INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MOQ-12 PROBABILIDADES E INT. A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS 1^0 Sem. 07

Série de Exercícios 8: Função Geratriz de Momentos

1- Dada as seguintes funções, calcule a função geratriz de momentos, esperança e variança.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x/5} & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \{(1/2)\, e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$

2. Calcule a f.g.m. de uma Distribuição Geométrica e calcule o valor esperado e a variança
3. Calcule a f.g.m. de uma Distribuição Binomial e calcule o valor esperado e a variança.
4. Calcule a f.g.m. de uma Distribuição Uniforme e calcule o valor esperado e a variança.
5. Calcule a f.g.m. de uma Distribuição Normal e calcule o valor esperado e a variança.
6. Calcule a f.g.m. de uma Distribuição Exponencial e calcule o valor esperado e a variança.
7. Estude os itens 9,7; 9,8 e 9,9 do capítulo 09 do Meyer e responda as seguintes questões:

a) Defina a f.d.p. de uma Distribuição Gamma com parâmetros r e α.
b) Se r = 1, a que distribuição se aproxima?
c) Se $\alpha = 1/2$ e $r = n/2$, tal que n é um inteiro positivo, a que distribuição se aproxima?

8. Encontre a f.g.m. da Distribuição Gamma.
9. Encontre a f.g.m. da Distribuição $X^2(n)$ (Qui-quadrada com n graus de liberdade)

10. A Propriedade Reprodutiva das Distribuições é definida como segue:

Se duas (ou mais) variáveis aleatórias que tenham uma determinada distribuição forem adicionadas, a variável resultante terá uma distribuição do mesmo tipo.

Verifique quais das distribuições relacionadas cumprem com esta propriedade:

a) Normal b) Poisson c) Exponencial d) Qui-Quadrado

11. Suponha que a f.g.m. da variável X seja da forma:

$$\psi(\iota) = (0{,}4\ e^{\iota} + 0{,}6)^8$$

a) Qual será a f.g.m. da variável Y = 3X + 2?
b) Calcular E(X)
c) Você poderia verificar sua resposta em b) por algum outro método?

12. Se X tiver uma distribuição Qui-Quadrada com n graus de liberdade, isto é, $X^2_{(n)}$ empregando a f.g.m., mostre que E (X) = *n* e V (X) = 2*n*.

13. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes distribuidas binomialmente com parâmetros (*n, p*) e (*m, p*). Verifique se a nova variável W = X + Y é uma variável Binomial com parâmetros (*n* + *m, p*).

14. Demonstre que o quadrado de uma variável com distribuição N(0,1) possui uma distribuição $X^2_{(1)}$, isto é, uma distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade.

15. Usando o resultado anterior, demonstre o seguinte teorema:
Suponha que X_1, X_2, X_3,...., X_k sejam k variáveis independentes, cada uma tendo uma Distribuição N(0,1), então a v.a. S distribui-se como uma $X^2_{(k)}$, onde:

$$S = X^2_1 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X^2_k$$

16. Demonstre usando a f.g.m.:
Se X tiver a distribuição Normal N(μ, σ^2) e se Y = aX + b, então Y terá a distribuição Normal N($a\mu + b$, $a^2\sigma^2$).