

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Paulo de Tarso Machado Leite Soares

Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas
reforçadas sob torção

Trabalho de Graduação
2012

**Engenharia Civil-
Aeronáutica**

Paulo de Tarso Machado Leite Soares

**Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas
sob torção**

Orientador

Prof. Ph.D. Eliseu Lucena Neto (ITA)

Co-orientador

Prof. M.Sc. Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)

Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Soares, Paulo de Tarso Machado Leite
Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção / Paulo de Tarso Machado Leite Soares.

São José dos Campos, 2012.
48f.

Trabalho de Graduação – Engenharia Civil-Aeronáutica –
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2012. Orientador: Prof. Ph.D. Eliseu Lucena Neto.

1. Flambagem. 2. Análise estrutural. 3. Cascas cilíndricas. 4. Cascas (formas estruturais). 5. Método de Rayleigh-Ritz. 6. Engenharia estrutural. 7. Engenharia civil. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOARES, PAULO DE TARSO MACHADO LEITE SOARES. **Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção**. 2012. 48f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Paulo de Tarso Machado Leite Soares

TÍTULO DO TRABALHO: Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção

TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação/2012

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Paulo de Tarso Machado Leite Soares
Rua Passo da Pátria, 1294 apto. 131 – Bela Aliança
São Paulo – SP – Brasil. CEP: 05085-000

**FLAMBAGEM LOCAL DO REVESTIMENTO DE CASCAS CILÍNDRICAS REFORÇADAS
SOB TORÇÃO**

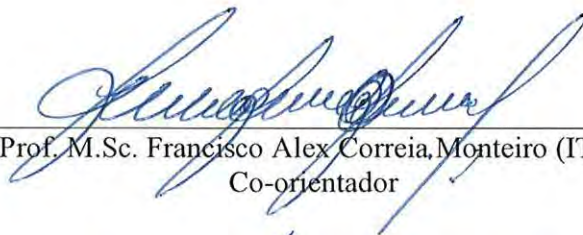
Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação



Paulo de Tarso Machado Leite Soares
Autor



Prof. Ph.D. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Orientador



Prof. M.Sc. Francisco Alex Correia, Monteiro (ITA)
Co-orientador



Prof. Ph.D. Eliseu Lucena Neto (ITA)
Coordenador do Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

São José dos Campos, 20 de novembro de 2012

Agradecimentos

Ao Prof. Eliseu Lucena Neto e ao Prof. Franciso Alex Correia Monteiro pela orientação, dedicação e ensinamentos.

Ao Prof. Flávio Mendes Neto pelas contribuições ao trabalho.

À minha família, pelo suporte e confiança.

Resumo

Um método para obtenção da carga de flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção uniforme é apresentado, no qual considera-se somente um trecho do revestimento entre reforçadores adjacentes. O problema de flambagem é formulado por um procedimento linear simplificado e solucionado pelo método de Rayleigh-Ritz utilizando séries de origem trigonométrica nas funções de aproximação. No cálculo da carga crítica considera-se que os reforçadores longitudinais forneçam rigidez à rotação do revestimento e que os reforçadores circunferenciais forneçam apenas apoios simples. Valida-se o procedimento proposto por meio de resultados de modelos de elementos finitos.

Abstract

A formulation for local skin buckling of cylindrical shells is presented, where just a skin portion between adjacent stiffeners is considered. The skin panel is subjected to torsion load. A buckling problem is formulated by a simplified linearization approach. The axial stiffener torsional rigidity is taken into account. The solution is obtained by a Rayleigh-Ritz procedure applying trigonometric series as trial mode functions. The accuracy of the solution is compared with finite element results.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Motivação	9
1.2	Objetivos	11
1.3	Contribuições	12
1.4	Estrutura do Trabalho	12
2	Formulação do Problema	13
2.1	Teoria de Donnell	14
2.2	Problema Linear de Flambagem	16
2.3	Problema Linear de Flambagem Simplificado	22
3	Método de Rayleigh-Ritz	24
3.1	Forma Fraca	24
3.2	Solução por Rayleigh-Ritz.....	28
3.3	Aproximação de Beslin	34
3.4	Aproximação Trigonométrica Enriquecida	34
4	Aplicações Numéricas	36
5	Conclusão	45
	Referências	47

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Cascas cilíndricas reforçadas são amplamente utilizadas nas engenharias aeronáutica (fuselagens de aeronaves), civil (plataformas offshore, comportas de barragens, reservatórios) e naval (cascos de submarinos). Essas estruturas são compostas por um revestimento cilíndrico dotado de reforçadores longitudinais e circunferenciais. Devido à esbelteza inerente, as cascas cilíndricas reforçadas estão sujeitas à flambagem.

A flambagem pode ocorrer de maneira global ou local, dependendo da geometria, do número de reforçadores, do carregamento etc. Na flambagem global, o revestimento e os reforçadores flambam como uma única entidade. Na flambagem local, o deslocamento transversal do revestimento ao longo dos reforçadores é praticamente nulo, formando uma linha nodal sobre os reforçadores, e flambando o reforçador ou o revestimento.

Admitindo que a flambagem local do revestimento ocorra antes da flambagem global e da flambagem local dos reforçadores, pode-se supor que o reforçador exerça rigidez torcional ao longo da linha nodal logo após a flambagem local do revestimento. Dessa maneira, é possível estudar a estabilidade da casca cilíndrica considerando apenas um painel (trecho do revestimento) entre reforçadores longitudinais e circunferenciais adjacentes, estando o painel restrito elasticamente ao longo das bordas reforçadas.

Dentre todos os componentes da casca cilíndrica reforçada, o revestimento é aquele que melhor tem resistência pós-flambagem a ser explorada primeiramente. É comum projetos nos quais o revestimento flamba localmente. Após a flambagem, parte do acréscimo de

carga é transferida aos reforçadores, até o colapso da estrutura que, tipicamente, se dá por plastificação local ou pela flambagem do reforçador (BAZANT e CEDOLIN, 2003). Cascas cilíndricas projetadas para o regime pós-flambagem do revestimento exploram ao máximo a capacidade de carga da estrutura, possibilitando a redução do peso estrutural.

Nas etapas iniciais do projeto, nas quais são realizadas iterações para otimização estrutural, o uso do método dos elementos finitos não é conveniente devido ao alto custo computacional (NATH e SANDEEP, 2000). Devido à complexidade do comportamento estrutural no regime pós-crítico, usualmente utilizam-se métodos semi-empíricos para a análise de flambagem (BRUHN, 1973). Geralmente, a eficiência desses métodos depende da precisão com a qual a carga de flambagem local do revestimento é aferida. Sua obtenção usual na indústria se dá pela extração de um painel entre dois reforçadores longitudinais e dois reforçadores circunferenciais adjacentes considerando-lhe simplesmente apoiado nas bordas. Esse procedimento, entretanto, tende a subestimar excessivamente a carga crítica uma vez que a resistência à flambagem local do revestimento depende da rigidez à torção proporcionada pelos reforçadores (FUJIKUBO e YAO, 1999; BISAGNI e VESCOVINI, 2009). Nesse contexto, torna-se importante para o projeto o desenvolvimento de um procedimento para a obtenção da carga de flambagem local de um painel do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas que considere, no mínimo, a rigidez à torção dos reforçadores longitudinais da estrutura real.

É possível obter a carga de flambagem do painel cilíndrico com boa precisão por meio de uma linearização no entorno do ponto de bifurcação (problema de flambagem linear). A perda de estabilidade da estrutura, no que diz respeito à trajetória de equilíbrio, ocorre em uma bifurcação entre a trajetória primária (anterior à flambagem) e a trajetória secundária (após a flambagem). No entorno da bifurcação, assume-se que com pequenos deslocamentos a partir da trajetória primária atinja-se um estado de equilíbrio adjacente. Aplicando-se pequenos incrementos nos deslocamentos das equações não lineares, obtém-se o problema de autovalor linear em função dos incrementos. A carga de flambagem é dada pelo menor autovalor desse problema (YAMAKI, 1982).

A complexidade da solução do problema de flambagem linear está diretamente relacionada ao carregamento aplicado e às condições de contorno do problema. Os carregamentos fundamentais considerados na análise de flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas

reforçadas são os carregamentos de compressão axial, de pressão lateral e de torção (YAMAKI, 1982). Conforme se desenvolvem ferramentas que possibilitam a redução do custo computacional, soluções mais baratas, em relação ao método dos elementos finitos, para o problema de flambagem de cascas cilíndricas sob diferentes carregamentos e apoios tornam-se acessíveis. Nesse sentido, destacam-se os estudos a seguir. Em uma abordagem de engenharia, PEVZNER *et al.* (2008) desenvolvem uma fórmula analítica para a carga crítica de painéis laminados curvos sob compressão axial, na qual inclui-se a flexão e a torção dos reforçadores. Uma formulação simples para a carga de flambagem local do revestimento de painéis cilíndricos sob compressão é proposta por MONTEIRO *et al.* (2011), empregando o método de Galerkin. Em uma extensão desse trabalho, MONTEIRO *et al.* (2012) tratam de painéis sujeitos à compressão axial e pressão lateral. Nesses trabalhos, considera-se apenas a influência da rigidez de torção dos reforçadores longitudinais no cálculo da carga crítica. Com uma abordagem diferente, BUERMANN *et al.* (2006) apresenta um modelo semi-analítico para a análise do regime crítico e pós-crítico de painéis cilíndricos sob os três carregamentos fundamentais. Em sua complexa formulação, considera-se a rigidez torcional dos reforçadores longitudinais e dos reforçadores circunferenciais.

O presente trabalho apresenta um método relativamente simples para a obtenção da carga de flambagem local do revestimento de painéis cilíndricos sob cisalhamento, considerando a rigidez à torção dos reforçadores longitudinais. O problema de flambagem é formulado por um procedimento linear simplificado e solucionado pelo método de Rayleigh-Ritz, utilizando séries trigonométricas hierárquicas de continuidade C^1 . Na formulação, apenas os reforçadores circunferenciais são substituídos por apoios simples.

1.2 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- determinar as equações do problema de flambagem para uma casca cilíndrica reforçada sob torção por meio de um procedimento linear simplificado empregando a teoria de cascas cilíndricas achatadas de Donnell;
- incluir na formulação a rigidez de torção dos reforçadores longitudinais por meio das condições de contorno;

- obter a forma fraca do problema de flambagem linear simplificado;
- solucionar o problema de flambagem linear pelo método de Rayleigh-Ritz;
- validar a solução obtida com resultados de modelos de elementos finitos.

1.3 Contribuições

Citam-se as seguintes contribuições deste trabalho ao estudo da flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas:

- o desenvolvimento de um procedimento simples para a obtenção da carga de flambagem de cascas cilíndricas sob torção, no qual considera-se somente um trecho do revestimento entre reforçadores;
- o uso de bases trigonométricas hierárquicas de continuidade C^1 na solução de Rayleigh-Ritz.

1.4 Estrutura do Trabalho

O trabalho está estruturado em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta a teoria de cascas cilíndricas achatadas proposta por Donnell e o problema de flambagem linear simplificado. No Capítulo 3 determina-se a forma fraca do problema e apresenta-se o procedimento de solução pelo método de Rayleigh-Ritz. No Capítulo 4, visando a validação do procedimento proposto, apresentam-se alguns ensaios numéricos pelo método dos elementos finitos. Por fim, o Capítulo 5 traz conclusões e comentários finais sobre o trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Formulação do Problema

Seja a casca cilíndrica reforçada da Figura 2.1, na qual se admite que:

- os reforçadores longitudinais e circunferenciais são idênticos e igualmente espaçados;
- a carga \bar{N}_{xy} (força/unidade de comprimento) aplicada às bordas na direção circunferencial é uniformemente distribuída;
- a flambagem local do revestimento ocorre antes da flambagem global da estrutura e da flambagem local dos reforçadores.

A carga de flambagem do revestimento é obtida por meio da análise de um único painel, indicado na Figura 2.1 e referido ao sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais xyz (as coordenadas x e y são medidas ao longo da superfície média do painel). O painel possui comprimento a , largura b , espessura h e raio de curvatura R , e apresenta condições de contorno que diferem daquelas idealizadas como simplesmente apoiadas devido à rigidez de torção dos reforçadores longitudinais ser também considerada (Figura 2.2).

Apresentam-se as equações não-lineares da teoria de cascas cilíndricas achatadas proposta por Donnell (BRUSH e ALMORTH, 1975; YAMAKI, 1984). Este modelo teórico é simplificado neste trabalho em dois níveis: no primeiro, obtém-se o problema de flambagem linear do painel em torno de um ponto de bifurcação; no segundo nível, o modelo é simplificado ainda mais ao desconsiderar completamente a flexão do painel antes da flambagem.

