5,0 |
| 6 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 4 | 5,5 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 4 | 5,5 |
| 7 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 6 | 4,0 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 4 | 6,0 |
| 8 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 6 | 4,5 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 4 | 5,3 |
| 9 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 6 | 4,7 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 5 | 5,2 |
| 10 | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 8 | 4,8 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,000 | 5 | 5,0 |

† Elemento T

‡ Elemento EB

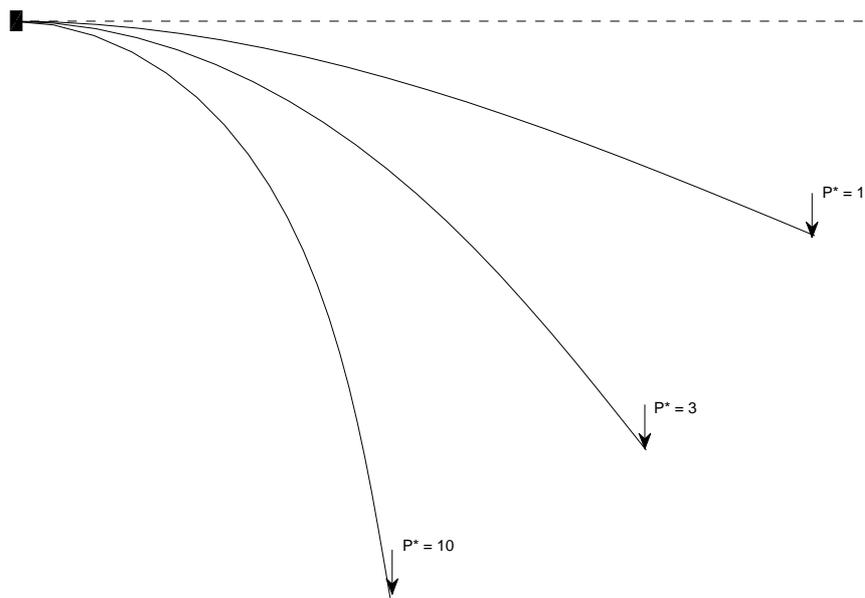


Figura 4.8 Configurações deformadas para a viga discretizada em 20 elementos T ou EB para alguns valores de $P^* = P_w L^2 / EI$.

4.3 BARRA SOB COMPRESSÃO AXIAL

A barra da Figura 4.9 está inicialmente sob compressão axial. Fazendo a carga P_u crescer a partir de zero, a barra permanece vertical até o valor $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$. A partir daí aparecem duas trajetórias de equilíbrio: a barra continua vertical, se não houver nenhuma perturbação (equilíbrio instável), ou a barra se inclina e alcança uma nova forma de equilíbrio estável (THOMPSON e HUNT, 1973).

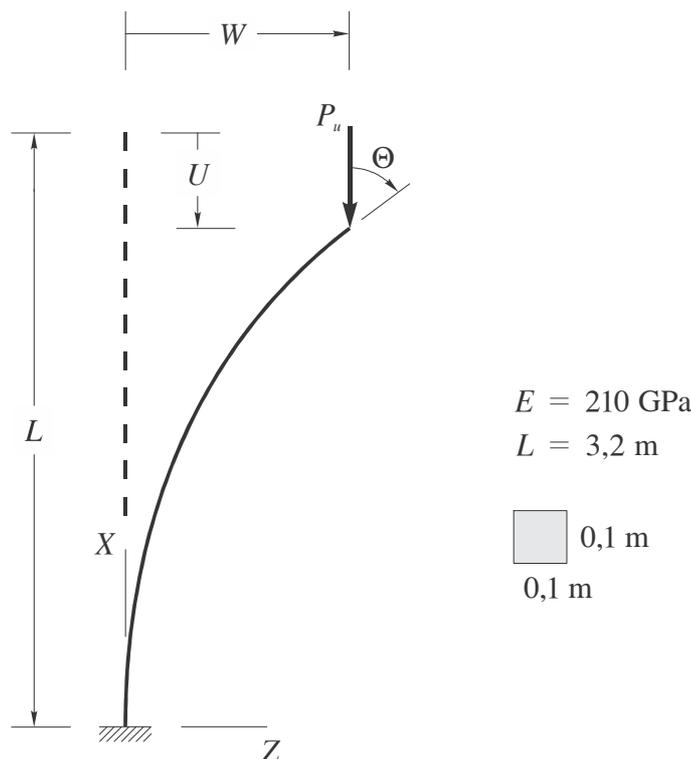


Figura 4.9 Barra sob compressão axial.

