## INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Gustavo Assis Medeiros

Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta

> Trabalho de Graduação Ano 2004

# Infra-Estrutura Aeronáutica

#### Gustavo Assis Medeiros

## Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta

Orientador Prof. Dr Flávio Mendes Neto (ITA)

Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS

CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

#### Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Medeiros, Gustavo Assis

Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta / Gustavo Assis Medeiros.

São José dos Campos, 2004.

61f.

Trabalho de Graduação – Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica— Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004. Orientador: Prof. Dr Flávio Mendes Neto.

 Análise estrutural.
 Concreto armado.
 Flexão. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica. II. Título

### REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Medeiros, Gustavo Assis. Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta. 2004. 61f. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

#### CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Gustavo Assis Medeiros TÍTULO DO TRABALHO: Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação / 2004

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Gustavo Assis Medeiros Rua Maria José, 1-34, apto. 52, Centro, CEP 17015-440, Bauru - SP

## Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta

Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação

Gustavo Assis Medeiros

Autor

ar Flavio Mendes Neto (

Prientador

Prof. Dr Eliseu Lucena Neto

Coordenador do Curso de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica

São José dos Campos, 26 de novembro de 2004

## Conteúdo

1	Intr	oduçã	0	1
2	Fun	cional	dades do software	3
	2.1	Cálcul	o de esforços resistentes	5
	2.2	Cálcul	o de verificação	5
	2.3	Dimer	asionamento da área de armadura	6
	2.4	Diagra	ama de interação	6
3	Ma	nual de	o usuário	8
	3.1	Entra	da de dados	8
		3.1.1	Unidades	8
		3.1.2	Concreto	10
		3.1.3	Aço	10
		3.1.4	Seção de concreto	10
		3.1.5	Barras de armadura	11
		3.1.6	Bitolas industriais	11
		3.1.7	Retirando o esforço normal do CG da seção	13
		3.1.8	Salvando e restaurando dados	13
	3.2	Funcio	onalidades	14
		3.2.1	Cálculo de esforços resistentes	14
		3.2.2	Cálculo de verificação	14
		3.2.3	Dimensionamento da área de armadura	15
		3.2.4	Diagrama de interação	15
4	Exe	mplos	numéricos	19
	4.1	Seção	retangular com 16 barras sujeita a FNC	19

	4.2	Seção circular com 8 barras sujeita a FOC	20
	4.3	Cálculo de esforços de uma seção sujeita a FOC	23
5	Con	aclusões	24
	5.1	Sugestões de continuidade de trabalho	25
$\mathbf{A}$	Pro	cessos de cálculo	26
	A.1	Seção Transversal	26
	A.2	Equação cinemática	26
	A.3	Circuição	26
	A.4	Cálculo dos esforços resistentes	27
		A.4.1 Esforços resistentes do concreto	28
		A.4.2 Esforços resistentes da armadura	33
	A.5	Cálculo de verificação de seções transversais	33
		A.5.1 Newton-Raphson	34
		A.5.2 Derivadas dos esforços resistentes	35
		A.5.3 Verificação do Estado Limite Último	40
	A.6	Dimensionamento	42
	A.7	Diagrama de interação	43
	A.8	Adimensionais	44

## Lista de Figuras

3.1	Tela inicial do programa	9
3.2	Especificação das unidades	10
3.3	Entrada dos dados do concreto	10
3.4	Entrada de dados do aço	11
3.5	Entrada dos vértices da seção de concreto	11
3.6	Desenho da seção e suas características geométricas	12
3.7	Entrada das posições e áreas, na forma de bitolas industriais, das barras	12
3.8	Entrada das áreas em porcentagem da área total de armadura	12
3.9	Entrada dos valores de bitoas industriais	13
3.10	Aplicar ou não o esforço normal no CG da seção	13
3.11	Salvar ou restaurar dados	14
3.12	Cálculo de esforços resistentes	14
3.13	Cálculo de verificação	15
3.14	Dimensionamento	16
3.15	Botão para acessar o diagrama de interação	16
3.16	Entrada de dados do diagrama de interação	17
3.17	Exemplo de diagrama de interação	18
4.1	Seção retangular com 16 barras	20
4.2	Seção circular com 8 barras	21
4.3	Seção retangular com 4 barras sujeita a FOC	23
A.1	Exemplo de seção transversal estudada	27
A.2	Exemplos de circuição	27
A.3	Infinitésimo da área de concreto	28
A.4	Diagrama parabólico-retangular	31

A.5	Diagrama tensão deformação do aço classe A	34
A.6	Região Viável para pares $(\varepsilon_c, \theta)$ no ELU	42

## Lista de Tabelas

4.1	Resultado do primeiro exemplo	21
4.2	Resultado do segundo exemplo	22
4.3	Resultado do terceiro exemplo	23
A.1	Bitolas Industriais	42

## Lista de símbolos

#### Letras romanas

 $a_i, g_i, h_i$  parâmetros auxiliares (são definidos quando de sua utilização).

 $A_c,\,A_s,\,A_{si}$  área de concreto, área total de aço e área de uma barra de armadura, respectivamente,  $i=1\ldots n$ .

b base de referência da seção, dada pela diferença entre a maior e a menor abscissa da seção  $(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})$ .

 $d_0$  distância da origem do sistema de coordenadas à fibra mais comprimida da seção, medida perpendicularmente à linha neutra.

 $d_1$  distância da barra de aço mais tracionada à fibra mais comprimida da seção, medida perpendicularmente à linha neutra.

dx, dy comprimentos infinitesimais nas direções dos eixos cartesianos.

 $D\left(\varepsilon\right),\ D_{i}$  derivada genérica do diagrama tensão-deformação do material (ou no ponto i).

 $E_s$  módulo de elasticidade do aço.

F variável utilizada na parametrização dos segmentos de reta que delimitam o Estado Limite Último (ELU).

 $f_{ck}$  resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias de idade.

 $f_{ji}$  funções auxiliares (j = 1...11, i corresponde à numeração da aresta da seção transversal) para o cálculo dos esforços resistentes (e suas derivadas) do concreto.

 $f_{yd}$  resistência de cálculo de escoamento do aço  $(=f_{yk}/\gamma_s)$ .

 $f_{yk}$ resistência característica de escoamento do aço.

h altura de referência da seção, dada pela diferença entra a maior e a menor ordenada da seção  $(y_{\rm max}-y_{\rm min})$ .

 $h_{\varphi}$  altura da seção medida perpendicularmente à direção  $\varphi$ .

 $I_1,\,I_2,\,I_3,\,J_1,\,J_2,\,K_1$  funções integrais do diagrama tensão-deformação do material.

 $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  momentos de inércia em relação aos eixos x e y, respectivamente.

 $I_{xy}$  produto de inércia em relação aos eixos (x, y).

 $M_{cx}$ ,  $M_{sx}$ ,  $M_{xR}$ ,  $M_{xd}$  momento fletor na direção x do concreto, do aço, resistente e de cálculo, respectivamente.

 $M_{cx}$ ,  $M_{sy}$ ,  $M_{yR}$ ,  $M_{yd}$  momento fletor na direção y do concreto, do aço, resistente e de cálculo, respectivamente.

n número barras de aço na seção transversal.

N número de vértices da seção de concreto.

 $N_c,\,N_s,\,N_R,\,N_d$  esforço normal do concreto, do aço, resistente e de cálculo, respectivamente.

 $p_i$  porcentagem da área de uma barra em relação à área total de armadura  $\left(=\frac{A_{si}}{A_s}\right)$ .

 $S_x$ ,  $S_y$  momentos estáticos de área em relação aos eixos x e y, respectivamente.

x, y eixos cartesianos. A seção transversal encontra-se no plano (x, y).

 $x_i, y_i$  coordenadas de um vértice da seção de concreto,  $i = 1 \dots N$ .

 $x_{si}, y_{si}$  coordenadas do cento geométrico (CG) da barra  $i, i = 1 \dots n$ .

 $x_{\varepsilon \max}, y_{\varepsilon \max}$  coordenadas do vértice de concreto de maior deformação  $(\varepsilon_c)$ .

 $x_{\varepsilon \min}$ ,  $y_{\varepsilon \min}$  coordenadas do vértice de concreto de menor deformação.

### Letras romanas em negrito

 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  função vetorial (de três variáveis) avaliada numa iteração i, que armazena a diferença entre os esforços solicitantes e resistentes de uma seção.

 $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  versores dos eixos coordenados (x, y).

 $\mathbf{u}_c$  vetor que une o vértice da seção de concreto de menor deformação ao de maior.

 $\mathbf{x}_i$  vetor de três variáveis avaliado numa iteração i, que armazena a distribuição de deformação da seção.

### Letras gregas minúsculas

 $\beta_1$  profundidade adimensional da barra de aço mais tracionada (=  $d_1/h_{\varphi}$ ).

 $\gamma_c$  coeficiente de ponderação da resistência do concreto.

 $\gamma_s$  coeficiente de ponderação da resistência do aço.

 $\varepsilon$  deformação genérica (encurtamentos são positivos e alongamentos são negativos).

 $\varepsilon_c$  encurtamento máximo na seção de concreto (em  $^o/_{oo}$ ).

 $\varepsilon_i$  deformação no ponto i (concreto ou armadura).

 $\varepsilon_o$  deformação na origem do sistema de coordenadas que define a seção transversal.

 $\varepsilon_{yd}$  deformação de cálculo de escoamento do aço classe "A" (em  $^o/_{oo}).$ 

 $\varphi$  direção da linha neutra (medida no sentido trigonométrico, ou seja, anti-horário).

 $\varphi_{\min}$ ,  $\varphi_{\max}$  direção mínima e máxima, respectivamente, da linha neutra que o programa usa na confecção do diagrama de interação.

 $\varphi_c$  ângulo do vetor  $\mathbf{u}_c$  com o eixo horizontal.

 $\varphi_k$  inclinação do vetor curvatura.

 $\kappa$ ,  $\kappa$  vetor curvatura genérico e seu módulo.

 $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  módulo da curvatura da seção na direção x e y, respectivamente.

 $\mu_x$ : momento fletor adimensional na direção  $x \left( = \frac{M_x}{\sigma_{cd} A_c b} \right)$ .

 $\mu_y$ : momento fletor adimensional na direção  $y = \frac{M_y}{\sigma_{cd}A_ch}$ .

 $\nu$ : esforço normal adimensional  $\left(=\frac{N}{\sigma_{cd}A_c}\right)$ .