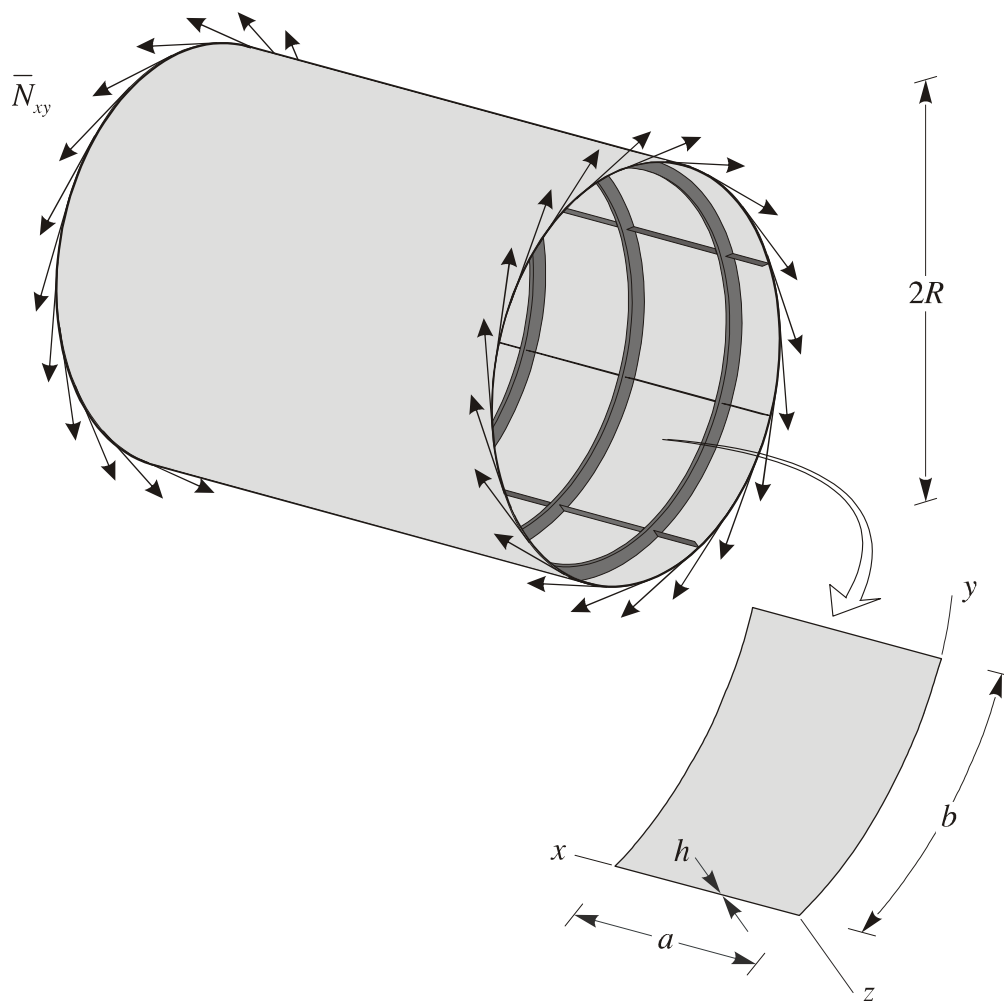


Figura 2.1 Casca cilíndrica reforçada.

2.1 Teoria de Donnell

Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

As equações de equilíbrio do painel indicado na Figura 2.2 são dadas na teoria de Donnell por (BRUSH e ALMORTH, 1975; YAMAKI, 1984)

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
 N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\
 M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y \left(w_{,yy} - \frac{1}{R} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A notação $()_{,x} = \partial()/\partial x$ e $()_{,y} = \partial()/\partial y$ é usada para as derivadas parciais em relação a x e y , respectivamente. As forças de membrana N_x , N_y (normais) e N_{xy} (de cisalhamento),

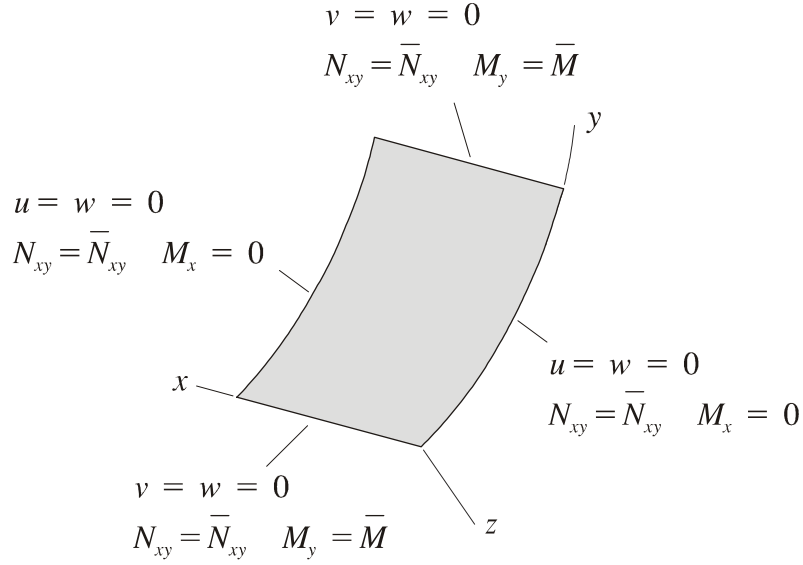


Figura 2.2 Painel com as condições de contorno.

e os momentos M_x , M_y (fletores) e M_{xy} (torçor) são definidos por unidade de comprimento da superfície média.

As condições de contorno a serem especificadas são

$$\begin{aligned}
 u = 0 \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy} \quad w = 0 \quad M_x = 0 \quad & \text{em } x = 0, a \\
 N_{xy} = \bar{N}_{xy} \quad v = 0 \quad w = 0 \quad M_y = \bar{M} \quad & \text{em } y = 0, b
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde u , v , w são os deslocamentos da superfície média nas direções de x , y , z e os momentos

$$\bar{M}(x, 0) = \frac{G_r J_r}{K} w_{,xxy}(x, 0) \quad \bar{M}(x, b) = -\frac{G_r J_r}{K} w_{,xxy}(x, b) \quad (2.3)$$

exercidos pelos reforçadores longitudinais impedem que o painel rotacione livremente nas bordas $y = 0, b$. A quantidade $G_r J_r$ representa a rigidez de torção do reforçador e K é um fator de distribuição dessa rigidez ao longo da borda reta. A consideração de reforçadores idênticos e igualmente espaçados conduz a $K = 2$.

Relações Deformação-Deslocamento

As relações deformação-deslocamento usadas na teoria de Donnell são dadas por

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^m &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 & \kappa_x &= -w_{,xx} \\
 \epsilon_y^m &= v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 & \kappa_y &= -w_{,yy} \\
 \gamma_{xy}^m &= v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y} & \kappa_{xy} &= -2w_{,xy}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde ϵ_x^m , ϵ_y^m , γ_{xy}^m são as deformações da superfície média e κ_x , κ_y , κ_{xy} estão associadas à mudança de curvatura e torção dessa superfície.

Equações Constitutivas

Supondo que o material seja isotrópico e elástico linear, com módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν , as seguintes equações constitutivas são adotadas na teoria de Donnell:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} \\ \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Problema Linear de Flambagem

É oportuna a introdução de alguns conceitos da teoria da estabilidade (BRUSH e ALMORTH, 1975). Uma curva no espaço “carga-deslocamento”, formada pelos pontos que correspondem a configurações de equilíbrio, é denominada *trajetória de equilíbrio*. A *trajetória primária* é a curva que passa pelo ponto em que a estrutura está descarregada. Normalmente é a curva mais importante por ser a trajetória seguida no processo inicial de carregamento. Qualquer curva que cruze a trajetória primária é denominada *trajetória secundária*. O ponto de cruzamento de trajetórias é um *ponto de bifurcação*. A configuração de equilíbrio associada a um ponto de bifurcação pertence, portanto, a mais de uma trajetória (Figura 2.3).

O fenômeno da perda de estabilidade do equilíbrio ao longo de uma trajetória é conhecido por *flambagem*, e sua ocorrência se dá com a *carga de flambagem*. Como a trajetória primária é o caminho natural a ser seguido com o aumento da carga a partir de zero, denomina-se *carga crítica* a menor das cargas de flambagem ao longo dessa trajetória e o ponto correspondente no espaço “carga-deslocamento” denomina-se *ponto crítico*. No caso do painel analisado, supõe-se que o ponto crítico ocorra em um ponto de bifurcação.

Suponha que a trajetória primária seja descrita pelos deslocamentos (u_0, v_0, w_0) . Especi-

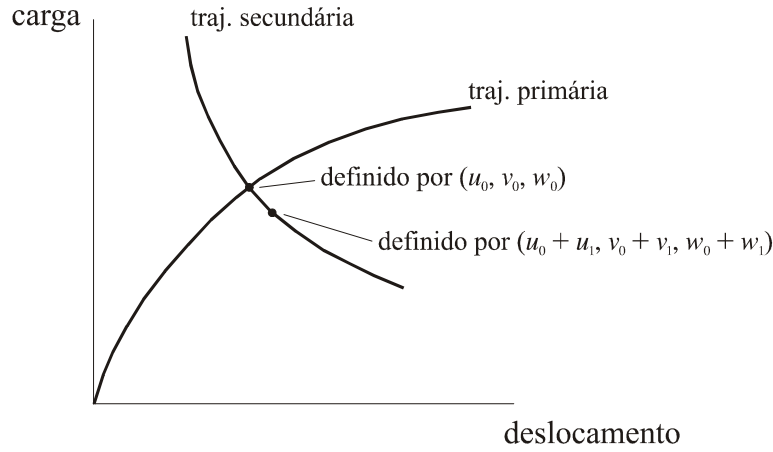


Figura 2.3 O ponto de bifurcação é definido por (u_0, v_0, w_0) e um ponto próximo sobre a trajetória secundária é definido por $(u_0 + u_1, v_0 + v_1, w_0 + w_1)$.

ficamente, a Figura 2.3 usa esses deslocamentos para indicar um ponto de bifurcação na trajetória primária. Suponha ainda que (u_1, v_1, w_1) sejam pequenos deslocamentos, especialmente escolhidos, de maneira que

$$u = u_0 + u_1 \quad v = v_0 + v_1 \quad w = w_0 + w_1 \quad (2.6)$$

esteja sobre uma trajetória secundária nas proximidades do ponto de bifurcação. Na trajetória secundária,

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{xy1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{xy0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{xy1} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde os esforços com índice “0” estão associados à trajetória primária e os esforços com índice “1” estão associados aos incrementos u_1, v_1, w_1 .

Da substituição de (2.6) e (2.7) em (2.1),

$$\begin{aligned}
N_{x0,x} + N_{xy0,y} + N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\
N_{xy0,x} + N_{y0,y} + N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\
M_{x0,xx} + 2M_{xy0,xy} + M_{y0,yy} + N_{x0}w_{0,xx} + 2N_{xy0}w_{0,xy} + N_{y0} \left(w_{0,yy} - \frac{1}{R} \right) \\
+ M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} + N_{x1}w_{0,xx} + N_{x0}w_{1,xx} + N_{x1}w_{1,xx} + 2N_{xy1}w_{0,xy} \\
+ 2N_{xy0}w_{1,xy} + 2N_{xy1}w_{1,xy} + N_{y0}w_{1,yy} + N_{y1} \left(w_{0,yy} + w_{1,yy} - \frac{1}{R} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Da substituição de (2.6) em (2.4),

$$\begin{aligned}
\epsilon_x^m &= u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 + u_{1,x} + w_{0,x}w_{1,x} + \frac{1}{2}w_{1,x}^2 \\
\epsilon_y^m &= v_{0,y} + \frac{w_0}{R} + \frac{1}{2}w_{0,y}^2 + v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 + w_{0,y}w_{1,y} + \frac{1}{2}w_{1,y}^2 \\
\gamma_{xy}^m &= v_{0,x} + u_{0,y} + w_{0,x}w_{0,y} + v_{1,x} + u_{1,y} + w_{0,x}w_{1,y} + w_{1,x}w_{0,y} + w_{1,x}w_{1,y} \\
\kappa_x &= -w_{0,xx} - w_{1,xx} \\
\kappa_y &= -w_{0,yy} - w_{1,yy} \\
\kappa_{xy} &= -2w_{0,xy} - 2w_{1,xy}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dois grupos de equações podem ser identificados em (2.8) e (2.9). O primeiro grupo, contendo apenas termos com índice “0”, pertence ao problema não-linear representado pela trajetória primária. O segundo grupo, contendo os demais termos, pertence ao problema não-linear representado pela trajetória secundária.