Na obtenção da solução por elementos finitos, uma pequena carga-momento é mantida na extremidade livre da barra para simular uma pequena perturbação até o penúltimo incremento, a partir do qual a carga fictícia é removida.

Na avaliação dos parâmetros k_u , k_w e k_θ , os valores de U_{exato} , W_{exato} e Θ_{exato} oriundos da solução analítica para $e_0 = \gamma = 0$ são dados em termos de integrais elípticas de 1ª e 2ª espécies na Seção A.3. Pelo mesmo motivo já exposto no primeiro exemplo, o elemento EB apresenta dificuldade na solução desse problema. As Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 trazem os resultados para a barra discretizada em 5, 10 e 20 elementos T. Os valores de $P_u/P_{cr} = 1,015; 1,294; 2,542; 15,218$ correspondem a $\Theta_{\text{exato}} = 20^\circ; 80^\circ; 140^\circ; 179^\circ$ respectivamente. Não houve

convergência com a malha de 5 elementos e $P_u/P_{cr} = 1,015$ (veja Tabela 4.8). A Figura 4.8 mostra a barra deformada para alguns valores de P_u/P_{cr} usando uma discretização em 20 elementos.

Tabela 4.8 Barra sob compressão axial discretizada em 5 elementos T.

| P_u/P_{cr} | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1,015 | - | - | - | - | - |
| 1,294 | 1,043 | 0,987 | 0,982 | 6 | 6,0 |
| 2,542 | 0,843 | 1,012 | 1,004 | 9 | 6,1 |
| 15,218 | 0,981 | 1,068 | 1,003 | 48 | 2,3 |

Tabela 4.9 Barra sob compressão axial discretizada em 10 elementos T.

| P_u/P_{cr} | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1,015 | 1,008 | 0,861 | 0,858 | 4 | 5,3 |
| 1,294 | 1,010 | 0,998 | 0,996 | 6 | 5,5 |
| 2,542 | 0,966 | 1,003 | 1,001 | 9 | 5,3 |
| 15,218 | 0,996 | 1,016 | 1,001 | 69 | 1,8 |

Tabela 4.10 Barra sob compressão axial discretizada em 20 elementos T.

| P_u/P_{cr} | k_u | k_w | k_θ | Inc_{\min} | $Iter_{\text{med}}$ |
|--------------|-------|-------|------------|--------------|---------------------|
| 1,015 | 1,001 | 0,978 | 0,975 | 2 | 10,5 |
| 1,294 | 1,002 | 1,000 | 0,999 | 6 | 5,5 |
| 2,542 | 0,997 | 1,001 | 1,000 | 9 | 5,3 |
| 15,218 | 1,001 | 1,004 | 1,000 | 49 | 2,3 |