 $\sigma\left(\varepsilon\right)$  tensão genérica numa fibra com deformação  $\varepsilon$ .

 $\sigma_{cd}$ tensão de cálculo no concreto (= 0,85  $f_{ck}/\gamma_c).$ 

 $\theta$  curvatura majorada adimensional (= 1000 h/r).

 $\omega$ : taxa mecânica de armadura  $\left(=\frac{\dot{A}_s f_{yd}}{\sigma_{cd} A_c}\right)$ .

### Letras gregas maiúsculas

 $\Delta$  diferença.

 $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  matriz Jacobiana (ou Jacobiano) da função  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ .

## Símbolos mistos/especiais

 $\Delta x_i$  incremento de abscissas de um lado da seção tansversal (=  $x_{i+1} - x_i$ ).

 $\Delta y_i$  incremento de ordenadas de um lado da seção tansversal (=  $y_{i+1} - y_i$ ).

 $\Delta \varepsilon_i$  incremento de deformações em um lado da seção tansversal (=  $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ ).

 $\Delta\varphi$ incremento de ângulo da direção da linha neutra a ser usado pelo programa.

## Abreviaturas

CG: centro geométrico da seção transversal "bruta".

ELU: Estado Limite Último.

FNC: Flexão Normal Composta.

FOC: Flexão Oblíqua Composta.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares e namorada, Adriana, pelo apoio e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Flávio Mendes Neto, pela inalterável boa vontade em me ajudar.

Ao pessoal do 236: André, pelas lições de música; Murillo, que ensinou meu irmão de 4 anos a comer caranguejo como um paraense; Lucinaldo, por suas histórias, apesar de nunca terem sido contadas.

Aos amigos Cunha, Rogério, Rapozo, José Artur, Eric e Macapá, companheiros de cinema.

## Resumo

Apresenta-se um software didático para análise de seções transversais de concreto armado submetidas a Flexão Oblíqua Composta, cujas funcionalidades principais são: cálculo de esforços resistentes, cálculo de verificação, dimensionamento da área de armadura e confecção de diagrama de interação (diagrama de Roseta). Este texto apresenta instruções para uso do programa, alguns exemplos numéricos e, em apêndice, todo o embasamento teórico pertinente. Acredita-se que o software desenvolvido possa ser utilizado em cursos de concreto armado, para estudantes de engenharia e arquitetura e, ainda, em escritórios de cálculo para a verificação de casos especiais.

## **Abstract**

A didactic software for reinforced concrete cross section analysis under compression and biaxial bending is presented. Strength and resistant capacity calculation, reinforcement design and interaction diagram plotting are its main functionalities. This text presents program use instructions, some numerical examples and all pertinent theory. It is believed that this software can be used in reinforced concrete courses for engineering and architecture students and, also, in project offices.

Introdução

## Capítulo 1

## Introdução

É notório que a evolução das ferramentas computacionais tem permitido a aplicação de conceitos antes inexeqüíveis, devido aos grandes trabalhos algébricos envolvidos. Assim ocorre com o concreto armado que, durante muito tempo, foi tratado de forma tabelada e com hipóteses simplificadoras, não por falta de conhecimento, mas por falta de um meio que pudesse tornar viável a análise "exata".

O objetivo deste trabalho foi a criação de um software, com interface gráfica, que permitisse a fácil análise de seções transversais de concreto armado submetidas a Flexão Oblíqua Composta, um assunto que, há alguns anos, era tratado de diversas formas simplificadas como, por exemplo, as apresentadas em [5]: processo da superposição de armaduras, que decompõe a flexão oblíqua em duas normais e, após realizado o dimensionamento para cada direção, soma as armaduras encontradas; processo de redução da flexão oblíqua a uma única flexão normal, que exige condições específicas de simetria de uma seção retangular, com o objetivo de tratá-la como um quadrado.

A única hipótese restritiva utilizada nos cálculos feitos pelo *software* é a de seções poligonais. Como, na prática, a maioria das seções possui essa geometria, justifica-se o uso de tal consideração. As seções circulares podem ser aproximadas de forma satisfatória por polígonos regulares de 20 ou mais lados.

Devido a sua interface gráfica, acredita-se que o *software* desenvolvido possa ser utilizado em cursos de concreto armado, para estudantes de engenharia e arquitetura e, ainda, em escritórios de cálculo. Não é possível dimensionar uma edificação inteira, pois o programa trata apenas da seção transversal e não da peça toda, que deve passar também pela análise de estabilidade. O *software*, portanto, é recomendado apenas para

Introdução 2

a verificação ou dimensionamento de casos didáticos ou especiais.

No capítulo "Funcionalidades do software" são explicadas as quatro funcionalidades do programa: cálculo de esforços resistentes, cálculo de verificação, dimensionamento da área de armadura e confecção de diagrama de interação (diagrama de Roseta).

O cálculo de esforços resistentes é feito utilizando-se o teorema de Green, de maneira a executar os cálculos diretamente com as coordenadas dos vértices. Para o cálculo de verificação, utiliza-se o método numérico de Newton-Raphson tridimensional, que permite uma velocidade de convergência quadrática. No dimensionamento, adota-se sempre uma distribuição mono-paramétrica da armadura, com a área total de armadura distribuída igualmente entre as posições de barras previamente definidas pelo usuário. O dimensionamento é realizado de duas maneiras: testando-se as bitolas industriais e calculando-se a área exata de armadura, através do método da bissecção. O diagrama de interação é confeccionado descobrindo-se, para diferentes ângulos da linha neutra, qual distribuição de deformação, pertencente ao estado limite último, gera o esforço normal resistente igual ao solicitante. Para todos os cálculos, utiliza-se o diagrama tensão-deformação parabólico-retangular para concreto comprimido.

No capítulo "Manual do usuário" é apresentado um guia para uso do *software*, já que são quatro funções sendo realizadas em praticamente uma tela, o que pode gerar dúvidas sobre quais dados de entrada são pertinentes para cada operação.

No capítulo "Exemplos numéricos" algumas aplicações são comparadas com a literatura [5]. São analisadas três seções, duas retangulares e uma circular, submetidas a diversos carregamentos.

Em apêndice é exposta, de forma expedita, a teoria usada para a realização dos cálculos. Não houve preocupação com as demonstrações, já presentes claramente na referência [3]. O objetivo deste item é registrar toda a base teórica, na sequência em que foi utilizada na programação.

## Capítulo 2

## Funcionalidades do software

O presente capítulo tem como objetivo mostrar, macroscopicamente, as quatro funcionalidades do *software* implementado: cálculo de esforços resistentes, cálculo de verificação, dimensionamento da área de armadura e confecção de diagrama de interação (diagrama de Roseta). Os detalhes dos métodos de cálculo estão presentes em anexo e as instruções para uso do software, no terceiro capítulo.

Primeiramente, cabe deixar registrado que os dados de entrada e a saída de resultados podem ser com valores tanto dimensionais quanto adimensionais. A importância dos valores com dimensão é óbvia, já que permite ao usuário perceber quais as grandezas envolvidas no problema. Os adimensionais, contudo, são de grande utilidade para a confecção de ábacos e tabelas, pois permitem uma generalização despreocupada com os diferentes sistemas de unidade. Os exemplos 1 e 2, tratados no capítulo 4, foram extraídos de tabelas da literatura [5] com valores adimensionais.

Outra informação pertinente é que a entrada da informação da área de cada barra de aço pode ser feita tanto na forma de bitola industrial, quanto na de porcentagem da área total de armadura.

Uma das hipóteses adotadas na análise do problema é a de Euler-Navier-Bernoulli, ou seja, a seção transversal é plana e continua plana, após se deformar devido aos esforços solicitantes: esforço normal  $(N_d)$ , momento fletor na direção x  $(M_{xd})$  e momento fletor na direção y  $(M_{yd})$ . O conjunto de parâmetros que define esse novo plano da seção transversal costuma apresentar-se de duas formas:  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  ou  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ .

De maneira resumida, as quatro funcionalidades do programa têm como entrada de dados e saída de resultados as informações especificadas a seguir.

#### Cálculo de esforços resistentes

Entrada Saída

Materiais  $(N_R, M_{xR} \in M_{yR})$ 

Unidades Verificação do ELU

Seção de concreto

Posições das barras

Área de armadura

 $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  ou  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ 

#### Cálculo de verificação

Entrada Saída

Materiais  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y) \in (\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ 

Unidades Verificação do ELU

Seção de concreto

Posições das barras

Área de armadura

 $(N_d, M_{xd} \in M_{ud})$ 

#### Dimensionamento da área de armadura

Entrada Saída

Materiais Bitola ótima

Unidades Área exata de armadura

Seção de concreto  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$ 

Posições das barras

Lista das bitolas industriais

Área mínima e máxima, para o cálculo da área exata

 $(N_d, M_{xd} \in M_{yd})$ 

#### Diagrama de interação

Entrada Saída

Materiais Diagrama de interação

Unidades  $N_{d \min}$  e  $N_{d \max}$  que a seção resiste

Seção de concreto

Posições das barras

Área de armadura

 $N_d$ 

 $\varphi_{\min} \in \varphi_{\max}$ 

 $\Delta \varphi$ 

### 2.1 Cálculo de esforços resistentes

O cálculo de esforços resistentes nada mais é do que determinar o terno  $(N_R, M_{xR}$  e  $M_{yR})$ , de esforços resistentes, a partir do conjunto  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  ou  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ . Tal processo, primeiramente, consiste na soma dos esforços resistentes pelo concreto de cada ponto da seção transversal, fazendo-se uso de integral dupla. Aplicando-se o teorema de Green, contudo, é possível fazer esse cálculo trabalhando-se apenas com o contorno da seção e, já que a seção é poligonal, diretamente com as coordenadas dos vértices. Isso facilita sobremaneira a programação da rotina computacional que executa essa operação.

Por fim, somam-se as contribuições de resistência de cada barra, cuja área é considerada concentrada no seu CG. Tal processo não fornece dificuldade alguma, já que a integral dupla é substituída por um somatório.

A verificação do estado limite último (ELU) é realizada, embora não interfira na obtenção dos esforços resistentes. Essa verificação é realizada com a única finalidade de informar se a distribuição de deformação não desrespeita os critérios de resistência recomendados por norma [1].