Trajetória Primária

Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

Identificam-se de (2.8) as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
N_{x0,x} + N_{xy0,y} &= 0 \\
N_{xy0,x} + N_{y0,y} &= 0 \\
M_{x0,xx} + 2M_{xy0,xy} + M_{y0,yy} + N_{x0}w_{0,xx} + 2N_{xy0}w_{0,xy} + N_{y0} \left(w_{0,yy} - \frac{1}{R} \right) &= 0, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

que prevalecem ao longo da trajetória primária, assim como identificam-se de (2.2) as correspondentes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_0 = 0 \quad N_{xy0} = \bar{N}_{xy0} \quad w_0 = 0 \quad M_{x0} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \\ N_{xy0} = \bar{N}_{xy0} \quad v_0 = 0 \quad w_0 = 0 \quad M_{y0} = \bar{M}_0 \quad \text{em } y = 0, b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

O carregamento \bar{N}_{xy0} , \bar{M}_0 refere-se a \bar{N}_{xy} , \bar{M} ao longo da trajetória primária.

Duas formas alternativas simplificadas das equações (2.10) podem ser empregadas. Em uma primeira simplificação, as equações podem ser linearizadas nas funções incógnitas presentes:

$$\begin{aligned} N_{x0,x} + N_{xy0,y} &= 0 \\ N_{xy0,x} + N_{y0,y} &= 0 \\ M_{x0,xx} + 2M_{xy0,xy} + M_{y0,yy} - \frac{N_{y0}}{R} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em outra simplificação, o efeito da flexão é completamente desprezado resultando nas equações de equilíbrio da teoria linear de membrana:

$$\begin{aligned} N_{x0,x} + N_{xy0,y} &= 0 \\ N_{xy0,x} + N_{y0,y} &= 0 \\ \frac{N_{y0}}{R} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

São três equações de equilíbrio (2.13) com três incógnitas (N_{x0} , N_{y0} , N_{xy0}). O painel cilíndrico é, portanto, em regime de membrana, uma estrutura estaticamente determinada no sentido de que os esforços N_{x0} , N_{y0} e N_{xy0} são obtidos independentemente da deformação da estrutura. No entanto, sabe-se que a teoria linear de membrana é limitada a certas condições de contorno (KRAUS, 1967). Por simplicidade, este trabalho trata o painel na trajetória primária como uma membrana, com a seguinte distribuição uniforme de esforços:

$$N_{x0} = 0 \quad N_{y0} = 0 \quad N_{xy0} = \bar{N}_{xy0}. \quad (2.14)$$

É uma distribuição que satisfaz (2.13) e no contorno é compatível com

$$\begin{aligned} N_{x0} = 0 \quad N_{xy0} = \bar{N}_{xy0} \quad \text{em } x = 0, a \\ N_{xy0} = \bar{N}_{xy0} \quad N_{y0} = 0 \quad \text{em } y = 0, b. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Perceba que as condições (2.11), no que diz respeito à solução de membrana, são alteradas.

Relações Deformação-Deslocamento

Em sua forma completa, as relações deformação-deslocamento escrevem-se

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{x0}^m &= u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 & \kappa_{x0} &= -w_{0,xx} \\
 \epsilon_{y0}^m &= v_{0,y} + \frac{w_0}{R} + \frac{1}{2}w_{0,y}^2 & \kappa_{y0} &= -w_{0,yy} \\
 \gamma_{xy0}^m &= v_{0,x} + u_{0,y} + w_{0,x}w_{0,y} & \kappa_{xy0} &= -2w_{0,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

A mesmas relações linearizadas são dadas por

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{x0}^m &= u_{0,x} & \kappa_{x0} &= -w_{0,xx} \\
 \epsilon_{y0}^m &= v_{0,y} + \frac{w_0}{R} & \kappa_{y0} &= -w_{0,yy} \\
 \gamma_{xy0}^m &= v_{0,x} + u_{0,y} & \kappa_{xy0} &= -2w_{0,xy}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Quando o efeito da flexão é desprezado, as quantidades associadas à mudança de curvatura e à torção são removidas, restando para a teoria linear de membrana

$$\epsilon_{x0}^m = u_{0,x} \quad \epsilon_{y0}^m = v_{0,y} \quad \gamma_{xy0}^m = v_{0,x} + u_{0,y}. \tag{2.18}$$

Equações Constitutivas

As equações constitutivas são dadas por (2.5) aplicado à trajetória primária

$$\begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \\ N_{xy0} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0}^m \\ \epsilon_{y0}^m \\ \gamma_{xy0}^m \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} M_{x0} \\ M_{y0} \\ M_{xy0} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa_{x0} \\ \kappa_{y0} \\ \kappa_{xy0} \end{Bmatrix}. \tag{2.19}$$

Na teoria linear de membrana, o segundo grupo de equações, associado à flexão, é desprezado.

Trajетória Secundária

Para a obtenção da carga de flambagem, não é necessária a determinação completa da trajetória secundária, mas somente a determinação da forma com a qual o painel passa da trajetória primária para a secundária. Assim, basta admitir pequenos incrementos u_1 , v_1 , w_1 e linearizar a teoria em torno do ponto de bifurcação, ou seja, nas quantidades com índice “1”.

Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

Removendo (2.10) de (2.8),

$$\begin{aligned}
N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\
N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\
M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} + N_{x1}w_{0,xx} + N_{x0}w_{1,xx} + N_{x1}w_{1,xx} + 2N_{xy1}w_{0,xy} \\
+ 2N_{xy0}w_{1,xy} + 2N_{xy1}w_{1,xy} + N_{y0}w_{1,yy} + N_{y1} \left(w_{0,yy} + w_{1,yy} - \frac{1}{R} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

A linearização conduz às equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\
N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\
M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} + N_{x1}w_{0,xx} + N_{x0}w_{1,xx} + 2N_{xy1}w_{0,xy} \\
+ 2N_{xy0}w_{1,xy} + N_{y0}w_{1,yy} + N_{y1} \left(w_{0,yy} - \frac{1}{R} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned}
u_1 = 0 \quad N_{xy1} = 0 \quad w_1 = 0 \quad M_{x1} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \\
N_{xy1} = 0 \quad v_1 = 0 \quad w_1 = 0 \quad M_{y1} = \bar{M}_1 \quad \text{em } y = 0, b
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde admite-se que não haja acréscimo na carga aplicada \bar{N}_{xy} com a flambagem. O momento \bar{M}_1 refere-se a \bar{M} na trajetória secundária em torno do ponto de bifurcação.

Relações Deformação-Deslocamento

Analogamente, removendo (2.16) de (2.9),

$$\begin{aligned}
\epsilon_{x1}^m &= u_{1,x} + w_{0,x}w_{1,x} + \frac{1}{2}w_{1,x}^2 & \kappa_{x1} &= -w_{1,xx} \\
\epsilon_{y1}^m &= v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 + w_{0,y}w_{1,y} + \frac{1}{2}w_{1,y}^2 & \kappa_{y1} &= -w_{1,yy} \\
\gamma_{xy1}^m &= v_{1,x} + u_{1,y} + w_{0,x}w_{1,y} + w_{1,x}w_{0,y} + w_{1,x}w_{1,y} & \kappa_{xy1} &= -2w_{1,xy}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

A linearização resulta em

$$\begin{aligned}
\epsilon_{x1}^m &= u_{1,x} + w_{0,x}w_{1,x} & \kappa_{x1} &= -w_{1,xx} \\
\epsilon_{y1}^m &= v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 + w_{0,y}w_{1,y} & \kappa_{y1} &= -w_{1,yy} \\
\gamma_{xy1}^m &= v_{1,x} + u_{1,y} + w_{0,x}w_{1,y} + w_{1,x}w_{0,y} & \kappa_{xy1} &= -2w_{1,xy}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Equações Constitutivas

As relações constitutivas são dadas por

$$\begin{Bmatrix} N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{xy1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \epsilon_{x1}^m \\ \epsilon_{y1}^m \\ \gamma_{xy1}^m \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{xy1} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa_{x1} \\ \kappa_{y1} \\ \kappa_{xy1} \end{Bmatrix}. \tag{2.25}$$

2.3 Problema Linear de Flambagem Simplificado

Se a flexão for desprezada na trajetória primária, ou seja, essa trajetória é descrita pela teoria linear de membrana, termos que contêm derivadas de w_0 em relação a x ou y devem ser removidos das equações anteriores. Assim, a distribuição de esforços na trajetória primária é dada por

$$\bar{N}_{xy0} = \bar{N}_{xy} \tag{2.26}$$

onde \bar{N}_{xy} é a carga no ponto de bifurcação. As equações que definem o ponto de bifurcação são dadas a seguir.

Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

As equações de equilíbrio (2.21) escrevem-se como

$$\begin{aligned}
N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\
N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\
M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} - \frac{N_{y1}}{R} + 2\bar{N}_{xy}w_{1,xy} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

As condições de contorno são

$$\begin{aligned}
u_1 = 0 \quad N_{xy1} = 0 \quad w_1 = 0 \quad M_{x1} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \\
N_{xy1} = 0 \quad v_1 = 0 \quad w_1 = 0 \quad M_{y1} = \bar{M}_1 \quad \text{em } y = 0, b
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde

$$\bar{M}_1(x, 0) = \frac{G_r J_r}{K} w_{1,xy}(x, 0) \quad \bar{M}_1(x, b) = -\frac{G_r J_r}{K} w_{1,xy}(x, b). \quad (2.29)$$

Por ser desprezada a flexão na trajetória primária, o momento \bar{M} exercido pelos reforçadores nas bordas retas do painel só ocorre com a flambagem. Portanto, $\bar{M}_1 = \bar{M}$.

Relações Deformação-Deslocamento

As relações deformação-deslocamento (2.24) ficam

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1}^m &= u_{1,x} & \kappa_{x1} &= -w_{1,xx} \\ \epsilon_{y1}^m &= v_{1,y} + \frac{1}{R} w_1 & \kappa_{y1} &= -w_{1,yy} \\ \gamma_{xy1}^m &= v_{1,x} + u_{1,y} & \kappa_{xy1} &= -2w_{1,xy}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Equações Constitutivas

As relações constitutivas são as mesmas de (2.25).

Capítulo 3

Método de Rayleigh-Ritz

Uma solução aproximada do problema de flambagem linear simplificado pelo método de Rayleigh-Ritz é apresentada. Para tanto, determina-se a forma fraca do problema. O método busca uma solução aproximada que satisfaça no sentido médio as equações diferenciais (2.27) e as condições de contorno naturais de (2.28). As condições essenciais são satisfeitas pela função de aproximação arbitrada.

3.1 Forma Fraca

Multiplicando as equações (2.27) pelas variações dos deslocamentos δu_1 , δv_1 , δw_1 , somando e integrando-as no domínio tem-se

$$\int_0^b \int_0^a \left\{ (N_{x1,x} + N_{xy1,y}) \delta u_1 + (N_{xy1,x} + N_{y1,y}) \delta v_1 + \left[M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} - \frac{N_{y1}}{R} + 2\bar{N}_{xy} w_{1,xy} \right] \delta w_1 \right\} dx dy = 0. \quad (3.1)$$

onde a notação $\delta(\)$ representa a primeira variação da função. O lema fundamental do cálculo variacional assegura que as expressões (3.1) e (2.27) são equivalentes.