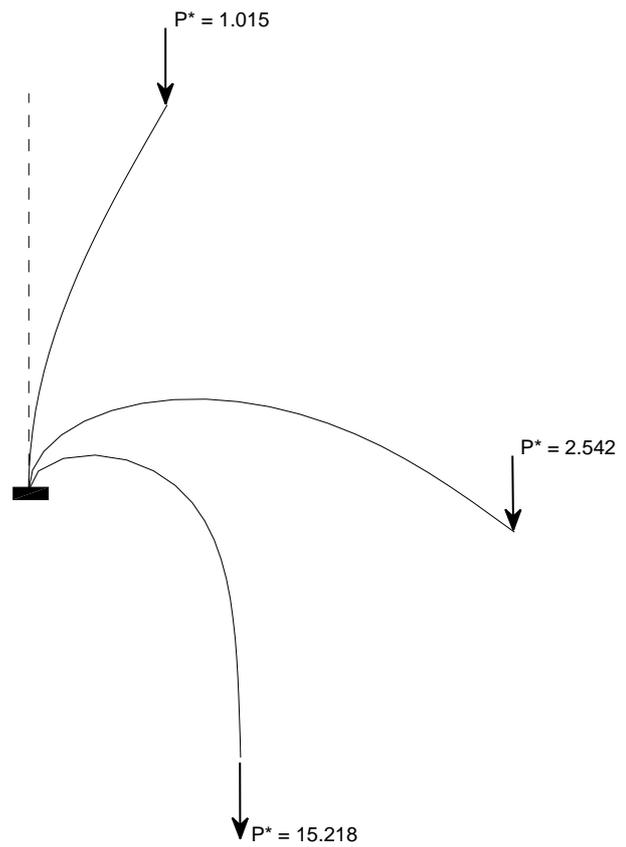


Figura 4.10 Configurações deformadas para a viga discretizada em 20 elementos T para alguns valores de $P^* = P_u/P_{cr}$.

Capítulo 5

Conclusões

Com relação ao elemento T derivado da teoria de Timoshenko com pequenas deformações mas grandes rotações podemos inferir:

- (1) o elemento mostra-se eficiente nos testes numéricos apresentados;
- (2) o vetor $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ do elemento pode ser obtido de maneira exata com apenas um ponto de Gauss. O elemento apresenta um travamento suave de membrana e um travamento mais acentuado de cisalhamento transversal. O alívio do travamento de membrana pode ser conseguido pela integração reduzida de $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ com apenas um ponto de Gauss. Da mesma forma, a integração reduzida de $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ com apenas um ponto de Gauss pode também aliviar o travamento de cisalhamento transversal;
- (3) com o aumento da magnitude da rotação, o elemento requer um maior número de incrementos para reproduzir o equilíbrio da estrutura mas não necessariamente um maior número médio de iterações por incremento.

Com relação ao elemento EB derivado da teoria de Euler-Bernoulli com pequenas deformações mas grandes rotações podemos inferir:

- (1) o elemento tem dificuldades em lidar com problemas envolvendo rotações com valores nodais θ_i próximos de $\pm (2k - 1) \pi/2$ onde $k = 1, 2, \dots$ devido a singularidades em seu campo de deslocamento. Acreditamos que essa dificuldade possa ser mitigada por meio de algoritmos especiais;

- (2) o travamento de membrana apresentado pelo elemento pode ser aliviado por integração reduzida de $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ com dois pontos de Gauss. O vetor $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$ deve ser avaliado com três pontos de Gauss.

Apesar de a teoria de vigas de Timoshenko ser de ordem superior à teoria de Euler-Bernoulli, o desenvolvimento do elemento T se mostra bem mais simples e envolve um menor esforço computacional.

Lembramos que os resultados analíticos dos exemplos apresentados admitem que $\gamma = e_0 = 0$. Como os resultados obtidos por elementos finitos reproduzem tais resultados com excelente precisão, podemos inferir que as contribuições dos vetores $\mathbf{f}_N(\mathbf{d})$ e $\mathbf{f}_Q(\mathbf{d})$ devam ser insignificativas face à contribuição de $\mathbf{f}_M(\mathbf{d})$. Isso pode ser facilmente verificado comparando-se os módulos desses vetores nas configurações de equilíbrio.

Apêndice A

Soluções Analíticas

Da expressão (2.26),

$$\gamma = \sqrt{1 + 2\epsilon_0} \operatorname{sen}(\theta - \phi). \quad (\text{A.1})$$

Se γ for considerada nula, então

$$\theta = \phi \quad (\text{A.2})$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = -\frac{w'}{\sqrt{1 + 2\epsilon_0}} \quad \cos \theta = \frac{1 + u'}{\sqrt{1 + 2\epsilon_0}} \quad (\text{A.3})$$

conforme (2.10). Se e_0 for também considerada nula (ϵ_0 será nula), as expressões (A.3) reduzem-se a

$$\operatorname{sen} \theta = -w' \quad \cos \theta = 1 + u'. \quad (\text{A.4})$$