### 2.2 Cálculo de verificação

O cálculo de verificação nada mais é do que o processo inverso do cálculo de esforços resistentes, ou seja, determinar o terno de distribuição de deformação,  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  ou  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ , dados os esforços solicitantes  $(N_d, M_{xd} \in M_{yd})$ . Essa operação é realizada de

modo iterativo, com uma estimativa inicial de deformação nula,  $(\varepsilon_0, \kappa_x e \kappa_y) = (0.0 e 0)$ , fazendo-se uso do método de Newton-Raphson em três dimensões. Caso a convergência seja atingida, verifica-se o ELU, informando-se ao usuário tal situação, juntamente com a distribuição de deformação obtida. Se a convergência não for atingida, o que significa que a seção não resiste às solicitações, o usuário também é avisado.

#### 2.3 Dimensionamento da área de armadura

Primeiramente, é importante deixar claro que o número e as posições das barras de aço são fornecidos pelo usuário. A hipótese adotada no dimensionamento da área de armadura é de que essa seja distribuída igualmente entre as posições de barras previamente definidas pelo usuário. Essa consideração foi feita porque tal arranjo da armadura é muito comum na prática e um dimensionamento com as bitolas das barras independentes poderia gerar resultados de difícil execução prática, além de exigir ferramentas matemáticas que fogem do escopo deste trabalho.

O dimensionamento é realizado de duas formas. A primeira consiste em atribuiremse as bitolas industriais às barras, em ordem crescente, e verificar qual a menor bitola
permite a seção resistir às solicitações. As bitolas industriais são fornecidas no software,
embora possam ser alteradas pelo usuário. A segunda maneira de dimensionar é encontrar
a área exata de armadura de toda a seção. Para isso, é necessário que o usuário forneça
a área mínima e máxima dentre as quais o programa deve buscar a ótima. O método
numérico de convergência usado nessa operação é o da bissecção. Em cada iteração, a
área em questão é distribuída igualmente entre todas as barras e verifica-se se a seção
resiste aos esforços externos.

### 2.4 Diagrama de interação

Também conhecido como diagrama de Roseta, o diagrama de interação representa, sob esforço normal constante, todos os pares de momentos fletores que levam a seção à ruína, ou seja, ao ELU. Para tal análise, o usuário deve fornecer o intervalo de ângulo de direção da linha neutra ( $\varphi_{\min}$  e  $\varphi_{\max}$ ) que será considerado, além do incremento ( $\Delta \varphi$ ) a ser utilizado dentro dessa faixa. Definidos assim os ângulos a serem analisados, o programa

busca para cada um deles a distribuição de deformação ( $\varepsilon_c$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ ) que gera o esforço normal previamente fixado e, consequentemente, descobre-se o par de valores de momento fletor procurado. Essa pesquisa da deformação não é tão complexa, pois  $\varphi$  está definido para cada ponto e  $\varepsilon_c$  e  $\theta$  tornam-se, na verdade, uma única variável, já que, no ELU, a relação entre eles é conhecida. Uma análise não restrita ao ELU seria ineficiente, dado que esta condição teria que ser atingida no final. O método numérico de convergência usado nessa operação é o das secantes.

Encontrados assim todos os pares  $(M_{xR} e M_{yR})$ , o programa confecciona um gráfico com a escala ajustada aos limites da curva encontrada.

É permitido também ao usuário exportar esses valores de momento para um arquivo de texto, caso seja de seu interesse trabalhar com esses dados em outro programa como, por exemplo, o "Excel".

## Capítulo 3

## Manual do usuário

A finalidade deste capítulo é dar orientações gerais ao usuário quanto ao uso do software. Primeiramente, serão tratadas algumas orientações sobre a entrada de dados da seção, materiais, unidades e, posteriormente, sobre as funcionalidades.

Logo que iniciado o *software*, a tela inicial é a representada na figura 3.1, na qual se percebe que há um exemplo de uma seção retangular com quatro barras de aço. Isso permite ao usuário visualizar todas as funcionalidades e, dessa forma, guiar-se no uso do programa.

Nos itens que se seguem, serão abordadas com detalhe cada funcionalidade dessa tela.

Caso o usuário se esqueça de fornecer algum dado necessário à operação desejada, ou insira algo inválido, o programa o alerta e não realiza a operação.

O separador decimal usado pelo *software* é o ponto. Caso o usuário tente usar vírgula, o programa não reconhecerá o dado de entrada como número, emitindo um aviso de erro.

#### 3.1 Entrada de dados

#### 3.1.1 Unidades

As unidades a serem usadas para força e comprimento devem ser especificadas nos espaços representados na figura 3.2. Além das unidades, é necessário inserir o fator de conversão da unidade das bitolas industriais, fixa em mm, para a de comprimento usada

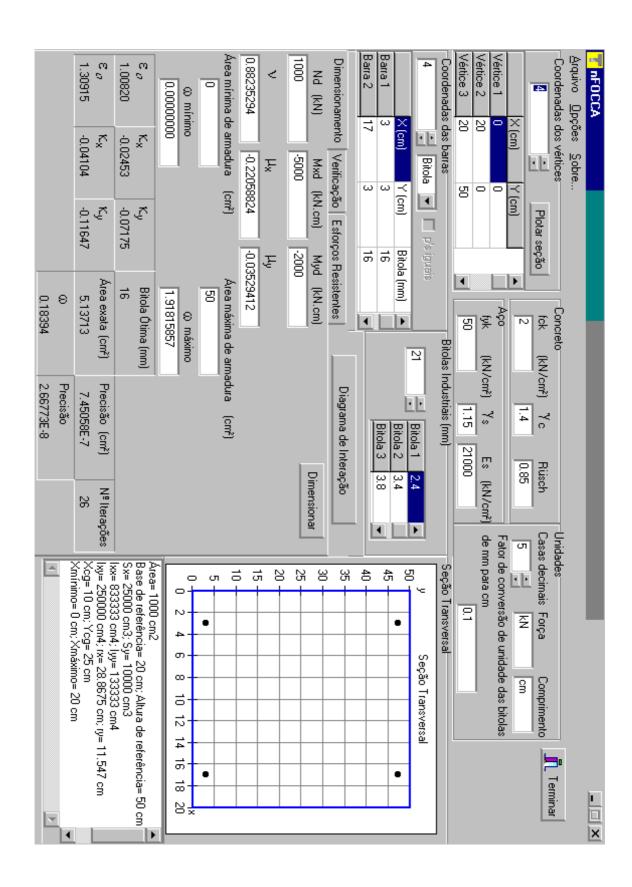


Figura 3.1: Tela inicial do programa

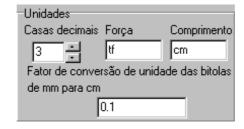


Figura 3.2: Especificação das unidades

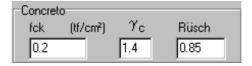


Figura 3.3: Entrada dos dados do concreto

pelo usuário, pois o programa precisa trabalhar internamente com as bitolas na unidade do problema em questão. Também é possível escolher o número de casas decimais com o qual se deseja apresentar os resultados no *software*.

#### 3.1.2 Concreto

A entrada dos dados do concreto é feita preenchendo-se as lacunas observadas na figura 3.3. O  $f_{ck}$  deve estar de acordo com o sistema de unidades especificado anteriormente pelo usuário. O valor usual de  $\gamma_c$  recomendado pela norma [1], é 1,40. O valor normalmente usado para considerar o efeito Rüsch é 0,85.

#### 3.1.3 Aço

A entrada de dados do aço, representada na figura 3.4, é análoga a do concreto. O  $f_{yk}$  deve estar de acordo com o sistema de unidades especificado anteriormente pelo usuário. O valor usual de  $\gamma_s$  recomendado pela norma [1] é 1,15. O módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , recomendado [1] é 210 GPa.

### 3.1.4 Seção de concreto

A entrada dos dados dos vértices da seção de concreto é feita pela tabela representada na figura 3.5. Primeiramente, o número de vértices deve ser fornecido no espaço



Figura 3.4: Entrada de dados do aço



Figura 3.5: Entrada dos vértices da seção de concreto

acima da tabela e, por fim, as coordenadas dos vértices devem ser inseridas nas células da tabela. Pressionando-se o botão "Plotar seção" é possível visualizar o desenho da seção em questão, conforme ilustrado na figura 3.6, além de suas características geométricas, cujas principais fórmulas são A.29, A.30, A.31, A.64, A.65 e A.66, presentes no apêndice. Para tal operação, contudo, é necessário também estar com os dados das barras de aço preenchidos corretamente (ver item 3.1.5).

#### 3.1.5 Barras de armadura

A entrada dos dados das posições e áreas das barras é feita pela tabela representada na figura 3.7. O processo é análogo à entrada dos vértices da seção de concreto, com a única diferença de que se pede também a área de cada barra. Essa área pode ser fornecida na forma de bitola industrial, conforme ilustra a figura 3.7, ou como porcentagem da área total de armadura, conforme figura 3.8, onde  $p_i = \frac{A_{si}}{A_s}$ . Para facilitar o preenchimento dessa segunda opção, criou-se uma ferramenta qua aloca a mesma porcentagem de armadura para todas as barras, tendo em vista que essa é uma situação bastante comum.

#### 3.1.6 Bitolas industriais

A entrada dos valores das bitolas industriais a serem testadas no dimensionamento deve ser feita pela lista representada na figura 3.9. Caso o usuário queira acrescentar uma

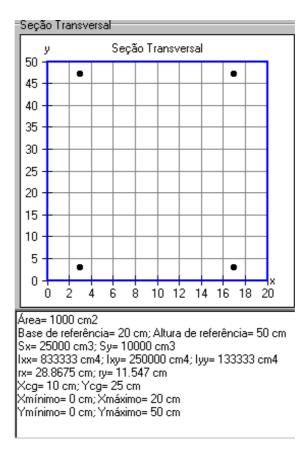


Figura 3.6: Desenho da seção e suas características geométricas

Coordenadas das barras  4					
	X (cm)	Y (cm)	Bitola (mm)	•	
Barra 1	3	3	16		
Barra 2	17	3	16	┰	

Figura 3.7: Entrada das posições e áreas, na forma de bitolas industriais, das barras

Coordenadas das barras  p p p's iguais					
	X (cm)	Y (cm)	p 🔼	•	
Barra 1	3	3	0.25000		
Barra 2	17	3	0.25000	-	

Figura 3.8: Entrada das áreas em porcentagem da área total de armadura

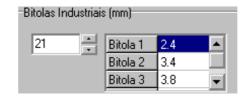


Figura 3.9: Entrada dos valores de bitoas industriais



Figura 3.10: Aplicar ou não o esforço normal no CG da seção

bitola, basta aumentar o número representado no espaço à esquerda e, posteriormente, preencher a nova bitola na última posição da lista. Para excluir uma bitola, deve-se apagá-la diretamente na lista. Quando o dimensionamento for executado, o *software* encarrega-se de contar e ordenar novamente os valores das bitolas.