Procedendo as integrações por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^b \int_0^a N_{x1,x} \delta u_1 dx dy &= \int_0^b N_{x1} \delta u_1 \Big|_0^a dy - \int_0^b \int_0^a N_{x1} \delta u_{1,x} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a N_{xy1,y} \delta u_1 dx dy &= \int_0^a N_{xy1} \delta u_1 \Big|_0^b dx - \int_0^b \int_0^a N_{xy1} \delta u_{1,y} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a N_{xy1,x} \delta v_1 dx dy &= \int_0^b N_{xy1} \delta v_1 \Big|_0^a dy - \int_0^b \int_0^a N_{xy1} \delta v_{1,x} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a N_{y1,y} \delta v_1 dx dy &= \int_0^a N_{y1} \delta v_1 \Big|_0^b dx - \int_0^b \int_0^a N_{y1} \delta v_{1,y} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a M_{x1,xx} \delta w_1 dx dy &= \int_0^b M_{x1,x} \delta w_1 \Big|_0^a dy \\
&\quad - \int_0^b M_{x1} \delta w_{1,x} \Big|_0^a dy + \int_0^b \int_0^a M_{x1} \delta w_{1,xx} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a M_{xy1,xy} \delta w_1 dx dy &= \int_0^a M_{xy1,x} \delta w_1 \Big|_0^b dx \\
&\quad - \int_0^b M_{xy1} \delta w_{1,y} \Big|_0^a dy + \int_0^b \int_0^a M_{xy1} \delta w_{1,xy} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a M_{xy1,xy} \delta w_1 dx dy &= \int_0^b M_{xy1,y} \delta w_1 \Big|_0^a dy \\
&\quad - \int_0^a M_{xy1} \delta w_{1,x} \Big|_0^b dx + \int_0^b \int_0^a M_{xy1} \delta w_{1,xy} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a M_{y1,yy} \delta w_1 dx dy &= \int_0^a M_{y1,y} \delta w_1 \Big|_0^b dx \\
&\quad - \int_0^a M_{y1} \delta w_{1,y} \Big|_0^b dx + \int_0^b \int_0^a M_{y1} \delta w_{1,yy} dx dy \\
\int_0^a \int_0^b \bar{N}_{xy} w_{1,xy} \delta w_1 dx dy &= \int_0^a \bar{N}_{xy} w_{1,x} \delta w_1 \Big|_0^b dx - \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} w_{,x} \delta w_{1,y} dx dy \\
\int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} w_{1,xy} \delta w_1 dx dy &= \int_0^b \bar{N}_{xy} w_{1,y} \delta w_1 \Big|_0^a dy - \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} w_{1,y} \delta w_{1,x} dx dy
\end{aligned} \tag{3.2}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
& - \int_0^b \int_0^a \left[N_{x1} \delta u_{1,x} + N_{xy1} (\delta u_{1,y} + \delta v_{1,x}) + N_{y1} \left(\delta v_{1,y} + \frac{1}{R} \delta w_1 \right) \right] dx dy \\
& + \int_0^b \int_0^a [M_{x1} \delta w_{1,xx} + M_{y1} \delta w_{1,yy} + 2M_{xy1} \delta w_{1,xy}] dx dy \\
& - \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} (w_{1,x} \delta w_{1,y} + w_{1,y} \delta w_{1,x}) dx dy \\
& + \int_0^a \{ N_{xy1} \delta u_1 + N_{y1} \delta v_1 + M_{y1,y} \delta w_1 - M_{y1} \delta w_{1,y} + M_{xy1,x} \delta w_1 \\
& - M_{xy1} \delta w_{1,x} + \bar{N}_{xy} w_{1,x} \delta w_1 \} \Big|_0^b dx \\
& + \int_0^b \{ N_{x1} \delta u_1 + N_{xy1} \delta v_1 + M_{x1,x} \delta w_1 - M_{x1} \delta w_{1,x} + M_{xy1,y} \delta w_1 \\
& - M_{xy1} \delta w_{1,y} + \bar{N}_{xy} w_{1,y} \delta w_1 \} \Big|_0^a dy = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Segundo as condições de contorno (2.28), são conhecidos os seguintes deslocamentos

$$\begin{aligned}
u_1 = 0 \quad w_1 = 0 \quad \text{em } x = 0, a \\
v_1 = 0 \quad w_1 = 0 \quad \text{em } y = 0, b
\end{aligned} \tag{3.4}$$

que tornam nulas as seguintes variações

$$\begin{aligned}
\delta u_1(0, y) = \delta u_1(a, y) = \delta w_1(0, y) = \delta w_1(a, y) = 0 \\
\delta v_1(x, 0) = \delta v_1(x, b) = \delta w_1(x, 0) = \delta w_1(x, b) = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ainda de acordo com (2.28), os esforços no contorno são dados por

$$\begin{aligned}
N_{xy1}(0, y) = N_{xy1}(a, y) = 0 \quad M_{x1}(0, y) = M_{x1}(a, y) = 0 \\
N_{xy1}(x, 0) = N_{xy1}(x, b) = 0 \quad M_{y1}(x, 0) = M_{y1}(x, b) = \bar{M}_1.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nota-se ainda que a condição $w_1 = 0$ nas bordas $x = 0, a$ implica $w_{1,y} = 0$ ao longo dessas bordas, assim como w_1 nulo nas bordas $y = 0, b$ resulta $w_{1,x} = 0$ ao longo das bordas:

$$\begin{aligned}
w_{1,y} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \\
w_{1,x} = 0 \quad \text{em } y = 0, b.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A substituição de (3.5), (3.6) e (3.7) em (3.3) fornece

$$\begin{aligned}
& - \int_0^b \int_0^a \left[N_{x1} \delta u_{1,x} + N_{xy1} (\delta u_{1,y} + \delta v_{1,x}) + N_{y1} \left(\delta v_{1,y} + \frac{1}{R} \delta w_1 \right) \right] dx dy \\
& + \int_0^b \int_0^a [M_{x1} \delta w_{1,xx} - M_{y1} \delta w_{1,yy} - 2M_{xy1} \delta w_{1,xy}] dx dy \\
& + \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} (w_{1,x} \delta w_{1,y} + w_{1,y} \delta w_{1,x}) dx dy \\
& + \int_0^a [\bar{M}_1(x, 0) \delta w_{1,y}(x, 0) - \bar{M}_1(x, b) \delta w_{1,y}(x, b)] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

que pode ser reescrita em termos das relações deformação-deslocamento (2.30),

$$\begin{aligned}
& - \int_0^b \int_0^a (N_{x1} \delta \epsilon_{x1}^m + N_{y1} \delta \epsilon_{y1}^m + N_{xy1} \delta \gamma_{xy1}^m + M_{x1} \delta \kappa_{x1} + M_{y1} \delta \kappa_{y1} + M_{xy1} \delta \kappa_{xy1}) dx dy \\
& + \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} w_{1,x} \delta w_{1,y} dx dy + \int_0^a [\bar{M}_1(x, 0) \delta w_{1,y}(x, 0) - \bar{M}_1(x, b) \delta w_{1,y}(x, b)] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

que define a forma fraca do problema simplificado.

A forma fraca obtida contém as equações de equilíbrio (2.27) e as seguintes condições de contorno naturais de (2.28)

$$\begin{aligned}
N_{xy1} = 0 & \quad M_{x1} = 0 & \quad \text{em } x = 0, a \\
N_{xy1} = 0 & \quad M_{y1} = \bar{M}_1 & \quad \text{em } y = 0, b.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

No método de Rayleigh-Ritz as condições essenciais

$$\begin{aligned}
u_1 = 0 & \quad w_1 = 0 & \quad \text{em } x = 0, a \\
v_1 = 0 & \quad w_1 = 0 & \quad \text{em } y = 0, b
\end{aligned} \tag{3.11}$$

devem ser satisfeitas pelas funções de aproximação arbitradas.

3.2 Solução por Rayleigh-Ritz

Substituindo os momentos dos reforçadores (2.29) e considerando as relações de deformação-deslocamento (2.30) e as equações constitutivas (2.25) na forma fraca do problema de flambagem linear (3.8),

$$\begin{aligned}
& - \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[A_{11}u_{1,x} + A_{12} \left(v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 \right) \right] \delta u_{1,x} + \left[A_{12}u_{1,x} + A_{22} \left(v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 \right) \right] \delta v_{1,y} \right. \\
& + \left[A_{12}u_{1,x} + A_{22} \left(v_{1,y} + \frac{1}{R}w_1 \right) \right] \frac{\delta w_1}{R} + A_{66} (v_{1,x} + u_{1,y}) (\delta u_{1,y} + \delta v_{1,x}) \\
& + (D_{11}w_{1,xx} + D_{12}w_{1,yy}) \delta w_{1,xx} + (D_{12}w_{1,xx} + D_{22}w_{1,yy}) \delta w_{1,yy} \\
& + 4D_{66}w_{1,xy} \delta w_{1,xy} \} dx dy + \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} (w_{1,y} \delta w_{1,x} + w_{1,x} \delta w_{1,y}) dx dy \\
& + \int_0^a \left[\frac{G_r J_r}{K} w_{1,xy}(x, 0) \delta w_{1,y}(x, 0) + \frac{G_r J_r}{K} w_{1,xy}(x, b) \delta w_{1,y}(x, b) \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde A_{ij} e D_{ij} são os componentes das matrizes $[A]$ e $[D]$ (2.5), respectivamente.

Considerando que o campo de deslocamentos seja dado pelas funções

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij} X_{ui}(x) Y_{uj}(y) \\
v_1(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} X_{vi}(x) Y_{vj}(y) \\
w_1(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij} X_{wi}(x) Y_{wj}(y),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

a substituição na forma fraca fornece

$$\begin{aligned}
& - \sum \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[A_{11} U_{ij} X'_{ui} Y_{uj} + A_{12} \left(V_{ij} X_{vi} Y'_{vj} + \frac{1}{R} W_{ij} X_{wi} Y_{wj} \right) \right] \delta U_{kl} X'_{uk} Y_{ul} \right. \\
& + \left[A_{12} U_{ij} X'_{ui} Y_{uj} + A_{22} \left(V_{ij} X_{vi} Y'_{vj} + \frac{1}{R} W_{ij} X_{wi} Y_{wj} \right) \right] \delta V_{kl} X_{vk} Y'_{vl} \\
& + \frac{1}{R} \left[A_{12} U_{ij} X'_{ui} Y_{uj} + A_{22} \left(V_{ij} X_{vi} Y'_{vj} + \frac{1}{R} W_{ij} X_{wi} Y_{wj} \right) \right] \delta W_{kl} X_{wk} Y_{wl} \\
& + A_{66} (V_{ij} X'_{vi} Y_{vj} + U_{ij} X_{ui} Y'_{uj}) (\delta U_{kl} X_{uk} Y'_{ul} + \delta V_{kl} X'_{vk} Y_{vl}) \\
& + (D_{11} W_{ij} X''_{wi} Y_{wj} + D_{12} W_{ij} X_{wi} Y''_{wj}) \delta W_{kl} X''_{wk} Y_{wl} \\
& + (D_{12} W_{ij} X''_{wi} Y_{wj} + D_{22} W_{ij} X_{wi} Y''_{wj}) \delta W_{kl} X_{wk} Y''_{wl} + 4D_{66} W_{ij} X'_{wi} Y'_{wj} \delta W_{kl} X'_{wk} Y'_{wl} \left. \right\} dx dy \\
& + \sum \int_0^b \int_0^a \bar{N}_{xy} (W_{ij} X_{wi} Y'_{wj} \delta W_{kl} X'_{wk} Y_{wl} + W_{ij} X'_{wi} Y_{wj} \delta W_{kl} X_{wk} Y'_{wl}) dx dy \\
& + \sum \int_0^a \frac{G_r J_r}{K} [W_{ij} X''_{wi} Y'_{wj}(0) \delta W_{kl} X_{wk} Y'_{wl}(0) + W_{ij} X''_{wi} Y'_{wj}(b) \delta W_{kl} X_{wk} Y'_{wl}(b)] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde o símbolo \sum indica o somatório quádruplo $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n$ e a notação $(\)'$ indica a derivada ordinária em relação à variável independente.