Ao impor as restrições $\gamma = e_0 = 0$ em (2.9), percebemos que

$$(1 + u') \operatorname{sen} \theta + w' \cos \theta = 0 \quad (1 + u') \cos \theta - w' \operatorname{sen} \theta = 1. \quad (\text{A.5})$$

Com as restrições $\gamma = e_0 = 0$, a única equação constitutiva a sobreviver em (2.42) é

$$M = EI\kappa \quad (\text{A.6})$$

e a única relação deformação-deslocamento a ser considerada em (2.9) será

$$\kappa = \theta'. \quad (\text{A.7})$$

Visto que a equação constitutiva e a relação deformação-deslocamento são funções só de θ , podemos afirmar que as equações de equilíbrio (2.38) poderão ser reduzidas a uma única equação função só de θ .

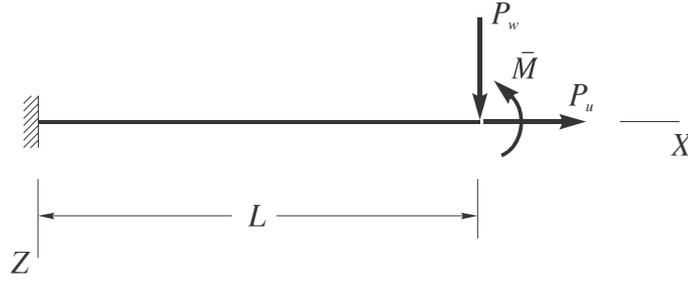


Figura A.1 Viga sob carga aplicada na extremidade $X = L$.

Vamos introduzir (A.5) nas equações de equilíbrio (2.38), considerando que a carga aplicada à viga seja a indicada na Figura A.1:

$$\begin{aligned} (N \cos \theta + Q \operatorname{sen} \theta)' &= 0 \\ (N \operatorname{sen} \theta - Q \cos \theta)' &= 0 \\ M' - Q &= 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Substituindo a última equação nas duas primeiras, obtemos após integração

$$\begin{aligned} N \cos \theta + M' \operatorname{sen} \theta &= C_1 \\ N \operatorname{sen} \theta - M' \cos \theta &= C_2 \end{aligned} \tag{A.9}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. As condições de contorno (2.39) em $X = L$ mostram que

$$\begin{aligned} N \cos \theta + M' \operatorname{sen} \theta &= P_u \\ N \operatorname{sen} \theta - M' \cos \theta &= -P_w. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Ou seja,

$$C_1 = P_u \quad C_2 = -P_w. \tag{A.11}$$

As equações de equilíbrio (A.9) são, portanto, dadas por

$$\begin{aligned} N \cos \theta + M' \operatorname{sen} \theta &= P_u \\ N \operatorname{sen} \theta - M' \cos \theta &= -P_w. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Vamos eliminar N de (A.12) multiplicando a primeira equação por $\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$,

$$\begin{aligned} N \sin \theta \cos \theta + M' \sin^2 \theta &= P_u \sin \theta \\ N \sin \theta \cos \theta - M' \cos^2 \theta &= -P_w \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

subtraindo em seguida a segunda equação resultante dessa operação da primeira:

$$M' = P_u \sin \theta + P_w \cos \theta. \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, a introdução de (A.6) e (A.7) conduz a

$$EI\theta'' - P_u \sin \theta - P_w \cos \theta = 0, \quad (\text{A.15})$$

que é a equação em função de θ a que se reduziu todas as equações de equilíbrio.

A.1 VIGA EM BALANÇO COM CARGA-MOMENTO NA EXTREMIDADE

Vamos considerar que as cargas $P_u = P_w = 0$ na viga da Figura A.1 para reduzir a equação (A.15) a

$$EI\theta'' = 0, \quad (\text{A.16})$$

cuja integração resulta em

$$EI\theta = C_1X + C_2 \quad (\text{A.17})$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Das condições de contorno $\theta(0) = 0$ e $M(L) = \bar{M}$,

$$C_1 = \bar{M} \quad C_2 = 0. \quad (\text{A.18})$$

Portanto,

$$\theta(X) = \frac{\bar{M}X}{EI}. \quad (\text{A.19})$$

Perceba que a barra com EI constante deforma-se para um dado \bar{M} num arco de circunferência de curvatura $\theta' = \bar{M}/EI$.

