

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

MOQ-12 PROBABILIDADES E INT. A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS 1º Sem. 07

Série de Exercícios 6: Variáveis Aleatórias Bidimensionais

1. Seja a f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/8 (6 - x - y) & 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Calcule

- a) $P(X < 1, Y < 3)$
- b) $P(X + Y < 3)$

2. Seja a variável aleatória bidimensional (x_1, x_2) com função de probabilidade $p(x_1, x_2)$ definida como:

$$p(x_1, x_2) = p^{x_1 + x_2} (1 - p)^{2 - (x_1 + x_2)} \text{ para } x_1 = 0, 1; \quad x_2 = 0, 1; \quad 0 < p < 1$$

Calcular:

- a) $E(x_1 + x_2)$
- b) $E(x_1 x_2)$
- c) $E(x_1)$

3. Seja a variável aleatória bidimensional (x_1, x_2) com função de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2)$ definida como:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4 x_1 x_2 & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Calcular:

- a) $E(3x_1 + 2x_2)$
- b) $E(x_1 x_2)$
- c) $E(x_1)$

4. Uma variável bidimensional contínua (X, Y) tem a f.d.p. conjunta $f(x, y) = k x^2 y$ definida no triângulo formado pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$, determinar:

- a) a constante k
- b) $P(Y < 1)$
- c) $P(Y < X)$
- d) as distribuições marginais de X e Y

5. Assuma que duas pessoas estão numa fila do guichê do Banco do Brasil.

Seja X: o tempo que a pessoa A demora a ser atendido,

Y: o tempo que a pessoa B demora a ser atendido.

Desde que a pessoa A está na frente da pessoa B certamente será atendido primeiro, isto é, $(X < Y)$. Seja a função de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \quad 0 < x < y, \quad \lambda > 0$$

- Verifique se $f(x,y)$ é f. d. p. conjunta
- Calcule as probabilidades marginais
- Calcule a $P(X < 1/\lambda, Y < 1/\lambda)$

6. O consumo de gasolina de uma marca de carro em certa viagem é uma variável aleatória com

$$g(x) = \frac{x}{2} \quad 0 < x < k$$

e o consumo de óleo é uma variável aleatória com:

$$h(y) = \frac{y^3}{4} \quad 0 < y < 2$$

Supondo que o consumo de gasolina e de óleo sejam independentes.

- Calcule o valor de k?
- Calcule a f. d. p. conjunta?
- Calcule a probabilidade do consumo de óleo ser menor que o consumo de gasolina.

7. As v. a. X e Y são discretas em $N = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ com distribuição conjunta:

$$P \{ X = m, Y = n \} = \begin{cases} \frac{e^{-7} 4^m 3^{n-m}}{m!(n-m)!} & \text{se } m = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n \in N \end{cases}$$

Verifique se X e Y são v.a. independentes.

8. Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta:

X \ Y	-3	2	4	p(x) = P[X=x]
1	0,1	0,2	0,2	
3	0,3	0,1	0,1	
q(y)=P[Y=y]				

- Calcule as distribuições marginais de X e Y
- Calcule cov (x , y) e o fator de correlação ρ_{xy}
- X e Y são v.a. independentes?

9. Uma moeda não viciada é lançada três vezes.

$$\text{Seja } X = \begin{cases} 0 & \text{cara} \\ 1 & \text{coroa} \end{cases}$$

conforme ocorra cara ou coroa no 1º lançamento. Seja Y: número de caras que ocorram.

- a) Determine as distribuições de X e Y
- b) Determine a função de probabilidade conjunta
- c) Determine a cov (X,Y)

10. Seja X uma v.a. com a seguinte distribuição

x_i	-2	-1	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{Seja } Y = X^2$$

- a) Calcular $[y, q(y)]$
- b) Calcular a distribuição conjunta $p(x,y)$
- c) Calcular cov (X,Y) e ρ_{xy} , que pode concluir do seu resultado?

11. Lança-se um dado tal que as variáveis X e Y são definidas como segue:

$$X : \text{dobro do número ocorrido}, \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado é ímpar} \\ 3 & \text{se o resultado é par} \end{cases}$$

Calcule $E(X + Y)$

12. Se a, b, c e d são constantes, demonstre:

- a) $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X,Y)$
- b) $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X,Y)$

13. Para a e b constantes, demonstre:

- a) $\rho(X + a, Y + b) = \rho(X,Y)$
- b) $\rho(aX, bY) = \frac{ab}{|ab|} \rho(X,Y)$

14. Se X e Y estão ligados por uma relação linear demonstre que $\rho = + - 1$