Rearranjando os termos obtém-se

$$\begin{aligned}
& - \sum \int_0^b \int_0^a \left\{ \delta U_{kl} \left[(A_{11} X'_{ui} Y_{uj} X'_{uk} Y_{ul} + A_{66} X_{ui} Y'_{uj} X_{uk} Y'_{ul}) U_{ij} \right. \right. \\
& + (A_{12} X_{vi} Y'_{vj} X'_{uk} Y_{ul} + A_{66} X'_{vi} Y_{vj} X_{uk} Y'_{ul}) V_{ij} + \frac{A_{12}}{R} X_{wi} Y_{wj} X'_{uk} Y_{ul} W_{ij} \left. \right] \\
& + \delta V_{kl} \left[(A_{12} X'_{ui} Y_{uj} X_{vk} Y'_{vl} + A_{66} X_{ui} Y'_{uj} X'_{vk} Y_{vl}) U_{ij} \right. \\
& + (A_{22} X_{vi} Y'_{vj} X_{vk} Y'_{vl} + A_{66} X'_{vi} Y_{vj} X'_{vk} Y_{vl}) V_{ij} + \frac{A_{22}}{R} X_{wi} Y_{wj} X_{vk} Y'_{vl} W_{ij} \left. \right] \\
& + \delta W_{kl} \left[\frac{A_{12}}{R} X'_{ui} Y_{uj} X_{wk} Y_{wl} U_{ij} + \frac{A_{22}}{R} X_{vi} Y'_{vj} X_{wk} Y_{wl} V_{ij} \right. \\
& + \left(\frac{A_{22}}{R^2} X_{wi} Y_{wj} X_{wk} Y_{wl} + D_{11} X''_{wi} Y_{wj} X''_{wk} Y_{wl} + D_{12} X_{wi} Y''_{wj} X''_{wk} Y_{wl} \right. \\
& + D_{12} X''_{wi} Y_{wj} X_{wk} Y''_{wl} + D_{22} X_{wi} Y''_{wj} X_{wk} Y''_{wl} + 4D_{66} X'_{wi} Y'_{wj} X'_{wk} Y'_{wl} \left. \right) W_{ij} \left. \right] \left. \right\} dx dy \\
& + \sum \int_0^b \int_0^a \delta W_{kl} \bar{N}_{xy} (X_{wi} Y'_{wj} X'_{wk} Y_{wl} + X'_{wi} Y_{wj} X_{wk} Y'_{wl}) W_{ij} dx dy \\
& + \sum \frac{G_r J_r}{K} \int_0^a \delta W_{kl} [X''_{wi} Y'_{wj}(0) X_{wk} Y'_{wl}(0) + X''_{wi} Y'_{wj}(b) X_{wk} Y'_{wl}(b)] W_{ij} dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Definindo

$$\begin{aligned}\alpha_{\zeta,ik}^{\xi,pq} &= \int_0^a \frac{d^p X_{\xi i}}{dx^p} \frac{d^q X_{\zeta k}}{dx^q} dx & \beta_{\zeta,jl}^{\xi,pq} &= \int_0^b \frac{d^p Y_{\xi j}}{dx^p} \frac{d^q Y_{\zeta l}}{dx^q} dy & \gamma_{\zeta,kl ij}^{\xi,pqrs} &= \alpha_{\zeta,ik}^{\xi,pq} \beta_{\zeta,jl}^{\xi,rs} \\ \eta_{kl ij}^{\xi} &= Y'_{wj}(\xi) Y'_{wl}(\xi) \alpha_{w,ik}^{w,20}\end{aligned}\quad (3.16)$$

a equação (3.15) fica

$$\begin{aligned}& - \sum \left\{ \delta U_{kl} \left[(A_{11} \gamma_{u,kl ij}^{u,1100} + A_{66} \gamma_{u,kl ij}^{u,0011}) U_{ij} + (A_{12} \gamma_{u,kl ij}^{v,0110} + A_{66} \gamma_{u,kl ij}^{v,1001}) V_{ij} + \frac{A_{12}}{R} \gamma_{u,kl ij}^{w,0100} W_{ij} \right] \right. \\ & + \delta V_{kl} \left[(A_{12} \gamma_{v,kl ij}^{u,1001} + A_{66} \gamma_{v,kl ij}^{u,0110}) U_{ij} + (A_{22} \gamma_{v,kl ij}^{v,0011} + A_{66} \gamma_{v,kl ij}^{v,1100}) V_{ij} + \frac{A_{22}}{R} \gamma_{v,kl ij}^{w,0001} W_{ij} \right] \\ & + \delta W_{kl} \left[\frac{A_{12}}{R} \gamma_{w,kl ij}^{u,1000} U_{ij} + \frac{A_{22}}{R} \gamma_{w,kl ij}^{v,0010} V_{ij} + \left(\frac{A_{22}}{R^2} \gamma_{w,kl ij}^{w,0000} + D_{11} \gamma_{w,kl ij}^{w,2200} + D_{12} \gamma_{w,kl ij}^{w,0220} \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{12} \gamma_{w,kl ij}^{w,2002} + D_{22} \gamma_{w,kl ij}^{w,0022} + 4D_{66} \gamma_{w,kl ij}^{w,1111} \right) W_{ij} \right] \left. \right\} + \sum \delta W_{kl} \bar{N}_{xy} (\gamma_{w,kl ij}^{w,0110} + \gamma_{w,kl ij}^{w,1001}) W_{ij} \\ & + \sum \frac{G_r J_r}{K} \delta W_{kl} (\eta_{kl ij}^0 + \eta_{kl ij}^b) W_{ij} = 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

A expressão (3.17) pode ser reescrita matricialmente como

$$\begin{aligned}& - \{\delta U\}^T \left[(A_{11} [\Gamma_{uu}^{1100}] + A_{66} [\Gamma_{uu}^{0011}]) \{U\} + (A_{12} [\Gamma_{vu}^{0110}] + A_{66} [\Gamma_{vu}^{1001}]) \{V\} + \frac{A_{12}}{R} [\Gamma_{wu}^{0100}] \{W\} \right] \\ & - \{\delta V\}^T \left[(A_{12} [\Gamma_{uv}^{1001}] + A_{66} [\Gamma_{uv}^{0110}]) \{U\} + (A_{22} [\Gamma_{vv}^{0011}] + A_{66} [\Gamma_{vv}^{1100}]) \{V\} + \frac{A_{22}}{R} [\Gamma_{wv}^{0001}] \{W\} \right] \\ & - \{\delta W\}^T \left[\frac{A_{12}}{R} [\Gamma_{uw}^{1000}] \{U\} + \frac{A_{22}}{R} [\Gamma_{vw}^{0010}] \{V\} + \left(\frac{A_{22}}{R^2} [\Gamma_{ww}^{0000}] + D_{11} [\Gamma_{ww}^{2200}] + D_{12} [\Gamma_{ww}^{0220}] \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{12} [\Gamma_{ww}^{2002}] + D_{22} [\Gamma_{ww}^{0022}] + 4D_{66} [\Gamma_{ww}^{1111}] - \frac{G_r J_r}{K} ([\Gamma_0] + [\Gamma_b]) \right) \{W\} \right] \\ & + \{\delta W\}^T \bar{N}_{xy} ([\Gamma_{ww}^{0110}] + [\Gamma_{ww}^{1001}]) \{W\} = 0\end{aligned}\quad (3.18)$$

onde as matrizes $[\Gamma_{\xi\zeta}^{pqrs}]$, $[\Gamma_i]$, $\{U\}$, $\{V\}$ e $\{W\}$ escrevem-se

$$\begin{aligned}
[\Gamma_{\xi\zeta}^{pqrs}] = & \left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,1111}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,111n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,1n11}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,1n1n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,1121}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,112n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,1n21}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,1n2n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,11m1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,11mn}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,1nm1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,1nmn}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,2111}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,211n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,2n11}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,2n1n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,2121}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,212n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,2n21}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,2n2n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,21m1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,21mn}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,2nm1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,2nmn}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,m111}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,m11n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,mn11}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,mn1n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,m121}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,m12n}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,mn21}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,mn2n}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \gamma_{\zeta,m1m1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,m1mn}^{\xi,pqrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\zeta,mnm1}^{\xi,pqrs} & \cdots & \gamma_{\zeta,mnmn}^{\xi,pqrs} \end{array} \right] \end{array} \right] \\
[\Gamma_i] = & \left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} \eta_{1111}^i & \cdots & \eta_{111n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{1n11}^i & \cdots & \eta_{1n1n}^i \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{1121}^i & \cdots & \eta_{112n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{1n21}^i & \cdots & \eta_{1n2n}^i \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{11m1}^i & \cdots & \eta_{11mn}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{1nm1}^i & \cdots & \eta_{1nmn}^i \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} \eta_{2111}^i & \cdots & \eta_{211n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{2n11}^i & \cdots & \eta_{2n1n}^i \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{2121}^i & \cdots & \eta_{212n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{2n21}^i & \cdots & \eta_{2n2n}^i \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{21m1}^i & \cdots & \eta_{21mn}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{2nm1}^i & \cdots & \eta_{2nmn}^i \end{array} \right] \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} \eta_{m111}^i & \cdots & \eta_{m11n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{mn11}^i & \cdots & \eta_{mn1n}^i \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{m121}^i & \cdots & \eta_{m12n}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{mn21}^i & \cdots & \eta_{mn2n}^i \end{array} \right] & \cdots & \left[\begin{array}{ccc} \eta_{m1m1}^i & \cdots & \eta_{m1mn}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{mnm1}^i & \cdots & \eta_{mnmn}^i \end{array} \right] \end{array} \right] \\
\{U\} = & \left[U_{11} \ \cdots \ U_{1n} \ U_{21} \ \cdots \ U_{2n} \ \cdots \ U_{m1} \ \cdots \ U_{mn} \right]^T \\
\{V\} = & \left[V_{11} \ \cdots \ V_{1n} \ V_{21} \ \cdots \ V_{2n} \ \cdots \ V_{m1} \ \cdots \ V_{mn} \right]^T \\
\{W\} = & \left[W_{11} \ \cdots \ W_{1n} \ W_{21} \ \cdots \ W_{2n} \ \cdots \ W_{m1} \ \cdots \ W_{mn} \right]^T.
\end{aligned}$$

(3.19)

Devido à independência e arbitrariedade dos deslocamentos $\{\delta U\}$, $\{\delta V\}$ e $\{\delta W\}$ a expressão (3.18) é válida somente se

$$\begin{aligned}
& (A_{11} [\Gamma_{uu}^{1100}] + A_{66} [\Gamma_{uu}^{0011}]) \{U\} + (A_{12} [\Gamma_{vu}^{0110}] + A_{66} [\Gamma_{vu}^{1001}]) \{V\} + \frac{A_{12}}{R} [\Gamma_{wu}^{0100}] \{W\} = 0 \\
& (A_{12} [\Gamma_{uv}^{1001}] + A_{66} [\Gamma_{uv}^{0110}]) \{U\} + (A_{22} [\Gamma_{vv}^{0011}] + A_{66} [\Gamma_{vv}^{1100}]) \{V\} + \frac{A_{22}}{R} [\Gamma_{wv}^{0001}] \{W\} = 0 \\
& \frac{A_{12}}{R} [\Gamma_{uw}^{1000}] \{U\} + \frac{A_{22}}{R} [\Gamma_{vw}^{0010}] \{V\} + \left[\frac{A_{22}}{R^2} [\Gamma_{ww}^{0000}] + D_{11} [\Gamma_{ww}^{2200}] + D_{12} ([\Gamma_{ww}^{0220}] + [\Gamma_{ww}^{2002}]) \right. \\
& \left. + D_{22} [\Gamma_{ww}^{0022}] + 4D_{66} [\Gamma_{ww}^{1111}] - \frac{G_r J_r}{K} ([\Gamma_0] + [\Gamma_b]) \right] \{W\} - \bar{N}_{xy} ([\Gamma_{ww}^{0110}] + [\Gamma_{ww}^{1001}]) \{W\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Observando as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
[\Gamma_{ww}^{0220}] &= [\Gamma_{ww}^{2002}] & [\Gamma_{ww}^{0110}] &= [\Gamma_{ww}^{1001}] & [\Gamma_{uv}^{1001}] &= [\Gamma_{vu}^{0110}] \\
[\Gamma_{uv}^{0110}] &= [\Gamma_{vu}^{1001}] & [\Gamma_{uw}^{1000}] &= [\Gamma_{wu}^{0100}] & [\Gamma_{vw}^{0010}] &= [\Gamma_{wv}^{0001}],
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e definindo as matrizes $[R]$ e $[R_0]$

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] & [R_{13}] \\ [R_{12}] & [R_{22}] & [R_{23}] \\ [R_{13}] & [R_{23}] & [R_{33}] \end{bmatrix} \quad [R_0] = -2 \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Gamma_{ww}^{0110}] \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

com

$$\begin{aligned}
[R_{11}] &= A_{11} [\Gamma_{uu}^{1100}] + A_{66} [\Gamma_{uu}^{0011}] & [R_{12}] &= A_{12} [\Gamma_{vu}^{0110}] + A_{66} [\Gamma_{vu}^{1001}] & [R_{13}] &= \frac{A_{12}}{R} [\Gamma_{wu}^{0100}] \\
[R_{22}] &= A_{22} [\Gamma_{vv}^{0011}] + A_{66} [\Gamma_{vv}^{1100}] & [R_{23}] &= \frac{A_{22}}{R} [\Gamma_{wv}^{0001}] \\
[R_{33}] &= \frac{A_{22}}{R^2} [\Gamma_{ww}^{0000}] + D_{11} [\Gamma_{ww}^{2200}] + 2D_{12} [\Gamma_{ww}^{0220}] + D_{22} [\Gamma_{ww}^{0022}] + 4D_{66} [\Gamma_{ww}^{1111}] - \frac{G_r J_r}{K} ([\Gamma_0] + [\Gamma_b])
\end{aligned} \tag{3.23}$$

obtem-se o problema de autovalor

$$([R] + \bar{N}_{xy} [R_0]) \{\bar{U}\} = \{0\} \quad \{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{W\} \end{Bmatrix}. \tag{3.24}$$

O menor autovalor $\lambda_{cr} = \bar{N}_{xy}$ em módulo fornece a carga de flambagem do painel cilíndrico reforçado, dadas as hipóteses do problema de flambagem linear simplificado.