Com base em (A.19),

$$\frac{d}{dX} = \frac{\bar{M}}{EI} \frac{d}{d\theta}. \quad (\text{A.20})$$

Das relações (A.4),

$$\begin{aligned}\frac{du}{dX} = \cos \theta - 1 &\quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{EI}{\bar{M}} (\cos \theta - 1) \\ \frac{dw}{dX} = -\operatorname{sen} \theta &\quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{d\theta} = -\frac{EI}{\bar{M}} \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}u &= \frac{EI}{\bar{M}} \int (\cos \theta - 1) d\theta + C_3 \\ &= \frac{EI}{\bar{M}} (\operatorname{sen} \theta - \theta) + C_3 \\ w &= -\frac{EI}{\bar{M}} \int \operatorname{sen} \theta d\theta + C_4 \\ &= \frac{EI}{\bar{M}} \cos \theta + C_4.\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Como a condição $u(0) = w(0) = \theta(0) = 0$ implica $C_3 = 0$ e $C_4 = -EI/\bar{M}$, então

$$u(X) = \frac{EI}{\bar{M}} (\operatorname{sen} \theta - \theta) \quad w(X) = \frac{EI}{\bar{M}} (\cos \theta - 1). \quad (\text{A.23})$$

A.2 VIGA EM BALANÇO COM CARGA TRANSVERSAL NA EXTREMIDADE

Vamos considerar que as cargas $P_u = \bar{M} = 0$ na viga da Figura A.1 para reduzir a equação (A.15) a

$$EI\theta'' - P_w \cos \theta = 0. \quad (\text{A.24})$$

A multiplicação da equação por θ' permite escrevê-la na forma

$$EI\theta'\theta'' - P_w\theta' \cos \theta = 0 \quad (\text{A.25})$$

ou

$$\left(\frac{EI}{2} \theta'^2 - P_w \operatorname{sen} \theta \right)' = 0, \quad (\text{A.26})$$

cuja integração resulta em

$$\frac{EI}{2} \theta'^2 - P_w \operatorname{sen} \theta = C_1 \quad (\text{A.27})$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Vamos aplicar a condição de contorno $M(L) = 0$ e admitir que $\theta(L) = \theta_0$ para obter

$$C_1 = -P_w \operatorname{sen} \theta_0. \quad (\text{A.28})$$

Portanto,

$$\frac{EI}{2}\theta'^2 = P_w (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\theta}{dX} \right)^2 = 2\alpha^2 (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0) \quad \alpha^2 = \frac{P_w}{EI}. \quad (\text{A.29})$$

Como θ é sempre negativo para P_w positivo (veja Figura 4.4), vamos por conveniência usar a nova variável $\beta = -\theta$ ($\beta_0 = -\theta_0$) e reescrever a equação acima na forma

$$dX = \frac{d\beta}{\sqrt{2\alpha} \sqrt{\text{sen } \beta_0 - \text{sen } \beta}}, \quad (\text{A.30})$$

onde a escolha do sinal positivo no segundo membro de (A.30) é condizente com o fato de β crescer enquanto X também cresce. A integração pode ser simplificada pela mudança de variável

$$1 + \text{sen } \beta = 2p^2 \text{sen}^2 \omega \quad 1 + \text{sen } \beta_0 = 2p^2. \quad (\text{A.31})$$