#### 3.1.7 Retirando o esforço normal do CG da seção

Para que o esforço normal solicitante não seja aplicado no CG (centro geométrico) da seção (situação padrão), entra-se no menu "Opções", figura 3.10, e desabilita-se a opção "Esforço normal aplicado no CG da seção". Feito isso, o esforço normal será localizado na origem do sistema com o qual o usuário estiver trabalhando. Caso queira-se restaurar essa opção, o processo é o inverso.

#### 3.1.8 Salvando e restaurando dados

Para salvar ou restaurar os dados de um problema, entra-se no menu "Arquivo", figura 3.11, e escolhe-se a operação desejada. Uma tela abrir-se-á, pedindo o nome do arquivo. Os dados armazenados são todos os referentes à seção, materiais e de entrada para as funcionalidades. A extensão usada pelo *software* para armazenar esses dados é ".foc", podendo o arquivo ser lido em um editor de texto como, por exemplo, o "Bloco de notas".



Figura 3.11: Salvar ou restaurar dados

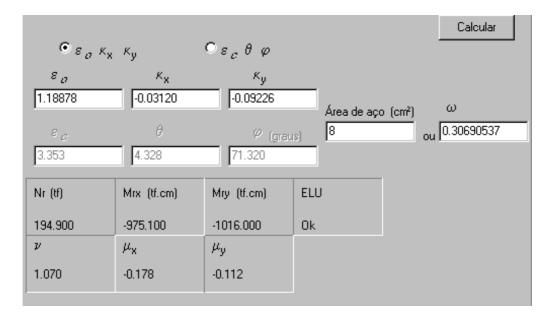


Figura 3.12: Cálculo de esforços resistentes

#### 3.2 Funcionalidades

#### 3.2.1 Cálculo de esforços resistentes

O cálculo dos esforços resistentes é feito na janela representada na figura 3.12. Pode-se escolher qual o conjunto a ser usado para representar a distribuição de deformações,  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  ou  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$ . Se a entrada da área das barras (item 3.1.5) estiver em porcentagem da área total da armadura, esse valor será cobrado na lacuna "Área de aço". Para realizar o cálculo, pressiona-se o botão "Calcular". O resultado será expresso tanto em valores dimensionais quanto adimensionais.

### 3.2.2 Cálculo de verificação

O cálculo de verificação é feito na janela representada na figura 3.13. A entrada dos esforços solicitantes pode ser feita tanto em valores dimensionais quanto adimensionais.

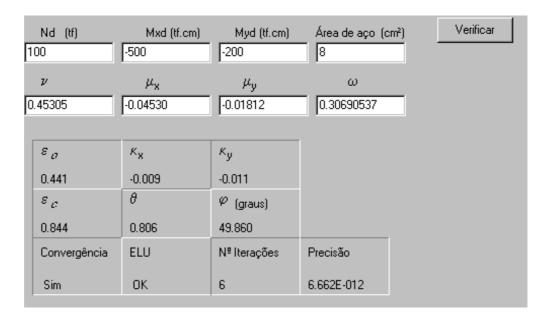


Figura 3.13: Cálculo de verificação

Se a entrada da área das barras (item 3.1.5) estiver em porcentagem da área total da armadura, esse valor será cobrado na lacuna "Área de aço". Para realizar o cálculo, pressiona-se o botão "Verificar". O resultado será expresso tanto no conjunto ( $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$ ) quanto no ( $\varepsilon_c$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ ).

#### 3.2.3 Dimensionamento da área de armadura

Para efetuar-se o dimensionamento, além dos esforços solicitantes, é necessário fornecer a área mínima e máxima de armadura para o cálculo da área exata. Para realizar o dimensionamento, pressiona-se o botão "Dimensionar", figura 3.14. Além da bitola ótima e área exata, serão fornecidas também as distribuições de deformação resultantes dos dois dimensionamentos.

### 3.2.4 Diagrama de interação

Para entrar na tela de confecção de diagrama de interação, pressiona-se o botão "Diagrama de Interação", figura 3.15. A confecção do diagrama de interação exige os seguintes dados (representados na figura 3.16): esforço normal solicitante, ângulo mínimo e máximo de direção da linha neutra ( $\varphi_{\min}$  e  $\varphi_{\max}$ ), o incremento  $\Delta \varphi$ , a área total de armadura (se for o caso) e a escolha do tipo de valores, dimensionais ou adimensionais.

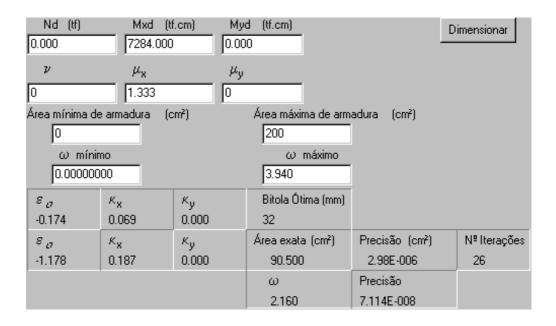


Figura 3.14: Dimensionamento



Figura 3.15: Botão para acessar o diagrama de interação

Para gerar o diagrama de interação, pressiona-se o botão "Gerar". Além do próprio diagrama, ilustrado na figura 3.17 (referente à seção do exemplo do item 4.1, com uma área de armadura de 8 cm²), o software explicita os valores extremos de esforço normal que a seção resiste. Para exportar os pares de momentos fletores, pressiona-se o botão "Exportar" e escolhe-se um arquivo de texto simples (.txt) para armazenar os valores.

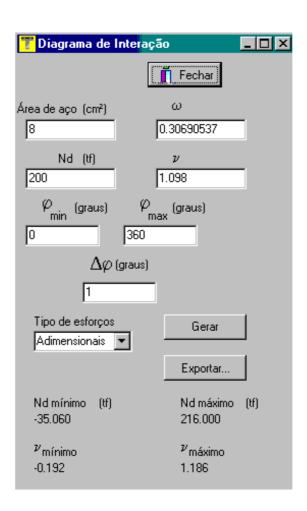


Figura 3.16: Entrada de dados do diagrama de interação

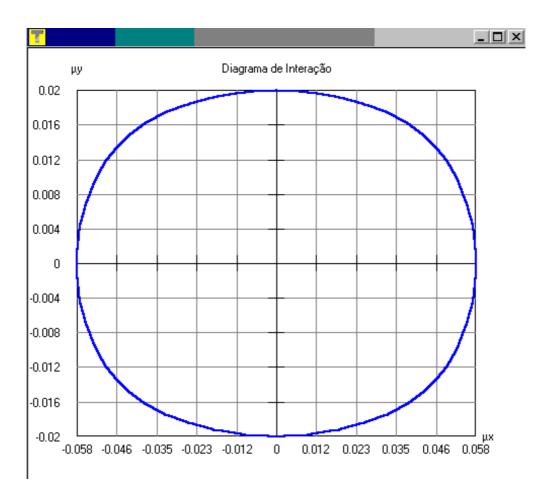


Figura 3.17: Exemplo de diagrama de interação

## Capítulo 4

## Exemplos numéricos

No presente capítulo, são apresentados alguns exemplos numéricos comparados com a referência [5]. Como não havia diversos exemplos de flexão oblíqua composta (FOC), adotou-se uma seção retangular sujeita a diversos casos de flexão normal composta (FNC), uma circular, que sempre está sujeita a FNC devido a sua simetria, e uma retangular sujeita a um caso de FOC.

Na referência faz-se uso somente do aço tipo B, o que gera resultados a favor da segurança, ou seja, uma área de aço maior do que a necessária para o tipo A. Outra fonte de diferença é o fato de a referência usar o diagrama retangular simplificado do concreto, enquanto o *software* usa o parabólico-retângular. Em todos os exemplos, o aço usado foi o CA-50 e o concreto, C20.

## 4.1 Seção retangular com 16 barras sujeita a FNC

A seção deste exemplo é a representada na figura 4.1. A distância do CG de uma barra até a borda da seção é 2,5 cm. O esforço normal adimensional foi mantido constante em 0,40. Já o momento fletor na direção x foi variado de 0,000 a 0,800, com incrementos de 0,050. Como o adimensional de momento fletor adotado no software é o da equação A.86 e o da referência é  $\mu = \frac{M_x}{\sigma_{cd}A_ch}$ , foi necessário fazer a conversão desse último, multiplicando-o por h e dividindo por b. Por fim, comparou-se a área encontrada pelo programa (Área soft.), adotada como correta, com a área encontrada pela referência (Área ref.). Para tal, ambas as áreas foram expressas com unidades, pois o adimensional de área da referência  $\left(\rho = \frac{A_s \times 100}{f_{ck} \times A_c}\right)$  é diferente do usado pelo software, representado

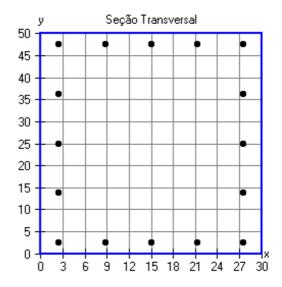


Figura 4.1: Seção retangular com 16 barras

pela equação A.88. Os resultados estão representados na tabela 4.1.

Nota-se que para  $\mu$  (ref.) = 0,150 o resultado do software foi ligeiramente maior do que o da referência. Devido ao comportamento esperado e comprovado nos outros casos de que a área de armadura da referência é maior, o autor acredita que essa diferença é devida à aproximação da referência ao expressar o adimensional de área, que no caso foi 1,38. Se o valor com mais casas decimais fosse 1,384, a diferença já seria de -0,05%, de acordo com o previsto.

### 4.2 Seção circular com 8 barras sujeita a FOC

A seção deste exemplo é a representada na figura 4.2. O diâmetro adotado da seção foi 50 cm, com a distância do CG de uma barra até a borda da seção é 2,5 cm. O círculo foi aproximado por um polígono regular de 20 vértices. O esforço normal adimensional foi mantido constante em 2,00. Já o momento fletor foi variado de 0,00 a 0,80, com incrementos de 0,05. Neste exemplo, os adimensionais da referência e do software eram os mesmos. Por fim, comparou-se a área encontrada pelo programa (Área soft.), adotada como correta, com a área encontrada pela referência (Área ref.). Os resultados estão representados na tabela 4.2.