Seja, então, o campo de deslocamentos (3.13) definido por

$$\begin{aligned} X_{ui}(x) &= \text{sen } \lambda_i x & X_{vi}(x) &= \cos \lambda_i x & X_{wi}(x) &= \text{sen } \lambda_i x \\ Y_{uj}(x) &= \cos \lambda_j y & Y_{vj}(x) &= \text{sen } \lambda_j y \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \quad \lambda_j = \frac{j\pi}{b}. \quad (3.26)$$

As quantidades U_{ij}, V_{ij}, W_{ij} são coeficientes de ponderação a serem determinados pelo método de solução. Observa-se que o campo satisfaz às seguintes condições de contorno essenciais

$$u_1(0, y) = u_1(a, y) = v_1(x, 0) = v_1(x, b) = w_1(0, y) = w_1(a, y) = 0 \quad (3.27)$$

e, também, satisfaz às condições de contorno naturais

$$N_{xy1}(0, y) = N_{xy1}(a, y) = N_{xy1}(x, 0) = N_{xy1}(x, b) = 0. \quad (3.28)$$

O método de Rayleigh-Ritz exige que as funções de aproximação satisfaçam apenas as condições de contorno essenciais. Entretanto, ao se garantir também a satisfação das condições naturais, restringe-se o espaço de funções no qual o método busca soluções. Com isso pode-se esperar a obtenção de melhores resultados, em comparação com funções de aproximação que satisfaçam apenas às condições essenciais.

Com relação à função $Y_j^w(y)$, utilizam-se aqui duas séries de funções trigonométricas hierárquicas: a aproximação de Beslin (BESLIN e NICOLAS, 1996) e a aproximação trigonométrica enriquecida. Em uma série dita hierárquica, as primeiras funções satisfazem às condições de contorno do problema, enquanto as demais não interferem no contorno e servem apenas para o refinamento sucessivo da solução. Em problemas que exijam continuidade C^1 , os quatro primeiros termos da série devem satisfazer às condições de contorno, e os demais termos (hierárquicos) e suas primeiras derivadas são definidos de forma que se anulem no contorno. O espaço representado pelas n primeiras funções da série é um subespaço do espaço representado pelas $n + 1$ primeiras funções.

3.3 Aproximação de Beslin

Aplicando a condição de contorno $w(x, y) = 0$ nas bordas $y = 0, b$ escreve-se a aproximação hierárquica de Beslin para $0 \leq y \leq b$ na forma

$$\begin{aligned} Y_{w1}(y) &= \operatorname{sen} \frac{\pi(y+b)}{2b} \operatorname{sen} \frac{-\pi(y+b)}{b} \\ Y_{w2}(y) &= \operatorname{sen} \frac{\pi(y-2b)}{2b} \operatorname{sen} \frac{\pi(y-2b)}{b} \\ Y_{wj}(y) &= \operatorname{sen} \frac{\pi(j-4)y}{b} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $j > 2$. A Figura 3.1a apresenta as oito primeiras funções da base de Beslin.

Observa-se que cada termo da série (3.29) tem deslocamento nulo nos contornos

$$w_1(x, 0) = w_1(x, b) = 0, \quad (3.30)$$

o que complementa as condições de contorno essenciais (3.27) em vista de (3.11). A série de Beslin possui boa estabilidade numérica em comparação com séries polinomiais, pois a ordem máxima da aproximação está relacionada ao período de funções trigonométricas, e não ao expoente de potências. Percebe-se também que cada termo de ordem $j > 2$ possui $j - 1$ raízes.

3.4 Aproximação Trigonométrica Enriquecida

A aproximação hierárquica trigonométrica enriquecida para $y = 0, b$ é dada por

$$\begin{aligned} Y_{w1}(y) &= -\frac{5y^4}{2b^3} + 6\frac{y^3}{b^2} - \frac{9y^2}{2b} + y \\ Y_{w2}(y) &= \frac{5y^4}{2b^3} - 4\frac{y^3}{b^2} + \frac{3y^2}{2b} \\ Y_{wj}(y) &= \cos \frac{(j-5)\pi y}{b} + 15\frac{y^4}{b^4} - 32\frac{y^3}{b^3} + 18\frac{y^2}{b^2} - 1 + \left(15\frac{y^4}{b^4} - 28\frac{y^3}{b^3} + 12\frac{y^2}{b^2}\right) (-1)^{j-5} \end{aligned} \quad (3.31)$$

para $j > 2$. A Figura 3.1b apresenta as oito primeiras funções da série.

É uma série de cossenos acrescida de um polinômio de quarta ordem, que é determinado criteriosamente de forma a possibilitar a aceleração da convergência da série segundo a teoria da série de Fourier. Atualmente, a aproximação trigonométrica enriquecida encontra-se em desenvolvimento no Laboratório de Modelagem Estrutural (LME) da Divisão de Engenharia Civil do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

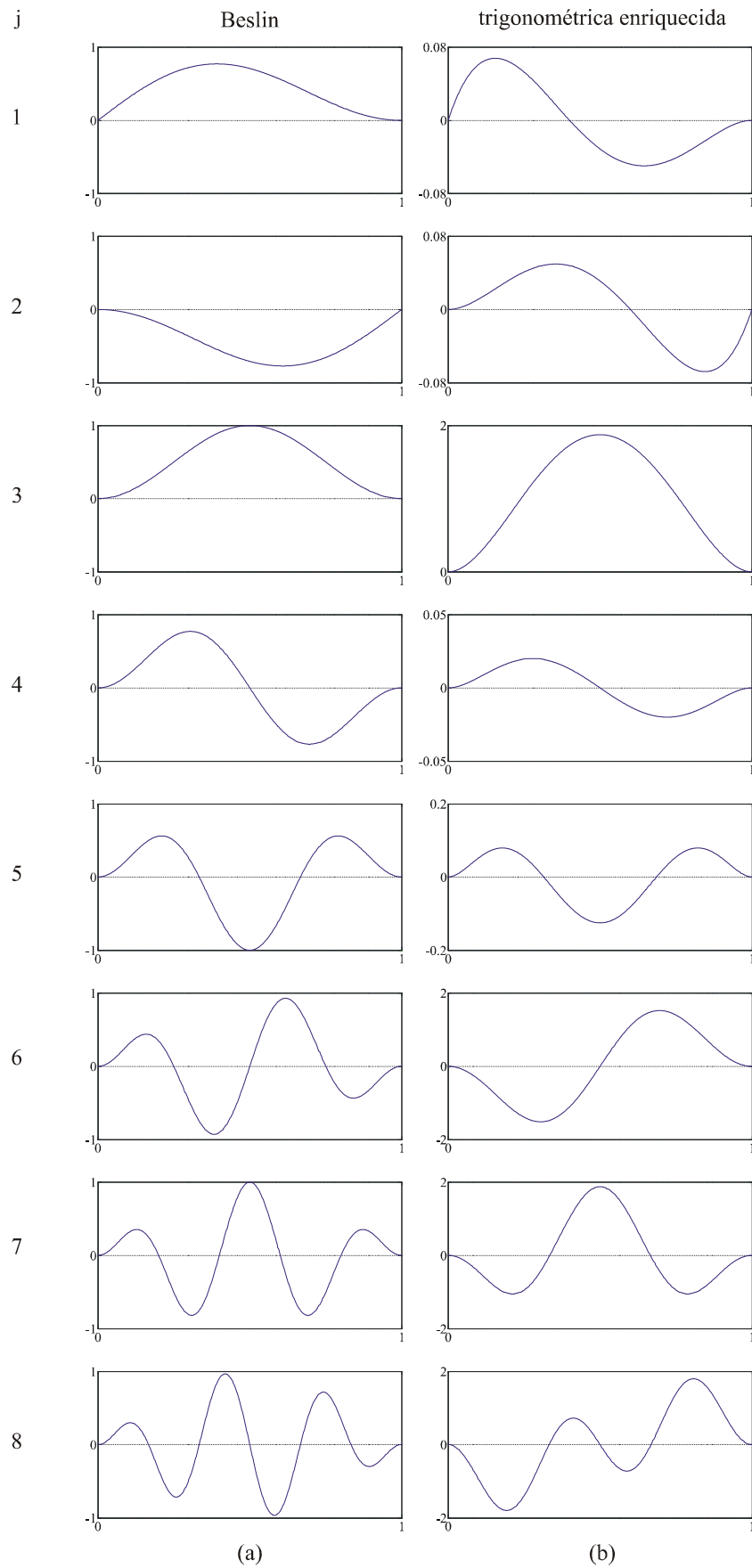


Figura 3.1 Funções de aproximação: (a) Beslin; (b) trigonométrica enriquecida.

Capítulo 4

Aplicações Numéricas

A validação dos procedimentos desenvolvidos para a determinação da carga de flambagem local do revestimento de uma casca cilíndrica reforçada sujeita a torção é realizada por meio de ensaios numéricos de modelos de elementos finitos. Para uma série de doze painéis, comparam-se os resultados obtidos pela solução do problema de autovalor linear (3.24) com os resultados de modelos de elementos finitos.

O problema de autovalor é implementado na plataforma computacional MATLAB. No cálculo das matrizes $[R]$ e $[R_0]$ (3.22) utiliza-se integração numérica empregando-se a função *quadl*, que aproxima a integral de uma função pelo método recursivo da quadratura de Lobatto. Adota-se precisão de 10^{-10} para a convergência das integrações. Adicionalmente, a fim de se evitar erros numéricos no cálculo do autovalor, substitui-se por zero a integral cujo valor é menor que a precisão. O autovalor é determinado pela função *eig*.

As funções de aproximação são dadas por (3.25) empregando em Y_j^w a série de Beslin (3.29) e a série trigonométrica enriquecida (3.31), inicialmente truncadas no segundo termo $m = n = 2$. Adicionam-se novos termos (mantendo sempre $m = n$) até que se atinjam os valores de convergência $e = 5\%$, $e = 1\%$.

Com relação à análise por elementos finitos, diferentemente do problema apresentado no Capítulo 2, a estrutura analisada é uma casca cilíndrica reforçada e não apenas um painel isolado entre reforçadores. A razão de se modelar a casca cilíndrica é tentar garantir que a torção dos reforçadores longitudinais seja, de fato, distribuída ao longo das bordas dos painéis do revestimento. Os reforçadores longitudinais são idênticos e igualmente espaçados, enquanto que os reforçadores circunferenciais são substituídos pelas condições de contorno

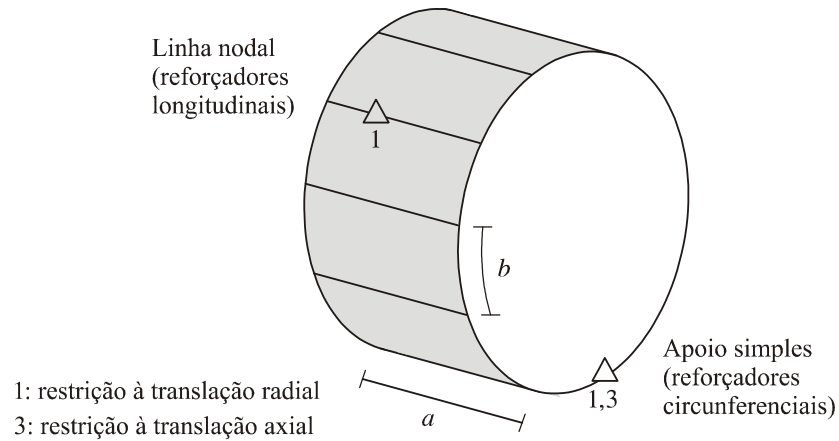


Figura 4.1 Restrições dos deslocamentos.

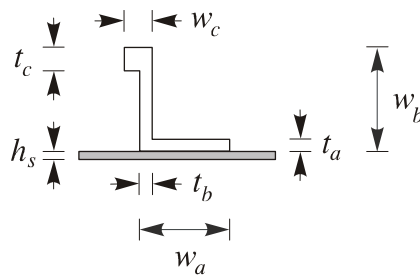


Figura 4.2 Dimensões do reforçador.

da Figura 4.1. Garante-se, assim, uma linha nodal que restringe o deslocamento radial dos reforçadores longitudinais.