Da primeira equação (A.31) escrevemos

$$\cos \beta d\beta = 4p^2 \text{sen } \omega \cos \omega d\omega \quad (\text{A.32})$$

ou

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{4p^2 \text{sen } \omega \cos \omega}{\cos \beta} d\omega \\ &= \frac{4p^2 \text{sen } \omega \cos \omega}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta}} d\omega \\ &= \frac{2p \cos \omega}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Sabendo-se que

$$\text{sen } \beta_0 - \text{sen } \beta = 2p^2 (1 - \text{sen}^2 \omega), \quad (\text{A.34})$$

a equação (A.30) reescreve-se

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha} \sqrt{2p^2 (1 - \text{sen}^2 \omega)}} \frac{2p \cos \omega}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} d\omega \\ &= \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \beta = 0 & \quad \omega = \bar{\omega} = \text{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2p}} & \text{em} & \quad X = 0 \\ \beta = \beta_0 & \quad \omega = \frac{\pi}{2} & \text{em} & \quad X = L, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

a integração de (A.35) resulta em

$$\int_0^L dX = \frac{1}{\alpha} \int_{\bar{\omega}}^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \quad (\text{A.37})$$

ou

$$L = \frac{1}{\alpha} \left(K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - K(\bar{\omega}, p) \right) \quad (\text{A.38})$$

onde

$$K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \quad K(\bar{\omega}, p) = \int_0^{\bar{\omega}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \quad (\text{A.39})$$

são integrais elípticas de 1ª espécie.

Das relações (A.4) e (A.35),

$$\begin{aligned} du &= (\cos\theta - 1) dX \\ &= \left(\sqrt{1 - \text{sen}^2\beta} - 1 \right) \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \\ &= \left(2p\text{sen}\omega\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega} - 1 \right) \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \\ &= \frac{2p\text{sen}\omega}{\alpha} d\omega - \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

cuja integração

$$\int_0^{u(L)} du = \frac{2p}{\alpha} \int_{\bar{\omega}}^{\pi/2} \text{sen}\omega d\omega - \frac{1}{\alpha} \int_{\bar{\omega}}^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}}$$

resulta em

$$U = \frac{1}{\alpha} \left(K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - K(\bar{\omega}, p) \right) - \frac{2p\cos\bar{\omega}}{\alpha} \quad (\text{A.41})$$

onde $u(L) = -U$ (veja Figura 4.4). Em vista da expressão (A.38),

$$U = L - \frac{2p\cos\bar{\omega}}{\alpha}. \quad (\text{A.42})$$

Das relações (A.4) e (A.35),

$$\begin{aligned} dw &= -\text{sen}\theta dX \\ &= \text{sen}\beta \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \\ &= (2p^2\text{sen}^2\omega - 1) \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} \\ &= \frac{1 - 2(1 - p^2\text{sen}^2\omega)}{\alpha\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

cuja integração

$$\int_0^{w(L)} dw = \frac{1}{\alpha} \int_{\bar{\omega}}^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega}} - \frac{2}{\alpha} \int_{\bar{\omega}}^{\pi/2} \sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega} d\omega$$

resulta em

$$W = \frac{1}{\alpha} \left(K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - K(\bar{\omega}, p) \right) - \frac{2}{\alpha} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - E(\bar{\omega}, p) \right) \quad (\text{A.44})$$

onde $w(L) = W$ (veja Figura 4.4) e

$$E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega} d\omega \quad E(\bar{\omega}, p) = \int_0^{\bar{\omega}} \sqrt{1-p^2\text{sen}^2\omega} d\omega \quad (\text{A.45})$$

são integrais elípticas de 2ª espécie. Em vista da expressão (A.38),

$$W = L - \frac{2}{\alpha} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - E(\bar{\omega}, p) \right). \quad (\text{A.46})$$

As integrais elípticas de 1ª e 2ª espécies não podem ser efetuadas numa forma fechada. O *Mathematica* possui funções predefinidas para rápidas avaliações de K e E .