ν	$\mu$ (ref.)	$\mu \ (software)$	Área $soft$ . $(cm^2)$	Área ref. $(cm^2)$	Diferença (%)
0,40	0,000	0,000	0,00	0,00	-
0,40	0,050	0,083	0,00	0,00	-
0,40	0,100	0,167	0,00	0,00	-
0,40	0,150	0,250	4,15	4,14	+0,24
0,40	0,200	0,333	10,58	11,01	-4,06
0,40	0,250	0,417	17,08	17,88	-4,68
0,40	0,300	0,500	23,51	24,78	-5,40
0,40	0,350	0,583	29,94	31,65	-5,71
0,40	0,400	0,667	36,46	38,52	-5,65
0,40	0,450	0,750	42,89	45,42	-5,90
0,40	0,500	0,833	49,33	52,29	-6,00
0,40	0,550	0,917	55,84	59,19	-6,00
0,40	0,600	1,000	62,28	66,06	-6,07
0,40	0,650	1,083	68,71	72,93	-6,14
0,40	0,700	1,167	75,23	79,83	-6,11
0,40	0,750	1,250	81,66	86,70	-6,17
0,40	0,800	1,333	88,10	93,57	-6,21

Tabela 4.1: Resultado do primeiro exemplo

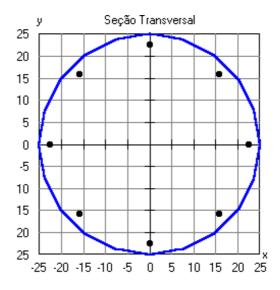


Figura 4.2: Seção circular com  $8~{\rm barras}$ 

			,	
ν	$\mu$	Área $soft$ . $(cm^2)$	Área ref. $(cm^2)$	Diferença (%)
2,00	0,00	55,83	63,09	-13,01
2,00	0,05	62,51	68,23	-9,16
2,00	0,10	70,75	74,83	-5,77
2,00	0,15	78,99	81,78	-3,53
2,00	0,20	87,24	89,20	-2,25
2,00	0,25	95,95	97,48	-1,60
2,00	0,30	105,42	106,87	-1,37
2,00	0,35	115,05	116,52	-1,28
2,00	0,40	124,80	126,50	-1,36
2,00	0,45	134,63	136,86	-1,66
2,00	0,50	144,49	147,23	-1,89
2,00	0,55	154,37	157,63	-2,11
2,00	0,60	164,25	168,03	-2,30
2,00	0,65	174,11	178,44	-2,49
2,00	0,70	183,97	188,80	-2,63
2,00	0,75	193,80	199,17	-2,77
2,00	0,80	203,62	209,49	-2,88

Tabela 4.2: Resultado do segundo exemplo

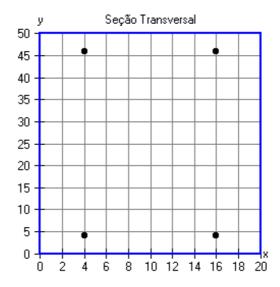


Figura 4.3: Seção retangular com 4 barras sujeita a FOC

Esforço	Referência (tf cm)	Software (tf cm)	Diferença (%)
$M_{xd}$	-1290,0	-1401,4	7,95
$M_{yd}$	-54,0	-54,4	0,74

Tabela 4.3: Resultado do terceiro exemplo

## 4.3 Cálculo de esforços de uma seção sujeita a FOC

Neste exemplo são dados: a seção retangular, conforme ilustrada na figura 4.3, distância do CG de uma barra até aborda da seção de 4 cm, diâmetro das barras de 16 mm, esforço normal de 50 tf e ângulo de direção da linha neutra de 30°. Pede-se para calcular o par de momentos  $M_{xd}$  e  $M_{yd}$ .

Para solucionar este problema, usou-se a ferramente do *software* que gera diagrama de interação e pediu-se para exportar os dados. Para comparar os resultados, a convenção de momentos da referência, que era diferente da do programa, foi convertida para a desse.

Neste exemplo nota-se, da tabela 4.3, que o resultado da referência também foi a favor da segurança, apresentando esforços de módulos menores do que os encontrados pelo programa.

 $Conclus\~oes$  24

# Capítulo 5

## Conclusões

O software cumpre de forma satisfatória sua finalidade, que é servir de ferramenta computacional para a análise de seções de concreto armado submetidas a FOC. A interface gráfica permite que o usuário possa entrar com os dados do problema de uma forma rápida e, conseqüentemente, estudar diversos casos de maneira eficiente. Acredita-se que essa ferramenta comece a ser usada, pelo menos, nos cursos de concreto armado do ITA, auxiliando os estudantes na verificação de problemas teóricos ou até mesmo no projeto. Como instrumento teórico, o programa é flexível, permitindo que se entre com os dados na forma de dimensionais ou adimensionais, além de aceitar dois conjuntos de notação para distribuição de deformação. Para a prática, permite fazer dimensionamentos de forma rigorosa, em tempo de execução praticamente desprezível.

Diversos testes foram realizados no *software*, sendo que a maioria apresentou resultados satisfatórios. Uma única limitação encontrada foi na confecção dos diagramas de interação com seções submetidas a esforços normais muito próximos da compressão máxima uniforme. Nesses casos, quando o incremento de ângulo era pequeno, não ocorria a convergência para alguns ângulos. Esse, porém, não é um problema tão grave, já que, na prática, nenhuma seção vai ser tratada em tal situação, pois uma compressão uniforme próxima da máxima não permite à seção resistir a momentos fletores consideráveis.

Todo o código fonte do *software*, escrito em linguagem Pascal, está disponível junto com o executável, compilado com o programa "Borland Delphi 7". Com exceção da ferramenta que confecciona os gráficos, fornecida pelo orientador Prof. Flávio Mendes Neto, todo o resto do código foi escrito pelo autor. Aliás, as grandes dificuldades enfrentadas foram na programação do *software*, visto que o autor praticamente desconhecia a arte de

 $Conclus\~oes$  25

programar. Fica aqui também registrada a sugestão de incentivar-se, na Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica, trabalhos nessa área, pois a programação é hoje uma ferramente fundamental para qualquer engenheiro. Esse processo também ampliou os conhecimentos do autor em concreto estrutural, assunto que, apesar de ser dado como plenamente conhecido, ainda apresenta lacunas teóricas a serem estudadas.

### 5.1 Sugestões de continuidade de trabalho

Sugestões para futuros trabalhos concentram-se na melhoria da interface do software. A primeira sugestão é a criação de modelos para as seções de geometria mais usual (retangular, T, I, circular...), bastando ao usuário fornecer as medidas necessárias como, por exemplo, numa seção circular, o número de vértices e o diâmetro da seção. Essa ferramenta facilitaria ainda mais a entrada de dados, ao invés de, como é feito no programa atual, ser necessário fornecer vértice por vértice.

Como a maioria dos casos a serem analisados pelo *software* serão de FNC, seria interessante ter um sistema de entrada de barras por camadas, não individualmente. Para esses casos de FNC, também seria didático uma tela que mostrasse desenhos de perfil das seções antes e depois dos carregamentos.

Em relação à confecção do diagrama de interação, seria bom que o programa confeccionasse diversas curvas, para variadas áreas de armadura.

Caso alguém venha a ler o código fonte referente aos cálculos, notará que, internamente, o programa trabalha com dados dimensionais. Como a precisão adotada na maioria dos critérios de convergência é fixa em  $1 \times 10^{-5}$ , esse valor pode, dependendo do sistema de unidades adotado pelo usuário, onerar o número de iterações necessárias para a realização das operações ou gerar resultados com pouca precisão. Fica, então, registrada a sugestão de trabalhar-se com dados adimensionais, posto que, dessa forma, a precisão adotada estará sempre adequada.

# Apêndice A

## Processos de cálculo

### A.1 Seção Transversal

O elemento de trabalho foi uma seção transversal de concreto armado, poligonal, com três esforços solicitantes: normal  $(N_d)$ , momento fletor na direção x  $(M_{xd})$  e y  $(M_{yd})$ . Um exemplo deste tipo de seção está ilustrado na figura A.1.

## A.2 Equação cinemática

Adotou-se a hipótese de Euler-Navier-Bernoulli, ou seja, a seção plana continua plana após se deformar devido aos esforços solicitantes  $(N_d, M_{xd} \in M_{yd})$ . Esse novo plano, também chamado de distribuição de deformações, pode ser descrito em função dos três parâmetros  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  da seguinte forma

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa_y x - \kappa_x y. \tag{A.1}$$

## A.3 Circuição

As seções poligonais foram descritas usando-se seus N vértices. A entrada das coordenadas desses vértices pode ser feita no sentido horário ou anti-horário.

Uma observação importante é para as seções vazadas: a circuição deve "entrar" e "sair" dos vazios, adotando neles sentido contrário ao da parte cheia de seção. Alguns exemplos de circuições estão representados na figura A.2.

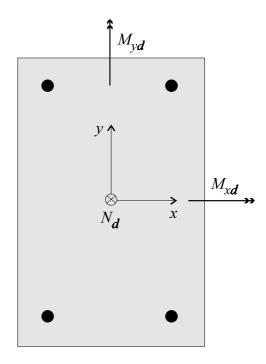


Figura A.1: Exemplo de seção transversal estudada

## A.4 Cálculo dos esforços resistentes

Os esforços resistentes de uma seção de concreto armado são a soma dos esforços do concreto e da armadura, ou seja

$$N_R = N_c + N_s, (A.2)$$

$$M_{xR} = M_{cx} + M_{sx}$$
 e (A.3)

$$M_{yR} = M_{cy} + M_{sy}. (A.4)$$

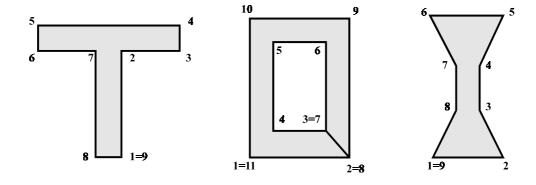


Figura A.2: Exemplos de circuição

O cálculo de cada uma dessas parcelas é tratado a seguir.

### A.4.1 Esforços resistentes do concreto

Como a área do concreto corresponde à maior parte da área da seção, sua contribuição deve ser tratada de forma contínua, ou seja, como a soma dos esforços resistidos por todos os infinitésimos da área de concreto. Um desses infinitésimos, de dimensão dx e dy, está representado na figura A.3.