A análise é realizada pela solução SOL 105 (*Linear Buckling*) do pacote comercial de elementos finitos NASTRAN (MSC, 2008). O revestimento é modelado por elementos de placa do tipo CQUAD4. Na discretização utilizam-se $a/20$ elementos na direção axial e $b/20$ elementos entre reforçadores na direção circunferencial, onde a é o comprimento do painel e b é a largura entre reforçadores. Os reforçadores longitudinais possuem seção transversal Z (Figura 4.2) e são modelados por $a/20$ elementos de barra do tipo CBAR.

A Tabela 4.1 apresenta a geometria dos painéis analisados. A largura b dos painéis é dada por $b = 2\pi R/n_r$, onde n_r é o número total de reforçadores da casca cilíndrica. A Tabela 4.2 contém as dimensões dos reforçadores Z, cuja constante de torção é $J = 57,412 \text{ mm}^4$. As propriedades elásticas do material do revestimento e dos reforçadores encontram-se na Tabela 4.3. O modelo de elementos finitos do painel P4 é mostrado na Figura 4.3.

Tabela 4.1 Geometria dos painéis.

Painel	a (mm)	R (mm)	h (mm)	n_r
P1	400	2000	1	24
P2	400	2000	1	12
P3	400	1000	1	24
P4	400	1000	1	12
P5	600	2000	1	24
P6	600	2000	1	12
P7	600	1000	1	24
P8	600	1000	1	12
P9	800	2000	1	24
P10	800	2000	1	12
P11	800	1000	1	24
P12	800	1000	1	12

Tabela 4.2 Geometria dos reforçadores.

Largura (mm)		Espessura (mm)	
w_a	19,05	t_a	1,27
w_b	19,05	t_b	1,27
w_c	5,50	t_c	3,00

Tabela 4.3 Materiais dos painéis.

Elemento	E (N/mm ²)	ν
Revestimento	72400	0,33
Reforçador	71020	0,33

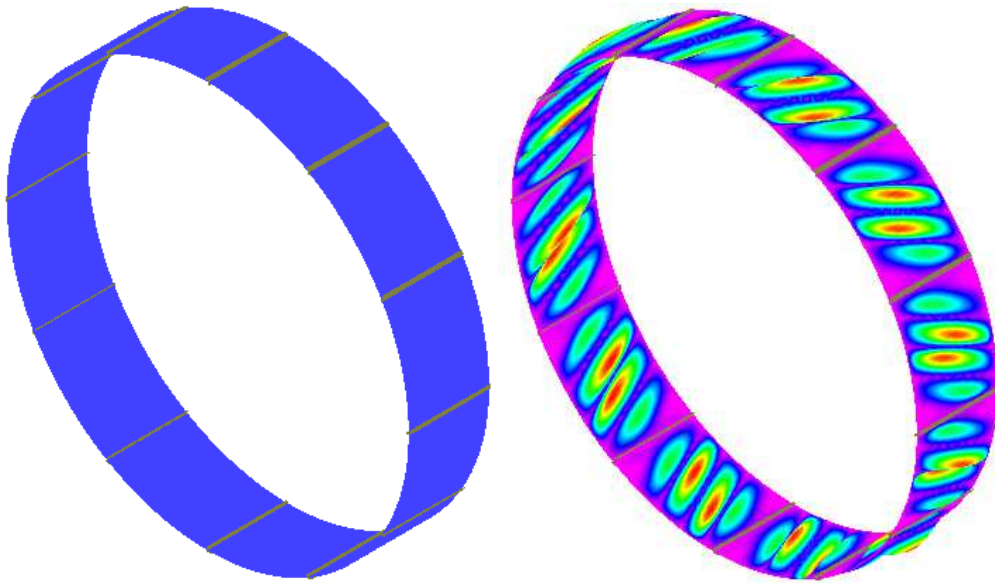


Figura 4.3 Modelo de elementos finitos do painel P4: configuração indeformada e flambada.

Os resultados obtidos sob o critério de convergência $e = 5\%$ para as séries trigonométricas hierárquicas apresentadas no Capítulo 3 são comparados com os resultados dos modelos de elementos finitos na Tabela 4.4. A quantidade m indica o número de termos hierárquicos necessários para a convergência da série. Na coluna B encontram-se os resultados para a série de Beslin e na coluna TE os resultados para a série trigonométrica enriquecida. A Tabela 4.5 apresenta os resultados empregando o critério de convergência $e = 1\%$. Os gráficos da Figura 4.4 mostram a evolução da carga crítica conforme se adicionam sucessivos termos hierárquicos considerando $e = 1\%$. A Figura 4.3 apresenta a configuração flambada do modelo do painel P4.

A partir da Figura 4.4b, nota-se que os painéis P2 e P10 não apresentam monotonicidade da convergência quando se emprega a série trigonométrica enriquecida, o que reflete na diferença dos valores de carga crítica obtidos apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5. A falta de monotonicidade é decorrente de uma instabilidade numérica da série trigonométrica enriquecida. Analisando a Figura 4.5a, que mostra a função Y_{w4} multiplicada por um fator $K \neq 0$ e a função Y_{w6} , percebe-se que estas se aproximam de funções linearmente dependentes. O mesmo ocorre para Y_{w5} e Y_{w7} , como mostra a Figura 4.5b. A proximidade de forma dessas funções é a causa da instabilidade numérica observada. Contudo, pode-se contornar a instabilidade numérica da série proposta retirando-se da base de funções as componentes

Tabela 4.4 Resultados para $e = 5\%$.

Painel	m		λ_{cr}			Dif. % vs. MEF	
	B	TE	B	TE	MEF	BE	TE
P1	6	7	12,79	12,70	11,84	8,0	7,2
P2	9	7	11,43	17,58	10,27	11,2	71,1
P3	5	5	26,35	26,10	27,19	3,1	4,0
P4	7	8	19,49	19,38	18,98	2,7	2,1
P5	6	6	10,61	10,56	10,16	4,3	3,9
P6	8	9	8,93	9,30	8,33	7,2	11,7
P7	5	5	24,97	24,73	25,49	2,1	3,0
P8	7	8	16,44	16,30	16,16	1,7	0,8
P9	5	6	9,79	9,70	9,43	3,8	2,9
P10	8	9	7,70	7,86	7,32	5,1	7,2
P11	5	5	24,60	24,36	24,76	0,7	1,6
P12	6	7	15,07	14,98	14,69	2,5	1,9

Tabela 4.5 Resultados para $e = 1\%$.

Painel	m		λ_{cr}			Dif. % vs. MEF	
	B	TE	B	TE	MEF	B	TE
P1	6	7	12,79	12,70	11,84	8,0	7,2
P2	10	11	11,41	11,39	10,27	11,1	10,9
P3	5	6	26,35	25,98	27,19	3,1	4,5
P4	8	9	19,42	19,34	18,98	2,3	1,9
P5	6	7	10,62	10,50	10,16	4,3	3,3
P6	9	11	8,87	8,86	8,33	6,5	6,3
P7	5	6	24,97	24,59	25,49	2,1	3,5
P8	7	9	16,44	16,26	16,16	1,7	0,6
P9	6	7	9,75	9,64	9,43	3,5	2,3
P10	9	11	7,69	7,67	7,32	5,0	4,7
P11	5	6	24,60	24,24	24,76	0,7	2,1
P12	7	8	14,98	14,85	14,69	1,9	1,1

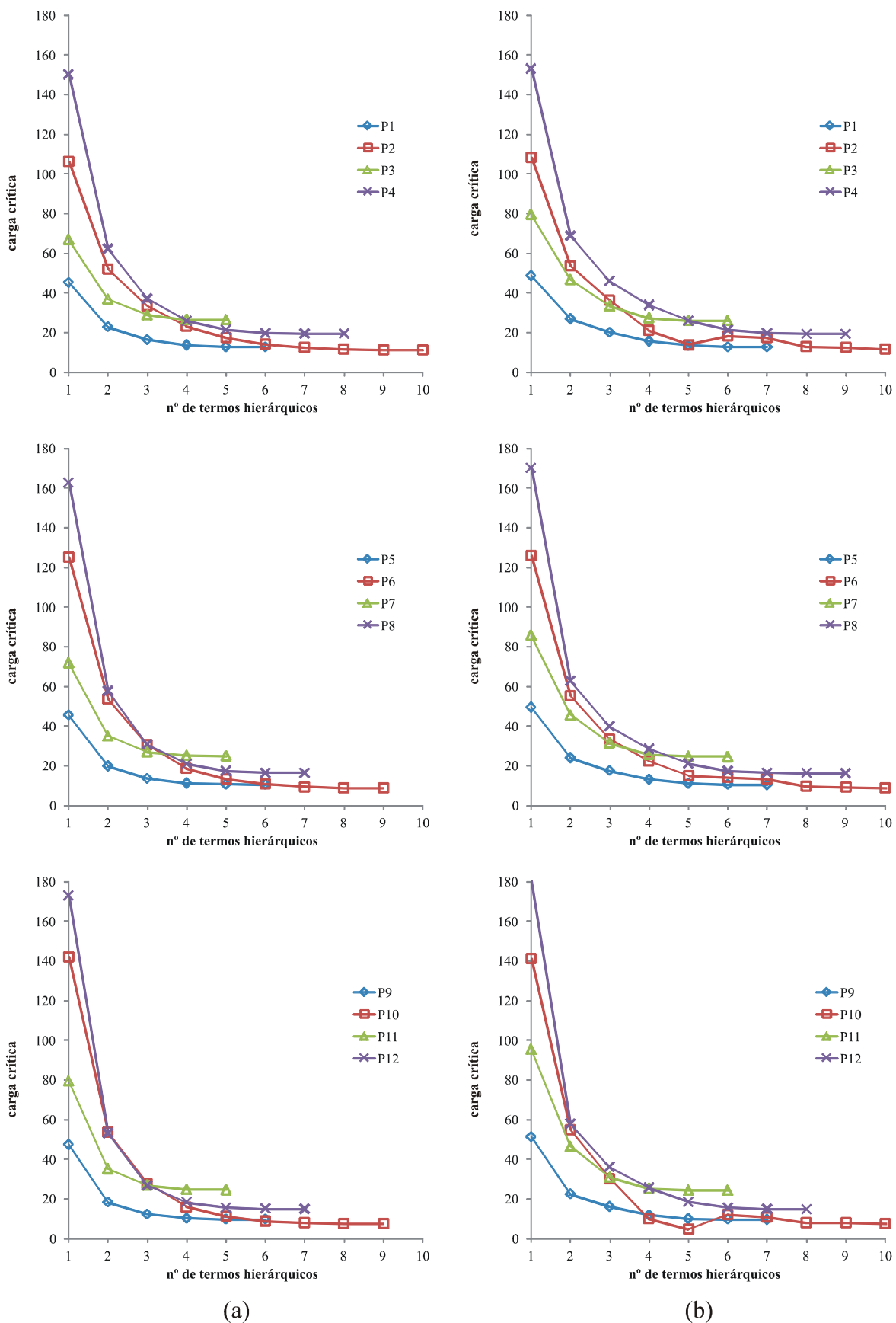


Figura 4.4 Convergência sob o critério $e = 1\%$: (a) Beslin; (b) trigonométrica enriquecida.

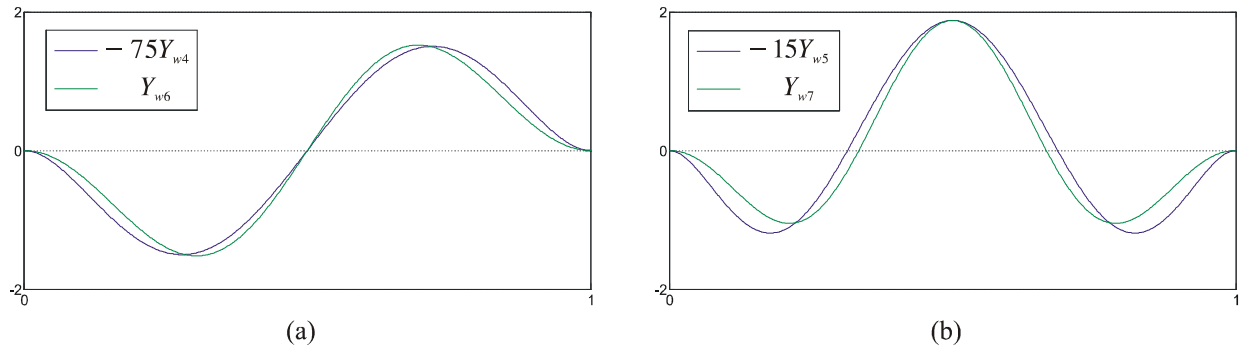


Figura 4.5 Componentes Y_{w4} , Y_{w5} , Y_{w6} e Y_{w7} da série trigonométrica enriquecida.