Para calcular a carga P_w e a correspondente posição U e W da extremidade da barra, seguimos o roteiro:

1. escolhemos β_0 ($= \Theta$ conforme a Figura 4.4);
2. avaliamos $p = \sqrt{\frac{1 + \text{sen} \beta_0}{2}}$ e $\bar{\omega} = \text{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2p}}$;
3. avaliamos

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - K(\bar{\omega}, p) \right)$$

e, em seguida,

$$P_w = EI\alpha^2 \quad U = L - \frac{2p \cos \bar{\omega}}{\alpha} \quad W = L - \frac{2}{\alpha} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - E(\bar{\omega}, p) \right).$$

A.3 BARRA SOB COMPRESSÃO AXIAL

Vamos considerar que as cargas $P_w = \bar{M} = 0$ na viga da Figura A.1 para reduzir a equação (A.15) a

$$EI\theta'' - P_u \text{sen} \theta = 0. \quad (\text{A.47})$$

A multiplicação da equação por θ' permite escrevê-la na forma

$$EI\theta'\theta'' - P_u\theta' \text{sen} \theta = 0 \quad (\text{A.48})$$

ou

$$\left(\frac{EI}{2}\theta'^2 + P_u \cos \theta\right)' = 0, \quad (\text{A.49})$$

cujas integração resulta em

$$\frac{EI}{2}\theta'^2 + P_u \cos \theta = C_1 \quad (\text{A.50})$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Vamos aplicar a condição de contorno $M(L) = 0$ e admitir que $\theta(L) = \theta_0$ para obter

$$C_1 = P_u \cos \theta_0. \quad (\text{A.51})$$

Portanto,

$$\frac{EI}{2}\theta'^2 = -P_u (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\theta}{dX}\right)^2 = -2\alpha^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad \alpha^2 = \frac{P_u}{EI}. \quad (\text{A.52})$$

Como na seção anterior, façamos $\beta = -\theta$ ($\beta_0 = -\theta_0$) para reescrever a equação acima na forma

$$\begin{aligned} dX &= \frac{d\beta}{\sqrt{2\alpha}\sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0}} \\ &= \frac{d\beta}{2\alpha\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta}{2}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

onde a escolha do sinal positivo no segundo membro de (A.53) é condizente com o fato de β crescer enquanto X também cresce se a barra flamba para baixo. A integração pode ser simplificada pela mudança de variável

$$\text{sen} \frac{\beta}{2} = p \text{sen} \omega \quad \text{sen} \frac{\beta_0}{2} = p. \quad (\text{A.54})$$

Da primeira equação (A.54),

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\beta}{2} d\beta = p \cos \omega d\omega \quad (\text{A.55})$$

ou

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{2p \cos \omega}{\cos \frac{\beta}{2}} d\omega \\ &= \frac{2p \cos \omega}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \frac{\beta}{2}}} d\omega \\ &= \frac{2p \cos \omega}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Assim,

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{p^2 - p^2\text{sen}^2\omega}} \frac{2p \cos \omega}{\sqrt{1 - p^2\text{sen}^2\omega}} d\omega \\ &= \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1 - p^2\text{sen}^2\omega}}. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \beta = 0 & \quad \omega = 0 & \quad \text{em} \quad X = 0 \\ \beta = \beta_0 & \quad \omega = \frac{\pi}{2} & \quad \text{em} \quad X = L, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

a integração de (A.57) resulta em

$$\int_0^L dX = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - p^2\text{sen}^2\omega}} \quad (\text{A.59})$$

ou

$$L = \frac{1}{\alpha} K\left(\frac{\pi}{2}, p\right). \quad (\text{A.60})$$

Das relações (A.4) e (A.57),

$$\begin{aligned} du &= (\cos \theta - 1) dX \\ &= \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) dX \\ &= -2 \left(1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) dX \\ &= -2p^2 \text{sen}^2 \omega dX \\ &= 2(1 - p^2 \text{sen}^2 \omega - 1) \frac{d\omega}{\alpha\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \\ &= \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega} d\omega - \frac{d\omega}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

cuja integração

$$\int_0^{u(L)} du = \frac{2}{\alpha} \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega} d\omega - \int_0^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \omega}} \right)$$

resulta em

$$U = \frac{2}{\alpha} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) - K\left(\frac{\pi}{2}, p\right) \right) \quad (\text{A.62})$$

onde $u(L) = -U$ (veja Figura 4.9). Em vista da expressão (A.60),

$$U = 2L - \frac{2}{\alpha} E\left(\frac{\pi}{2}, p\right). \quad (\text{A.63})$$

