
PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Aula 9 - 16 e 17 de maio 2007

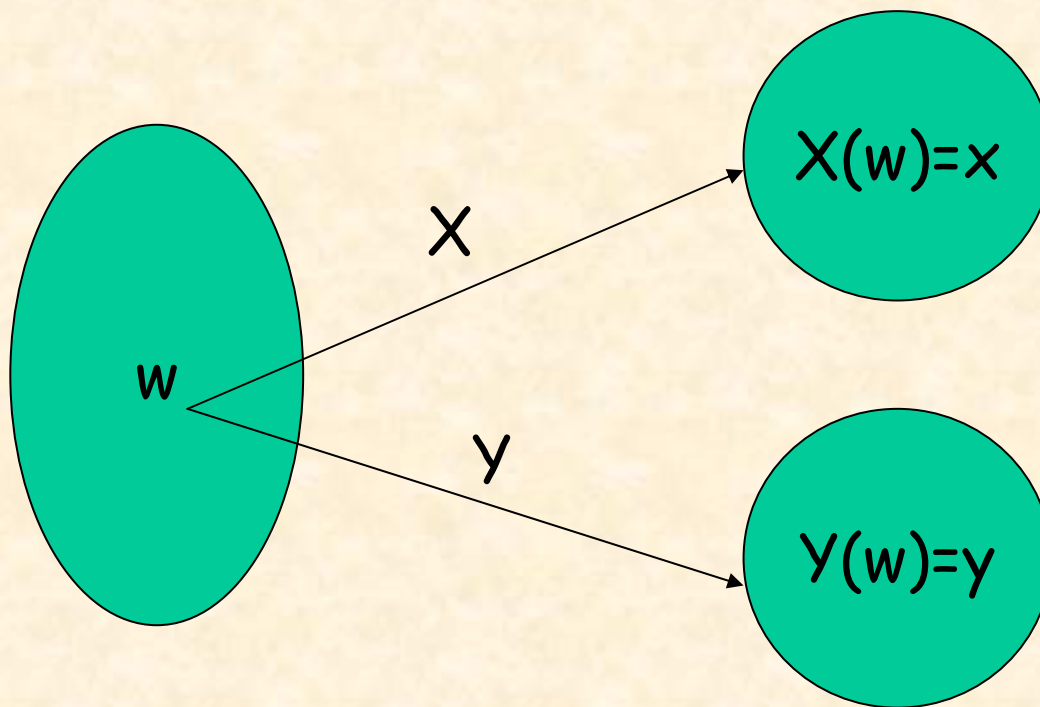
Variáveis Aleatórias Bidimensionais

1. Definição
2. Variável Aleatória Discreta Bidimensional
3. Variável Aleatória Contínua Bidimensional
4. Distribuições de Probabilidade Marginal
5. Variáveis Aleatórias Independentes
6. Covariância
7. Coeficiente de Correlação

1. Definição

Seja ε um experimento com espaço amostral S . Sejam $X = X(w)$ e $Y = Y(w)$ duas funções cada uma associando um número real a cada resultado $w \in S$.

Seja então (X,Y) uma Variável Aleatória Bidimensional.



1. Definição (cont.)

Sejam $X_1 = X_1(w)$, $X_2 = X_2(w)$, $X_n = X_n(w)$, forem n funções cada uma associando um número real a cada resultado $w \in S$, então :

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n)$$

é uma variável aleatória n -dimensional.

2. Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Def. 1: Uma v.a. bidimensional (X,Y) será discreta se os valores possíveis de (X,Y) forem finitos ou infinito numeráveis. Estes valores podem ser representados por (x_i, y_j) para $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Def. 2: A cada resultado possível (x_i, y_j) será associado um número $p(x_i, y_j) = P[X=x_i, Y=y_j]$ denominado função de probabilidade conjunta de (X,Y) e satisfaz:

a) $p(x_i, y_j) \geq 0 \quad \forall (x, y)$

b) $\sum \sum p(x_i, y_j) = 1$

Denomina-se Distribuição de Probabilidade de (X,Y) ao conjunto $[x_i, y_j, p(x_i, y_j)]$.

2. Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Exemplo: Seja uma família com tres crianças, então:

$$S = \{(M,M,M), (M,H,H), (M,H,M), \dots, (H,H,H)\}$$

Define-se:

X = número de meninos

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se o primeiro filho for menino} \\ 0 & \text{se o primeiro filho for menina} \end{cases}$$

Então:

$$R_x = \{0,1,2,3\} \text{ e } R_y = \{0, 1\}$$

Calcular a distribuição de Probabilidades Conjunta.

2. Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Exemplo (cont.):

$$p(0,0) = P[X = 0, Y = 0] = P\{(M,M,M)\} = 1/8$$

$$p(1,0) = P[X = 1, Y = 0] = P\{(M,H,M)\} + P\{(M,M,H)\} = 2/8$$

$$p(0,1) = P[X = 0, Y = 1] = P\{\phi\} = 0$$

$y \backslash x$	0	1	2	3	$q(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	
1	0	1/8	2/8	1/8	
$p(x)$					1

3. Variável Aleatória Contínua Bidimensional

Exemplo: Seja uma v.a. bidimensional (X,Y) com F.d.p. conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & \text{para } 0 < x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

- a) Verificar que $f(x,y)$ é uma função de densidade de probabilidade conjunta
- b) Verificar que $P(X > \frac{1}{2}) = 5/6$
- c) Verificar que $P(Y < X) = 7/24$
- d) Verificar que $P(Y < \frac{1}{2} / X < \frac{1}{2}) = 5/32$
- e) Verificar $P(X + Y \geq 1) = 65/72$

3. Variável Aleatória Contínua Bidimensional

Def. 1: Uma v.a. bidimensional (X,Y) será contínua se (X,Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do Plano Euclidiano.