Y_{w6} e Y_{w7} . Os resultados para essa nova série encontram-se nas Tabelas 4.7 e 4.8, onde TE* significa que a série trigonométrica enriquecida é a modificada. A Figura 4.6 mostra a convergência da nova série.

A instabilidade numérica da série trigonométrica afeta principalmente os resultados do painel P2. Exceção a parte, a diferença entre a carga crítica determinada pela solução obtida e a carga crítica determinada pelos modelos de elementos finitos é menor que 12% para o critério de convergência $e = 5\%$ e menor ou igual a 8% para o critério $e = 1\%$. O número de termos hierárquicos necessários para a convergência está entre 5 e 11. Para o critério $e = 1\%$, os resultados da série de Beslin, da série enriquecida e da série enriquecida modificada não apresentam discrepâncias entre si. As diferenças médias dos resultados obtidos pelas soluções propostas com relação aos resultados dos modelos de elementos finitos são apresentadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 Diferenças médias com relação aos modelos de elementos finitos.

Convergência	Dif. média %		
	B	TE	TE*
$e = 5\%$	4,4	9,8	4,3
$e = 1\%$	4,2	4,0	4,2

Tabela 4.7 Resultados da série enriquecida modificada para $e = 5\%$.

Painel	m		λ_{cr}			Dif. % vs. MEF	
	TE	TE*	TE	TE*	MEF	TE	TE*
P1	7	6	12,70	12,80	11,84	7,2	8,1
P2	7	9	17,58	11,43	10,27	71,1	11,3
P3	5	5	26,10	26,38	27,19	4,0	3,0
P4	8	7	19,38	19,49	18,98	2,1	2,7
P5	6	6	10,56	10,60	10,16	3,9	4,3
P6	9	8	9,30	8,93	8,33	11,7	7,2
P7	5	5	24,73	25,02	25,49	3,0	1,8
P8	8	7	16,30	16,44	16,16	0,8	1,7
P9	6	5	9,70	9,79	9,43	2,9	3,8
P10	9	8	7,86	7,70	7,32	7,2	5,2
P11	5	5	24,36	24,66	24,76	1,6	0,4
P12	7	6	14,98	15,07	14,69	1,9	2,6

Tabela 4.8 Resultados da série enriquecida modificada para $e = 1\%$.

Painel	m		λ_{cr}			Dif. % vs. MEF	
	TE	TE*	TE	TE*	MEF	TE	TE*
P1	7	6	12,70	12,80	11,84	7,2	8,1
P2	11	10	11,39	11,41	10,27	10,9	11,1
P3	6	5	25,98	26,38	27,19	4,5	3,0
P4	9	8	19,34	19,42	18,98	1,9	2,3
P5	7	6	10,50	10,60	10,16	3,3	4,3
P6	11	9	8,86	8,87	8,33	6,3	6,5
P7	6	5	24,59	25,02	25,49	3,5	1,8
P8	9	7	16,26	16,44	16,16	0,6	1,7
P9	7	6	9,64	9,75	9,43	2,3	3,4
P10	11	9	7,67	7,69	7,32	4,7	5,1
P11	6	7	24,24	24,35	24,76	2,1	1,7
P12	8	7	14,85	14,98	14,69	1,1	2,0

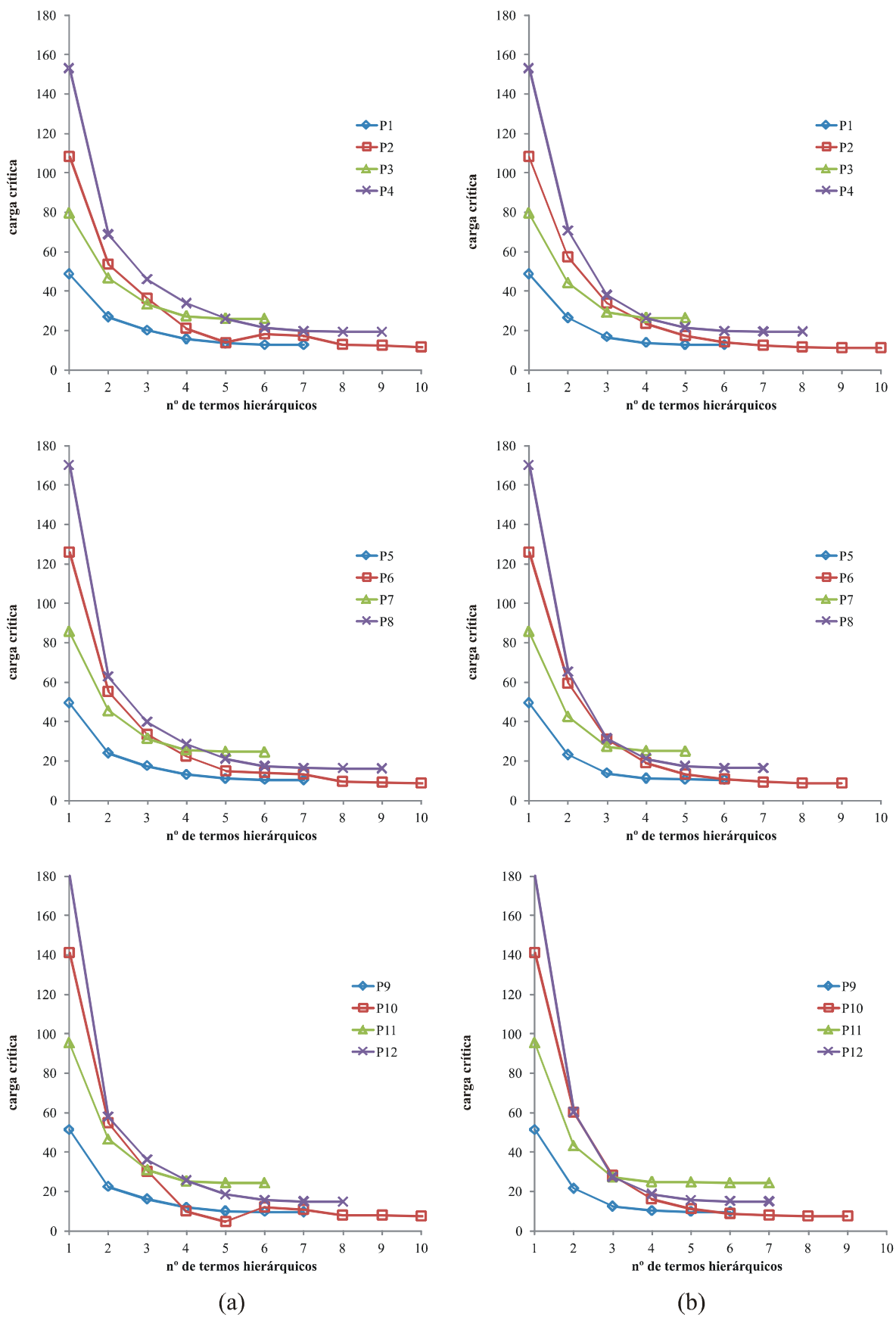


Figura 4.6 Convergência sob o critério $e = 1\%$: (a) série original; (b) série modificada.

Capítulo 5

Conclusão

Um método simples de obtenção da carga de flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção uniforme é desenvolvido, no qual apenas um trecho do revestimento entre reforçadores é analisado.

Na formulação, considera-se a rigidez torsional dos reforçadores longitudinais. Emprega-se o método de Rayleigh-Ritz com funções de aproximação de natureza trigonométrica hierárquica. A solução é de fácil programação e fornece uma ferramenta para a fase preliminar de projeto.

Os resultados obtidos são comparados com modelos de elementos finitos, de onde se conclui que:

- as diferenças absolutas entre os resultados por elementos finitos e pela solução desenvolvida são menores que 10%, com exceção de alguns painéis;
- a diferença média entre os resultados dos elementos finitos e da solução é próxima de 4%;
- em geral, menos de 10 termos hierárquicos são necessários para a convergência das séries;
- para o critério $e = 1\%$, as séries trigonométricas avaliadas (Beslin, enriquecida e modificada) possuem desempenhos semelhantes e não apresentam discrepâncias entre si.

Por fim, apresentam-se algumas sugestões para trabalho futuros:

- tornar adimensional as equações da formulação para se evitar problemas de instabilidade numérica;
- aplicar uma série de polinômios como função de aproximação do deslocamento transversal do painel;
- considerar na formulação o efeito de torção não uniforme dos reforçadores;
- introduzir a rigidez de torção dos reforçadores circunferenciais.

Referências

- BAZANT, Z.P., and CEDOLIN, L., 2003, *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*, Dover, Mineola.
- BESLIN, O., and NICOLAS, J., 1996, “A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 202(5), pp. 633-655.
- BISAGNI, C., and VESCOVINI, R., 2009, “Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 66, pp. 535-570.
- BUERMANN, P., ROLFES, R., TESSMER J., and SCHAGERL, M., 2006, “A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer- and frame- stiffened cylindrical panels”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 44, pp. 102-114.
- BRUHN, E.F., 1973, *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Tri-State Offset, Cincinnati.
- BRUSH, D.O., and ALMORTH, B.O., 1975, *Buckling of bars, plates, and shells*, McGraw-Hill, New York.
- FUJIKUBO, M., and YAO, T., 1999, “Elastic local buckling strength of stiffened plate considering plate/stiffener interaction and welding residual stress”, *Mar. Struct.*, vol. 12, pp. 543-564.
- KRAUS, H., 1967, *Thin Elastic Shells*, John Wiley, New York.

MONTEIRO, F.A.C., LUCENA NETO, E., and HERNANDES, J.A., 2011, “Local Skin Buckling of fuselages”, *XXXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*.

MONTEIRO, F.A.C., LUCENA NETO, E., and HERNANDES, J.A., 2012, “Local Skin Buckling of Cylindrical Shells”, *10th World Congress on Computational Mechanics*.

MSC, 2008, *Quick Reference Guide*, MSC Software Corporation.

NATH, Y., and SANDEEP, K., 2000, “Nonlinear analysis of doubly curved shells: an analytical approach”, *Sadhana*, vol. 25, pp. 343-352.

PEVZNER, P., ABRAMOVICH, H., and WELLER, T., 2008, “Calculation of the collapse load of an axially compressed laminated composite stringer-stiffened curved panel - an engineering approach”, *Composite Struct.*, vol. 83, pp. 341-353.

YAMAKI, N., 1984, *Elastic stability of circular cylindrical shells*, Elsevier, Amsterdam.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TC</p>	^{2.} DATA <p style="text-align: center;">20 de novembro de 2012</p>	^{3.} REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/TC-066/2012</p>	^{4.} N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">48</p>
^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção.</p>			
^{6.} AUTOR(ES): <p>Paulo de Tarso Machado Leite Soares</p>			
^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Flambagem; Cascas cilíndricas reforçadas, Método de Rayleigh-Ritz.</p>			
^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Flambagem; Análise estrutural; Cascas cilíndricas; Cascas (formas estruturais); Método de Rayleigh-Ritz; Engenharia estrutural; Engenharia civil.</p>			
^{10.} APRESENTAÇÃO: <div style="float: right; text-align: right;"> <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional </div> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Graduação em Engenharia Civil-Aeronáutica. Orientador: Prof. Ph.D. Eliseu Lucena Neto; co-orientador: Prof. M.Sc. Francisco Alex Correia Monteiro. Publicado em 2012.</p>			
^{11.} RESUMO: <p>Um método para obtenção da carga de flambagem local do revestimento de cascas cilíndricas reforçadas sob torção uniforme é apresentado, no qual considera-se somente um trecho do revestimento entre reforçadores adjacentes. O problema de flambagem é formulado por um procedimento linear simplificado, e solucionado pelo método de Rayleigh-Ritz utilizando séries de origem trigonométrica nas funções de aproximação. No cálculo da carga crítica considera-se que os reforçadores longitudinais forneçam rigidez à rotação do revestimento e que os reforçadores circunferenciais forneçam apenas apoios simples. Valida-se o procedimento proposto por meio de resultados de modelos de elementos finitos.</p>			
^{12.} GRAU DE SIGILO: <p><input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> CONFIDENCIAL <input type="checkbox"/> SECRETO</p>			