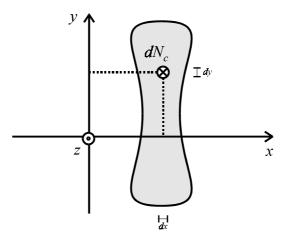


Figura A.3: Infinitésimo da área de concreto

Os esforços resistentes podem ser calculados por

$$N_c = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy, \tag{A.5}$$

$$M_{cx} = -\iint_{A} \sigma(\varepsilon) y \, dx \, dy \, e$$
 (A.6)

$$M_{cy} = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) x \, dx \, dy.$$
 (A.7)

Desde que  $\sigma(\varepsilon)$  seja de classe  $C_1$  e a curva que delimita a área  $A_c$  seja fechada simples no plano xy, as integrais de superfície podem ser transformadas em integrais de linha, utilizando-se o teorema de Green. A seguir apresentam-se as expressões deduzidas.

Esforço normal resistente [3]

$$N_c = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i f_{1i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \text{ e}$$
 (A.8)

$$N_c = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f_{1i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0).$$
 (A.9)

Momento fletor resistente na direção x

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i f_{2i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \text{ e}$$
 (A.10)

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f_{3i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0\text{)}.$$
 (A.11)

Momento fletor resistente na direção y

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i f_{5i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \text{ e}$$
 (A.12)

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f_{4i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0\text{)}.$$
 (A.13)

Onde

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\zeta) d\zeta \, e \, I_{1i} = I_1(\varepsilon_i),$$
 (A.14)

$$I_2(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} I_1(\zeta) d\zeta e I_{2i} = I_2(\varepsilon_i) e \Delta I_{2i} = I_2(\varepsilon_{i+1}) - I_2(\varepsilon_i), \tag{A.15}$$

$$I_{3}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} I_{2}(\zeta) d\zeta e I_{3i} = I_{3}(\varepsilon_{i}) e \Delta I_{3i} = I_{3}(\varepsilon_{i+1}) - I_{3}(\varepsilon_{i}), \qquad (A.16)$$

$$K_{1}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \zeta I_{1}(\zeta) d\zeta e K_{1i} = K_{1}(\varepsilon_{i}) e \Delta K_{1i} = K_{1}(\varepsilon_{i+1}) - K_{1}(\varepsilon_{i}), \quad (A.17)$$

$$h_i = x_i \,\varepsilon_{i+1} - x_{i+1} \,\varepsilon_i, \tag{A.18}$$

$$g_i = y_i \,\varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \,\varepsilon_i, \tag{A.19}$$

$$a_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i,$$
 (A.20)

$$f_{1i} = \begin{cases} I_{1i} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ & , \\ \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.21)

$$f_{2i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & , \\ \frac{g_i \Delta I_{2i} + \Delta y_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.22)

$$f_{3i} = \begin{cases} f_{2i} + \frac{I_{2i}}{\kappa_x} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & , \\ f_{2i} + \frac{1}{\kappa_x} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.23)

$$f_{4i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & e \\ \frac{h_i \Delta I_{2i} + \Delta x_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.24)

$$f_{5i} = \begin{cases} f_{4i} - \frac{I_{2i}}{\kappa_y} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & . \\ f_{4i} - \frac{1}{\kappa_y} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.25)

#### Compressão ou tração uniforme

Para o caso em que ambas as curvaturas são nulas ( $\kappa_x = \kappa_y = 0$ ), correspondente a compressão ou tração uniformes, os esforços resistentes são

$$N_c = \sigma(\varepsilon_o) A_c = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} a_i,$$
 (A.26)

$$M_{cx} = \sigma(\varepsilon_o) S_x = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N} a_i (y_i + y_{i+1})$$
 e (A.27)

$$M_{cy} = \sigma(\varepsilon_o) S_y = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N} a_i (x_i + x_{i+1}).$$
 (A.28)

Onde

 $\sigma(\varepsilon_0)$ : tensão na origem do sistema de coordenadas.

 $A_c$ : área da seção de concreto, facilmente calculada para uma seção poligonal por

$$A_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} a_i. (A.29)$$

As quantidades  $S_x$  e  $S_y$ , momentos estáticos de área em relação ao eixo x e y, respectivamente, são facilmente calculados para uma seção poligonal

$$S_x = -\iint_{A_c} y \, dx \, dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N} a_i (y_i + y_{i+1})$$
 e (A.30)

$$S_y = \iint_{A_c} x \, dx \, dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N} a_i (x_i + x_{i+1}). \tag{A.31}$$

Nota-se que quando o sentido da circuição é horário, os esforços resistentes apresentam sinal contrário do real. Este detalhe teve que ser levado em consideração na implementação do programa.

#### Aplicação ao diagrama parabólico-retângular

Para o diagrama parabólico-retângular ilustrado na figura A.4 dado por

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \le 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon (4 - \varepsilon)}{4} & 0 \le \varepsilon \le 2 \end{cases}$$

$$\sigma_{cd} \qquad \varepsilon \ge 2$$
(A.32)

e ilustrado na figura A.4, as funções  $I_{1}\left(\varepsilon\right),\,I_{2}\left(\varepsilon\right),\,I_{3}\left(\varepsilon\right)$  e  $K_{1}\left(\varepsilon\right)$  tornam-se

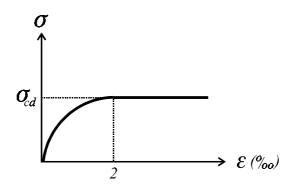


Figura A.4: Diagrama parabólico-retangular

$$I_{1}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \sigma(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{2} (6 - \varepsilon)}{12} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon - 2}{3} & \varepsilon \geq 2 \end{cases}$$
(A.33)

$$I_{2}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} I_{1}(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{3} (8 - \varepsilon)}{48} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^{2} - 4\varepsilon + 2}{6} & \varepsilon \geq 2 \end{cases}, \quad (A.34)$$

$$I_{3}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} I_{2}(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0; & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{4} (10 - \varepsilon)}{240} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \quad e \end{cases}$$

$$\sigma_{cd} \frac{5\varepsilon (\varepsilon^{2} - 2\varepsilon + 2) - 4}{30} \qquad \varepsilon \geq 2$$
(A.35)

$$K_{1}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \zeta I_{1}(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0; & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{4} (15 - 2\varepsilon)}{120} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \end{cases} . \tag{A.36}$$

$$\sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^{2} (\varepsilon - 1) + 2}{15} \qquad \varepsilon \geq 2$$

### A.4.2 Esforços resistentes da armadura

Analogamente ao concreto, o esforço normal resistente, momento fletor resistente na direção x e y da armadura são dados, respectivamente, por

$$N_s = \iint_{A_s} \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy, \tag{A.37}$$

$$M_{sx} = -\iint_{A_s} \sigma(\varepsilon) y \, dx \, dy$$
 e (A.38)

$$M_{sy} = \iint_{\Lambda} \sigma(\varepsilon) x \, dx \, dy.$$
 (A.39)

Como a contribuição da área de aço para a seção de concreto é pequena e sua distribuição é discreta, pode-se considerar a tensão constante em cada barra. Dessa forma, as integrais pode ser transformadas em somatórios

$$N_s = \sum_{i=1}^{n} \sigma(\varepsilon_i) A_{si}, \tag{A.40}$$

$$M_{sx} = -\sum_{i=1}^{n} \sigma(\varepsilon_i) y_{si} A_{si}$$
e (A.41)

$$M_{sy} = \sum_{i=1}^{n} \sigma(\varepsilon_i) x_{si} A_{si}. \tag{A.42}$$

#### Diagrama tensão deformação do aço

O diagrama tensão utilizado para o aço foi de aço classe A, representado na figura A.5, dado por

$$\sigma = \begin{cases} -f_{yd} & \varepsilon \le -\varepsilon_{yd} \\ f_{yd} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| < \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

$$f_{yd} \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_{yd}$$
(A.43)

## A.5 Cálculo de verificação de seções transversais

A verificação consiste em determinar a distribuição de deformações, dado pelo terno  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$ , a partir de um terno de esforços solicitantes, dado por  $N_d$ ,  $M_{xd}$  e  $M_{yd}$ .

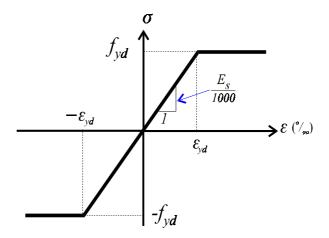


Figura A.5: Diagrama tensão deformação do aço classe A

### A.5.1 Newton-Raphson

Para se executar a busca do terno  $(\varepsilon_0, \kappa_x$  e  $\kappa_y)$  que equilibra a seção, utilizou-se o método de Newton-Raphson (nota-se que é um caso tri-dimensional), cuja fórmula de recorrência é

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \left[ \nabla \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_i \right) \right]^{-1} \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_i \right). \tag{A.44}$$

Onde

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{i}\right) = \left\{ \begin{array}{c} N_{d} - N_{R} \\ \\ M_{xd} - M_{xR} \\ \\ M_{yd} - M_{yR} \end{array} \right\},\tag{A.45}$$

$$\mathbf{x}_{i} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{o} \\ \kappa_{x} \\ \kappa_{y} \end{array} \right\} \quad e \tag{A.46}$$

$$\nabla \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_{i} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{R}}{\partial \varepsilon_{o}} & \frac{\partial N_{R}}{\partial \kappa_{x}} & \frac{\partial N_{R}}{\partial \kappa_{y}} \\ \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_{o}} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_{x}} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_{y}} \end{bmatrix}. \tag{A.47}$$

$$\frac{\partial M_{yR}}{\partial \varepsilon_{o}} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_{x}} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_{y}}$$

Como a matriz  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  é 3 x 3, sua inversa (quando a matriz for não singular) já é conhecida e dada por:

$$\left[\nabla \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_{i}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\left\|\nabla \mathbf{f} \left(\mathbf{x}_{i}\right)\right\|} \begin{bmatrix} \left(a_{22} \, a_{33} - a_{23} \, a_{32}\right) & \left(a_{13} \, a_{32} - a_{12} \, a_{33}\right) & \left(a_{12} \, a_{23} - a_{13} \, a_{22}\right) \\ \left(a_{23} \, a_{31} - a_{21} \, a_{33}\right) & \left(a_{11} \, a_{33} - a_{13} \, a_{31}\right) & \left(a_{13} \, a_{21} - a_{11} \, a_{23}\right) \\ \left(a_{21} \, a_{32} - a_{22} \, a_{31}\right) & \left(a_{12} \, a_{31} - a_{11} \, a_{32}\right) & \left(a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}\right) \end{bmatrix}.$$

$$(A.48)$$

Onde:

 $a_{ij}$ : elemento da linha i e coluna j da matriz  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ .

 $\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\|$ : determinante da matriz  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ , ou seja,

$$\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$
(A.49)

Todas as buscas pela solução partem do valor inicial

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},\tag{A.50}$$

por ser essa a única estimativa inicial que não compromete a convergência do método em nenhum caso, quando houver solução.

### A.5.2 Derivadas dos esforços resistentes

Nota-se, do item anterior, que é necessário conhecer as derivadas dos esforços resistentes. Essas são a soma das derivadas dos esforços resistentes do concreto e do aço,

apresentadas a seguir.

### Derivadas dos esforços resistentes do concreto

Na referência [3] mostra-se que as derivadas dos esforços resistentes do concreto são dadas por

Derivada	Resultado	Validade
$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o}$	$\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i  f_{6i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o}$	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f_{6i}$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o}$	$-\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i f_{7i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o}$	$-\frac{1}{\kappa_x} \left( N_c + \sum_{i=1}^N \Delta x_i  f_{7i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o}$	$rac{1}{\kappa_y}\left(-N_c+\sum_{i=1}^N\Delta y_if_{8i} ight)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o}$	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i  f_{8i}$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x}$	$\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i  f_{9i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x}$	$\frac{1}{\kappa_x} \left( -2 M_{cx} + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{9i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x}$	$-\frac{1}{\kappa_y} \left( M_{cx} + \sum_{i=1}^N \Delta y_i  f_{10i} \right)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x}$	$-\frac{1}{\kappa_x} \left( M_{cy} + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{10i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y}$	$\frac{1}{\kappa_y} \left( -2 M_{cy} + \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{11i} \right)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y}$	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i  f_{11i}$	$\kappa_x \neq 0$

onde

$$f_{6i} = \begin{cases} \sigma_i & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ & , \\ \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.51)

$$f_{7i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & , \\ \frac{g_i \Delta I_{1i} + \Delta y_i \Delta J_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.52)

$$f_{8i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & , \\ \frac{h_i \Delta I_{1i} + \Delta x_i \Delta J_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.53)

$$f_{9i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i^2 + y_i \, y_{i+1} + y_{i+1}^2}{3} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ & , & \\ \frac{g_i^2 \, \Delta I_{1i} + 2g_i \, \Delta y_i \, \Delta J_{1i} + \Delta y_i^2 \, \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.54)

$$f_{10i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i y_{i+1} + 2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_{i+1} y_i}{6} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ \frac{h_i g_i \Delta I_{1i} + (g_i \Delta x_i + h_i \Delta y_i) \Delta J_{1i} + \Delta x_i \Delta y_i \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.55)

$$f_{11i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2}{3} & \Delta \varepsilon_i = 0\\ \frac{h_i^2 \Delta I_{1i} + 2h_i \Delta x_i \Delta J_{1i} + \Delta x_i^2 \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}$$
(A.56)

$$I_{1}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \sigma(\zeta) d\zeta e I_{1i} = I_{1}(\varepsilon_{i}) e \Delta I_{1i} = I_{1}(\varepsilon_{i+1}) - I_{1}(\varepsilon_{i}), \qquad (A.57)$$

$$J_{1}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \zeta \, \sigma(\zeta) \, d\zeta \, e \, J_{1i} = J_{1}(\varepsilon_{i}) \, e \, \Delta J_{1i} = J_{1}(\varepsilon_{i+1}) - J_{1}(\varepsilon_{i}) \, e \quad (A.58)$$

$$J_{2}(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} \zeta^{2} \sigma(\zeta) d\zeta e J_{2i} = J_{2}(\varepsilon_{i}) e \Delta J_{2i} = J_{2}(\varepsilon_{i+1}) - J_{2}(\varepsilon_{i}). \quad (A.59)$$

Aplicação ao diagrama parábola-retângulo Para o diagrama parábola-retângulo dado pela equação A.32, as funções  $D(\varepsilon)$ ,  $J_1(\varepsilon)$  e  $J_2(\varepsilon)$  tornam-se

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0 \\ \sigma_{cd} \frac{(2 - \varepsilon)}{2} & 0 \le \varepsilon \le 2 \end{cases}, \tag{A.60}$$

$$J_{1}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{3} (16 - 3\varepsilon)}{48} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \quad e \end{cases}$$

$$\sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^{2} - 2}{6} \qquad \varepsilon \geq 2$$
(A.61)

$$J_{2}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^{4} (5 - \varepsilon)}{20} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^{3} - 4}{15} & \varepsilon \geq 2 \end{cases}$$
 (A.62)

Compressão ou tração uniforme Para o caso em que ambas as curvaturas são nulas, tem-se que

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \kappa_y \, x - \kappa_x \, y = \varepsilon_o. \tag{A.63}$$

Assim, as derivadas dos esforços resistentes do concreto assumem os seguintes aspectos

Derivada	Resultado
$\frac{\partial N_c}{\partial arepsilon_o}$	$D(\varepsilon_0) A_c$
$\frac{\overline{\partial \varepsilon_o}}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o}$	$D(\varepsilon_0) S_x$
$\mid \partial N_c  \partial M_{cy} \mid$	$D(\varepsilon_0) S_y$
$\frac{\partial \kappa_y}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_o}$ $\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x}$	$D(\varepsilon_0) I_{xx}$
$\frac{\overline{\partial \kappa_x}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x}$	$-D(\varepsilon_0)I_{xy}$
$\frac{\partial \kappa_y}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial \kappa_x}{\partial \kappa_x}$ $\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y}$	$D(\varepsilon_0) I_{yy}$

onde

 $D(\varepsilon_0)$ : derivada do diagrama tensão deformação na origem do sistema de coordenadas.

 $I_{xx},\,I_{xy}$  e  $I_{yy}$ : momentos de inércia da seção poligonal, facilmente calculados para uma seção poligonal por

$$I_{xx} = \iint_{A_c} y^2 dx dy = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} a_i \left( y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2 \right), \tag{A.64}$$

$$I_{xy} = \iint_{A_c} xy \, dx \, dy = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{N} a_i \left[ x_i \, y_{i+1} + 2 \left( x_i \, y_i + x_{i+1} \, y_{i+1} \right) + x_{i+1} \, y_i \right] \, e \, (A.65)$$

$$I_{yy} = \iint_{A} x^{2} dx dy = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} a_{i} \left( x_{i}^{2} + x_{i} x_{i+1} + x_{i+1}^{2} \right). \tag{A.66}$$

#### Derivadas dos esforços resistentes do aço

Em [3], mostra-se que as derivadas dos esforçes resistentes do aço são

Derivada	Resultado
$rac{\partial N_s}{\partial arepsilon_o}$	$\sum_{i=1}^{n} D_i A_{si}$
$\frac{\partial N_s}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{sx}}{\partial \varepsilon_o}$	$-\sum_{i=1}^n D_i y_{si} A_{si}$
$rac{\partial N_s}{\partial \kappa_y} = rac{\partial M_{sy}}{\partial arepsilon_o}$	$\sum_{i=1}^{n} D_i x_{si} A_{si}$
$rac{\partial M_{sx}}{\partial \kappa_x}$	$\sum_{i=1}^{n} D_i y_{si}^2 A_{si}$
$\frac{\partial M_{sx}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{sy}}{\partial \kappa_x}$	$-\sum_{i=1}^{n} D_i x_{si} y_{si} A_{si}$
$\frac{\partial M_{sy}}{\partial \kappa_y}$	$\sum_{i=1}^{n} D_i x_{si}^2 A_{si}$

onde

$$D_i = \left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_i}.$$

O diagrama tensão deformação adotado é apresentado na equação A.43 e sua derivada é

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases}
\frac{f_{yd}}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| < \varepsilon_{yd} \\
0 & |\varepsilon| \geqslant \varepsilon_{yd}
\end{cases}$$
(A.67)

### A.5.3 Verificação do Estado Limite Último

No cálculo de verificação, é imprescindível que se faça a análise do Estado Limite Último (ELU), pois não é interessante que uma seção ultrapasse esse limite.

#### Compatibilidade de notação

Para se fazer a análise do estado limite último (ELU), primeiramente se passa do conjunto de notação usado até então ( $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$ ) para um novo ( $\varepsilon_c$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ ), onde  $\varepsilon_c$  é a maior deformação da seção transversal (lembrando que encurtamentos são positivos). Essa deformação encontra-se em algum vértice da seção transversal, sendo necessário pesquisá-lo um a um.

Em [3], mostra-se que:

$$\theta = \kappa h_{\omega} \quad e$$
 (A.68)

$$\varphi = \varphi_k + \pi. \tag{A.69}$$

Onde

$$k = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2},\tag{A.70}$$

$$h_{\varphi} = \|\mathbf{u}_c\| \left| \sin \left( \varphi_k - \varphi_c \right) \right|, \tag{A.71}$$

$$\mathbf{u}_c = (x_{\varepsilon \max} - x_{\varepsilon \min}) \ \mathbf{i} + (y_{\varepsilon \max} - y_{\varepsilon \min}) \ \mathbf{j}, \tag{A.72}$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{\kappa_y}{\kappa_x}\right) \quad e$$
(A.73)

$$\varphi_c = \arctan\left(\frac{y_{\varepsilon \max} - y_{\varepsilon \min}}{x_{\varepsilon \max} - x_{\varepsilon \min}}\right). \tag{A.74}$$

Onde

 $(x_{\varepsilon \max}, y_{\varepsilon \max})$ : coordenadas do vértice de maior deformação  $(\varepsilon_c)$ ;

 $(x_{\varepsilon \min}, y_{\varepsilon \min})$ : coordenadas do vértice de menor deformação.