Das relações (A.4) e (A.57),

$$\begin{aligned}
 dw &= -\operatorname{sen} \theta dX \\
 &= \operatorname{sen} \beta dX \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} dX \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}} dX \\
 &= 2p \operatorname{sen} \omega \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \frac{d\omega}{\alpha \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \omega}} \\
 &= \frac{2p}{\alpha} \operatorname{sen} \omega d\omega
 \end{aligned} \tag{A.64}$$

cuja integração

$$\int_0^{w(L)} dw = \frac{2p}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \omega d\omega \tag{A.65}$$

resulta em

$$W = \frac{2p}{\alpha} \tag{A.66}$$

onde $w(L) = W$ (veja Figura 4.9).

Para calcular a carga P_u e a correspondente posição U e W da extremidade da barra, seguimos o roteiro:

1. escolhemos β_0 ($= \Theta$ conforme a Figura 4.9);
2. avaliamos $p = \operatorname{sen} \frac{\beta_0}{2}$;
3. avaliamos

$$\alpha = \frac{1}{L} K\left(\frac{\pi}{2}, p\right)$$

e, em seguida,

$$P_u = EI\alpha^2 \quad U = 2L - \frac{2}{\alpha} E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) \quad W = \frac{2p}{\alpha}.$$

Referências

CESCOTTO, S., FREY, F., and FONDER, G., 1979, Total and updated Lagrangian descriptions in non-linear structural analysis: a unified approach, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, R. Glowinski, E. Y. Rodin, and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley, Chichester, pp. 283-296.

CHANDRASEKHARAIHAH, D. S., and DEBNATH, L., 1994, *Continuum Mechanics*, Academic Press, Boston.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., and WITT, R. J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., John Wiley, New York.

FELIPPA, C. A., 2014, *Nonlinear Finite Element Methods*, <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/>, Chapter 11.

HJELMSTAD, K. D., 2005, *Fundamentals of Structural Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York.

MALVERN, L. E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.

MATTIASSON, K., 1981, Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 145-153.

NANAKORN, P., and VU, L. N., 2006, A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, pp. 1240-1247.

REDDY, J. N., 2006, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

THOMPSON, J. M. T., and HUNT, G. W., 1973, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., and ZHU, J. Z., 2013, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th edn, Elsevier, Amsterdam.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

| | | | |
|--|---|--|--|
| ^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TC</p> | ^{2.} DATA <p style="text-align: center;">23 de novembro de 2015</p> | ^{3.} REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/TC-059/2015</p> | ^{4.} N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">61</p> |
| ^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Vigas sob pequenas deformações mas grandes rotações.</p> | | | |
| ^{6.} AUTOR(ES): <p>Rodrigo Raimundo Freitas Santos</p> | | | |
| ^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p> | | | |
| ^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Vigas , Timoshenko, Não linear, Grandes Rotações.</p> | | | |
| ^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Vigas(suportes); Análise estrutural; Sistemas não-lineares; Método de elementos finitos; Estruturas estaticamente indeterminadas; Corpos em rotação; Engenharia estrutural; Engenharia civil.</p> | | | |
| ^{10.} APRESENTAÇÃO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> X Nacional Internacional </div> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Graduação em Engenharia Civil –Aeronáutica. Orientador: Eliseu Lucena Neto; coorientador: Alex Correia Monteiro. Publicado em 2015.</p> | | | |
| ^{11.} RESUMO: <p>Dois elementos finitos para pórticos planos sob pequenas deformações mas grandes rotações, baseados na descrição lagrangiana total, são aqui analisados. O primeiro elemento decorre da teoria de vigas de Timoshenko com aproximações lineares para os deslocamentos axial e transversal assim como para a rotação. O segundo elemento decorre da teoria de vigas de Euler-Bernoulli com aproximações quadrática e cúbica para o deslocamento axial e transversal, respectivamente. Enquanto o travamento de cisalhamento transversal faz-se presente apenas no primeiro elemento, o travamento de membrana ocorre em ambos. Além de identificar analítica e numericamente os travamentos, mostramos neste trabalho como mitigá-los.</p> | | | |
| ^{12.} GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO </p> | | | |

