

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

MOQ-12 PROBABILIDADES E INT. A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS 1^o Sem. 07

Série de exercícios - Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas (Revisão)

1. Considere uma v.a. X com resultados possíveis: $0, 1, 2, \dots$. Suponha que

$$P(X = j) = (1 - a) a^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Para que valores de a o modelo acima tem sentido?
- b) Verifique que essa expressão representa uma distribuição de probabilidade.
- c) Mostre que para quaisquer dois inteiros positivos s e t , temos:

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

2. Suponha que uma moeda honesta é jogada n vezes e seja X : número de caras observadas. Escreva a função de probabilidade associada ao experimento.

- a) Demonstre que é de fato uma $p(x)$.
- b) Calcule o valor esperado e a variância desta distribuição.

3. A porcentagem de álcool ($100x$) em certo composto pode ser considerado uma v.a. onde X , $0 < x < 1$, tem a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = 20 x^3 (1 - x) \quad ; \quad 0 < x < 1$$

- a) estabeleça a função de distribuição acumulada; b) calcule $E(X)$, $V(X)$
- c) suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo do álcool. Especificamente, se $1/3 < x < 2/3$, o composto se vende por c_1 dólares/galão; caso contrário, ele é vendido por c_2 dólares/galão. Se o custo for c_3 dólares/galão, calcule a distribuição de probabilidades do lucro líquido por galão.

4. A v.a. contínua X tem a f.d.p. $f(x) = x/2$ para $0 \leq x \leq 2$. São feitas duas determinações independentes de X .

- a) Calcular a probabilidade de que ambas essas determinações sejam maiores do que 1?
- b) Se três determinações independentes forem feitas, qual a probabilidade de que exatamente duas delas sejam maiores de 1?

5. Uma v.a. discreta tem a seguinte função de probabilidade:

$$p(x) = A \left(\frac{1}{3} \right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Encontre o valor de A para $p(x)$ seja uma função de probabilidade.
- b) Calcule a $P(X \text{ ímpar})$

6. A v.a. contínua X tem f.d.p. $f(x) = 3x^2$ para $-1 < x < 0$ e zero para outros casos. Calcule $E(Y)$ e $V(Y)$ para $Y = 2X - 3/5$

7. Uma v.a. X possui esperança e variância conhecida, $E(X) = 10$ e $V(X) = 25$. Quais os valores que devem assumir a e b de maneira que a v.a. $Y = aX + b$ tenha $E(Y) = 0$ e $V(Y) = 1$.

8. Mostre que $E(X)$ não existe para a variável aleatória X definida no seguinte problema:

Suponha que a duração de vida (em horas) de uma certa válvula seja uma v.a. contínua X com $f(x) = 100/x^2$ para $x > 0$, e zero para qualquer outro valor de X .

9. Suponha que um dispositivo eletrônico tenha uma duração de vida X (em unidades de 1000 hora), a qual é considerada como uma variável aleatória contínua com a seguinte f.d.p.

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{para } x > 0$$

Suponha que o custo de fabricação de um desses dispositivos seja US\$2,00, o fabricante vende a peça por US\$ 5,00, mas garante o reembolso total se $X \leq 0,9$.

Qual será o lucro esperado por peça, pelo fabricante.

10. Uma caixa contém 8 lâmpadas dos quais 2 são defeituosas. Um homem seleciona 3 lâmpadas:

- encontre o número esperado de lâmpadas defeituosas,
- suponha que cada lâmpada têm um custo de R\$10,00 e é vendida a R\$20,00 se a amostra apresenta as 3 lâmpadas boas. Caso contrário tem uma penalização de R\$2,00 por cada lâmpada defeituosa que apareça. Qual o lucro esperado?

11. O diâmetro X de um cabo elétrico supõe-se ser uma variável aleatória contínua, com f.d.p,

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

- Obtenha a Função de Distribuição acumulada $F(x)$
- Determine um número b tal que $P(x < b) = 2 P(x > b)$
- Calcule $P(x \leq 1/2 \mid 1/3 < x < 2/3)$