Def. 2: Seja a função de densidade de probabilidade conjunta $f(x,y)$ que cumpre as seguintes condições:

a) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$

b) $\int \int f(x,y) dx dy = 1$

c) $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int \int f(x, y) dx dy$

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Para cada v.a. bidimensional (X,Y) associaremos duas v.a. unidimensionais chamadas Distribuições Marginais de X e Y respectivamente.

Caso Discreto

A função p definida para $x_1, x_2, \dots$ representa a Distribuição Marginal de X onde:

$$p(x_i) = P[X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X = x_i, Y = y_2 \text{ ou } \dots]$$

$$p(x_i) = P[X = x_i] = \sum_j p(x_i, y_j)$$

Analogamente:

$$q(y_j) = P[Y = y_j] = \sum_i p(x_i, y_j)$$

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Exemplo do Caso Discreto:

No problema da família com tres crianças tivemos:

	0	1	2	3	$q(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/9	1

Seja $p(x)$ a distribuição marginal de X :

$$P[X = 0] = P[X = 0, Y = 0] + P[X = 0, Y = 1] = 1/8 = p(0)$$

$$P[X = 1] = P[X = 1, Y = 0] + P[X = 1, Y = 1] = 3/8 = p(1)$$

$$P[X = 2] = P[X = 2, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] = 3/8 = p(2)$$

$$P[X = 3] = P[X = 3, Y = 0] + P[X = 3, Y = 1] = 1/8 = p(3)$$

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Exemplo do Caso Discreto:

De forma análoga calculá-se a distribuição marginal da v.a. Y .

Assim temos as duas v.a. unidimensionais:

x	0	1	2	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

y	0	1
q(y)	4/8	4/8

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Caso Contínuo

Seja a função de densidade de probabilidade conjunta $f(x,y)$ da v.a. bidimensional (X,Y) .

Definem-se g e h respectivamente as funções de densidade de probabilidade marginal de X e de Y , assim:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Caso Contínuo

Estas f.d.p. marginais correspondem as f.d.p. básicas de v.a. unidimensionais, i.e.

$$P(c \leq X \leq d) = P[c \leq X \leq d, -\infty < Y, \infty]$$

$$= \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_c^d g(x) dx$$

4. Distribuições de Probabilidade Marginal

Exemplo do caso contínuo

Usando a f.d.p. conjunta, i.e.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & \text{para } 0 < x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Distribuição Marginal de X Distribuição Marginal de Y

$$g(x) = \int_0^2 x^2 + \frac{xy}{3} dy$$

$$= 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$h(y) = \int_0^1 x^2 + \frac{xy}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y$$

5. V.A. Bidimensionais Independentes

Caso Discreto

Seja $p(x,y)$ a função de probabilidade conjunta da v.a. bidimensional (X,Y) . Diremos que X e Y são v.a. independentes, se e somente se:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) p(y_j) \quad \forall (x,y)$$

ou

$$P[X=x_i, Y=y_j] = P[X=x_i] P[Y=y_j]$$

5. V.A. Bidimensionais Independentes

Caso Contínuo

Seja $f(x,y)$ a função de densidade de probabilidade conjunta da v.a. bidimensional (X,Y) . Diremos que X e Y são v.a. independentes, se e somente se:

$$f(x, y) = g(x) h(y) \quad \forall (x,y)$$

Exemplo 1:

Seja $f(x,y) = e^{-(x+y)}$

onde:

$$g(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad h(y) = e^{-y}$$

Calculando:

$$g(x) \cdot h(y) = e^{-x} e^{-y} = e^{-(x+y)} \\ = f(x,y)$$

Portanto X e Y são v.a. indep.

5. V.A. Bidimensionais Independentes

Caso Contínuo

Exemplo 2:

Demonstre que as v.a. X e Y não são independentes para a seguinte f.d.p. conjunta.

$$f(x,y) = 2 \quad \text{para } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad x + y < 1$$

6. Covariância

A covariância $\text{Cov}(X,Y)$ é uma medida de relação entre duas variáveis.

Define-se a covariância:

$$\text{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Demonstrar a forma alternativa:

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

6. Covariância

Observações:

1. A variância σ_x^2 é um caso especial da covariância quando $X = Y$, ou seja:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{xx} = E(X^2) - \mu_x^2$$

2. Se as variáveis X e Y são independentes, a cov (X,Y) é nula. O recíproco não é verdadeiro.

3. Para duas v.a. quaisquer:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X,Y)$$

7. Coeficiente de Correlação (ρ)

O coeficiente de correlação é um indicador de como duas variáveis aleatórias estão relacionadas, as quais não estão afetadas pela unidade de mensuramento, ou seja ambas as v.a. estão divididas pelos seus desvios.

$$\rho_{xy} = [\text{Cov}(X,Y)] / \sigma_x \sigma_y$$

$$\rho_{xy} = \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y$$

7. Coeficiente de Correlação

Propriedades: (Demonstrar)

1. O coeficiente de correlação $|\rho_{xy}| \leq 1$
2. Se as variáveis X e Y são independentes então $\rho_{xy} = 0$
3. Se X e Y estão ligados por uma relação linear, então:

$$\rho_{xy} = + - 1$$

Grau de Relacionamento:

Fraco se $|\rho_{xy}| \leq 0,5$

Forte se $|\rho_{xy}| \geq 0,8$

Moderado se $0,5 < |\rho_{xy}| < 0,8$

6ª Série de exercícios

Em anexo

(já enviada por e-mail)