O processo contrário, isto é, passar  $(\varepsilon_c, \theta \in \varphi)$  para  $(\varepsilon_0, \kappa_x \in \kappa_y)$  é feito usando-se as relações

$$\kappa = \frac{\theta}{h_{\varphi}}, \tag{A.75}$$

$$\kappa_x = -\kappa \cos \varphi, \tag{A.76}$$

$$\kappa_x = -\kappa \cos \varphi, \tag{A.76}$$

$$\kappa_y = -\kappa \sin \varphi \quad e \tag{A.77}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_c - \theta \frac{d_0}{h_{\varphi}}. \tag{A.78}$$

Onde

 $d_0$ : distância da origem do sistema de coordenadas, medida perpendicularmente à linha neutra. Para descobrir tal distância, é necessário girar a seção de  $\varphi$  graus, usando-se a matriz de rotação [4]

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ & & \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \tag{A.79}$$

e, em seguida, tomar a diferença entre a ordenada da fibra mais comprimida da seção e a da origem.

#### Verificação

Após feita a conversão da notação, basta verificar se o par  $(\varepsilon_c, \theta)$  encontra-se dentro da região viável, ilustrada na figura A.6, definida por:

$$\begin{cases}
-10 \le \varepsilon_c \le 2 \implies 0 \le \theta \le \frac{10 + \varepsilon_c}{\beta_1} \\
2 \le \varepsilon_c \le \frac{7}{2} \implies \frac{7(\varepsilon_c - 2)}{3} \le \theta \le \frac{10 + \varepsilon_c}{\beta_1}
\end{cases}$$
(A.80)

Se o cálculo de verificação não convergir, certamente o ELU foi ultrapassado. Contudo, caso convirja, deve-se verificar o ELU, pois a seção pode estar em equilíbrio, mas além dos critérios de resistência.

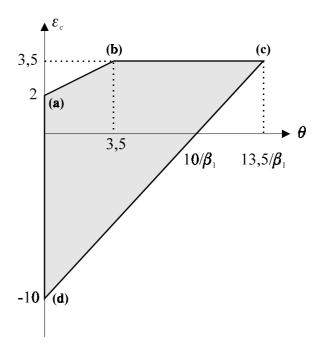


Figura A.6: Região Viável para pares  $(\varepsilon_c,\theta)$ no ELU

Bitolas industriais (mm)						
2,4	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,5
6,0	6,3	6,4	7,0	8,0	9,5	10,0
12,5	16,0	20,0	22,0	25,0	32,0	40,0

Tabela A.1: Bitolas Industriais

### A.6 Dimensionamento

Adotaram-se neste trabalho apenas arranjos de armadura com a área total distribuída igualmente entre as posições de barras previamente definidas pelo usuário (arranjo mono-paramétrico). Feita essa consideração, a primeira maneira de dimensionamento
consistiu na realização de verificações sucessivas, com o diâmetro das barras aumentando dentro dos valores industriais. Os valores industriais presentes na norma [2] estão
presentes na tabela A.1.

Vale a pena registrar que a análise começa com bitola de armadura nula. Isso porque pode haver casos em que a necessidade teórica de armadura não exista.

A segunda forma de dimensionamento é buscar, com o método da bissecção e sucessivas verificações, a área exata de armadura, dentro de um intervalo fornecido pelo usuário. O processo tem as seguintes etapas:

· Verifica-se a área máxima de armadura, distribuída igualmente entre as barras. Caso a seção não resista aos esforços solicitantes, o dimensionamento não é possível e o programa encerra a operação. Caso contrário, o programa segue para o próximo passo;

- Verifica-se a área mínima de armadura, distribuída igualmente entre as barras.
   Caso a seção resista aos esforços solicitantes, está encerrado o dimensionamento, sendo a área ótima a própria área mínima. Caso contrário, o programa segue para o próximo passo;
- ·Tira-se a média das duas áreas em questão e faz-se a verificação com essa nova taxa de armadura;

·Caso a seção resista, a área máxima é substituída pela nova área. Caso contrário, a área mínima que é substituída. Volta-se ao passo anterior. Essa rotina é repetida até que a diferença entra as áreas consideradas seja menor do que a precisão adotada.

No programa, a precisão padrão adotada é  $1 \times 10^{-5}$ , independente do sistema de unidades utilizado.

### A.7 Diagrama de interação

O diagrama de interação é uma curva fechada que contém todos os pares de momentos fletores  $(M_{xR}, M_{yR})$  que a seção resiste, quando submetida a um esforço normal  $N_d$  constante.

Para a construção do diagrama de interação, primeiramente é necessário parametrizar os segmentos de reta que delimitam o ELU, já representado na figura A.6. O parâmetro adotado foi a variável F, que varia de 0 (para tração uniforme) até 1 (para compressão uniforme), valendo 1/3 ao fim do segmento  $\overline{cd}$  e 2/3 ao fim do segmento  $\overline{bc}$ . Dessa forma, os segmentos de reta são escritos como

$$\overline{cd}$$
:  $(\theta; \varepsilon_c) = (0; -10) + 3F\left(\frac{13, 5}{\beta_1}; 13, 5\right), 0 \le F < \frac{1}{3}$  (A.81)

$$\overline{bc}$$
:  $(\theta; \varepsilon_c) = \left(\frac{13, 5}{\beta_1}; 3, 5\right) + 3\left(F - \frac{1}{3}\right)\left(3, 5 - \frac{13, 5}{\beta_1}; 0\right), \frac{1}{3} \le F < \frac{2}{3}$  (A.82)

$$\overline{ab}$$
:  $(\theta; \varepsilon_c) = (3, 5; 3, 5) + 3\left(F - \frac{2}{3}\right)(-3, 5; -1, 5), \frac{2}{3} \le F \le 1.$  (A.83)

O processo para a obtenção do diagrama faz uso do método numérico das secantes, que nada mais é do que uma interpolação linear. Para cada ângulo da linha neutra  $(\varphi)$  fixado, a seqüência de passos seguida pelo programa é

Apêndice A 44

 $\cdot$  Adota-se  $F_1=0$ e  $F_2=1$ e calculam-se os seus respectivos esforços normais resistentes,  $N_1$  e  $N_2$ . O processo tem continuidade somente se  $N_d$  estiver entre  $N_1$  e  $N_2$ ;

· Usa-se a fórmula das secantes:

$$F = \begin{cases} F_1 + \frac{(N_d - N_1)(F_2 - F_1)}{(N_2 - N_1)} & N_1 \neq N_2 \\ \frac{F_1 + F_2}{2} & N_1 = N_2 \end{cases}$$
(A.84)

e descobre-se o novo valor de F;

 $\cdot$  Calcula-se o esforço normal resistente N para esse novo valor de F. Caso N seja maior do que  $N_d$ ,  $N_2$  assume o valor de N e  $F_2$ , o valor F. Caso contrário,  $N_1$  assume o valor de N e  $F_1$ , o valor de F. Volta-se ao passo anterior. Essa rotina é repetida até que a diferença entre N e  $N_d$  seja menor do que a precisão adotada.

No programa, a precisão padrão adotada é  $1 \times 10^{-5}$ , independente do sistema de unidades utilizado.

#### Adimensionais **A.8**

Os adimensionais usados pelo programa são [4]:

$$\nu = \frac{N}{\sigma_{cd}A_c} \tag{A.85}$$

$$\mu_{x} = \frac{M_{x}}{\sigma_{cd}A_{c}b}$$

$$\mu_{y} = \frac{M_{y}}{\sigma_{cd}A_{c}h}$$

$$\omega = \frac{A_{s}f_{yd}}{\sigma_{cd}A_{c}}$$
(A.86)
$$(A.87)$$

$$\mu_y = \frac{M_y}{\sigma_{cd} A_c h} \tag{A.87}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{\sigma_{cd} A_c} \tag{A.88}$$

onde:

 $\nu$ : esforce normal adimensional;

 $\mu_x$ : momento fletor adimensional na direção x;

 $\mu_x$ : momento fletor adimensional na direção y;

 $\omega$ : taxa mecânica de armadura;

b: base de referência, dada pela diferença entre a maior e a menor abscissa da seção;

h: altura de referência, dada pela diferença entra a maior e a menor ordenada da seção.

Bibliografia 45

# Bibliografia

- [1] ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR-6118**, **Projeto de estruturas de concreto Procedimento**. São Paulo, 2003.
- [2] ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR-7480, Barras e Fios de Aço destinados a Armaduras para Concreto Armado. São Paulo, 1996.
- [3] Mendes Neto, F. **Tópicos sobre a Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- [4] Mendes Neto, F. EDI-41 Concreto Estrutural I. Apostila, ITA, 2003.
- [5] Santos, L.M. Cálculo de Concreto Armado Segundo a Nova NB-1 e o CEB, Vol.2. São Paulo: LMS, 1981.

FC	LHA DE REGISTR	O DO DOCUMENTO	
<sup>1.</sup> CLASSIFICAÇÃO/TIPO	<sup>2.</sup> DATA	3. DOCUMENTO N°	<sup>4.</sup> N° DE PÁGINAS
TC	28 de outubro de 200	04 CTA/ITA-IEI/TC-002/2004	61
<sup>5.</sup> TÍTULO E SUBTÍTULO: Programa para análise e di armado submetidas a flexão o <sup>6.</sup> AUTOR(ES):	mensionamento da área	a de armadura de seções tra	nsversais de concreto
Gustavo Assis Medeiros			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO	(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(Ĉ	ĎES):	
		genharia de Infra-Estrutura Ae	eronáutica – ITA/IEI
<sup>8.</sup> PALAVRAS-CHAVE SUGERID	AS PELO AUTOR:		
Estruturas, Concreto Armado	o, Flexão Oblíqua Compo	osta, Software.	
9.PALAVRAS-CHAVE RESULTA	•		
Análise estrutural; Concre	to armado; Flexão; Pr	rogramas de aplicação (cor	mputadores); Cálculo;
Estruturas de concreto; Enge	nharia estrutural; Engen	haria civil	
<sup>10.</sup> APRESENTAÇÃO:		X Nacional	Internacional
Trabalho de Graduação, ITA  11. RESUMO:	, São José dos Campos,	2004. 61 páginas.	
a Flexão Oblíqua Comp cálculo de verificação, di (diagrama de Roseta). I numéricos e, em apênd desenvolvido possa ser arquitetura e, ainda, em e	osta, cujas funcionalida imensionamento da área Este texto apresenta in ice, todo o embasamen utilizado em cursos de	e seções transversais de concredes principais são: cálculo de armadura e confecção de struções para uso do progranto teórico pertinente. Acred concreto armado, para estuda a verificação de casos especi	e esforços resistentes diagrama de interação ama, alguns exemplos ita-se que o <i>software</i> antes de engenharia e
<sup>12.</sup> GRAU DE SIGILO:			
(X) OSTENSIVO ()	RESERVADO	( ) CONFIDENCIAL	( ) SECRETO