# PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

## Aula 7 – 11 e 12 abril 2007

# Distribuições Discretas

1. Distribuição Bernoulli
2. Distribuição Binomial
3. Distribuição Geométrica
4. Distribuição Pascal ou Binomial Negativa
5. Distribuição Hipergeométrica
6. Distribuição Poisson. Aplicações

# 1. Distribuição Bernoulli

Seja $\varepsilon$ um experimento com espaço amostral S. Seja *A* um evento tal que:

Se *A* acontece, temos um êxito tal que P(*A*) = p

Se *A* não acontece, temos um fracasso tal que P($A^c$) = q, onde p + q = 1.

Seja X uma v.a. discreta com a função p(x) definida:

$$P[X = x] = p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \\ 0 & x \neq 0{,}1 \end{cases}$$

# 1. Distribuição Bernoulli - Parâmetros

Para uma v.a. X ~ Bernoulli (p) demonstre que:

- Valor Esperado de X :

$$E(X) = p$$

- Variança de X:

$$V(X) = pq$$

# 2. Distribuição Binomial

Seja $\varepsilon$ um experimento com espaço amostral S.

Seja A um evento tal que se A acontece, temos um êxito tal que $P(A) = p$.

Se A não acontece, temos um fracasso tal que $P(A^c) = q$,

(onde $p + q = 1$) e ambas as probabilidades constantes.

Exemplo:

a) Lançamentos sucessivos de uma moeda e o evento de interesse é o número de caras.

b) Nascimento de crianças e o evento de interesse é o número de meninas.

# 2. Distribuição Binomial

Considere n repetições independentes do experimento i.e. uma sequência de n experimentos Bernoulli.

Seja X : número de vezes que o evento A acontece nas n repetições.

A v.a. X assim definida tem a função de probabilidade:

$$P[X = x] = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,\ldots n$$

# 2. Distribuição Binomial - Parâmetros

Para uma v.a. X ~ Binomial (n,p) demonstre:

•Valor Esperado de X :

$$E(X) = np$$

•Variança de X:

$$V(X) = npq$$

Usar $E(x^2) = E[x\,(x - 1)] + E(x)$

# 3. Distribuição Geométrica

Seja $\varepsilon$ um experimento com espaço amostral S. Seja *A* um evento tal que se *A* acontece, temos um êxito tal que $P(A) = p$. Se *A* não acontece, temos um fracasso tal que $P(A^c) = q$, (onde $p + q = 1$) e ambas as probabilidades constantes.

Considere n repetições independentes do experimento i.e. uma sequência de n experimentos Bernoulli.

Seja X : número de repetições do experimento necessárias para obter a primeira ocorrencia do evento *A*, nele se incluindo essa última.

# 3. Distribuição Geométrica

A v.a. X assim definida tem a função de probabilidade:

$$P[X = x] = p(x) = p\,q^{x-1} \qquad x = 1, 2, \ldots$$

Exemplos:

a) Número de provas atléticas até conseguir quebrar uma marca.

b) Número de lâmpadas ensaidas até encontrar a primeira defeituosa.

# 3. Distribuição Geométrica

Exemplo: João deve a Antonio R$130,00. Cada viagem de Antonio à casa de João custa R$20,00 e a probabilidade de João ser encontrado em casa é 1/3. Se Antonio encontrar a João conseguirá cobrar a dívida.

a) Qual a probabilidade de Antonio ter de ir mais de três vezes à casa de João para conseguir cobrar a dívida?

b) Se na segunda vez que Antonio foi à casa de João ainda não o encontrou, qual a probabilidade de conseguir cobrar na terceira vez? Qual propriedade poderia utilizar para dar uma resposta direta? **Prop. de Perda de Memória da Distribuição Geométrica.**

# 3. Distribuição Geométrica

**Desafios:**

1. Pesquisar sobre a Prop. de Perda de Memória da Distribuição Geométrica.

2. Mostre que para quaisquer dois inteiros positivos *s* e *t*, temos:

$$P(X > s + t / X > s) = P(X > t)$$

# 3. Distribuição Geométrica - Parâmetros

Para uma v.a. X ~ Geométrica (p) demonstre:

• Valor Esperado de X :

$$E(X) = 1/p$$

• Variança de X:

$$V(X) = q/p^2$$

Usar $E(x^2) = E[x\,(x - 1)] + E(x)$

# 4. Distribuição Pascal ou Binomial Negativa

Seja $\varepsilon$ um experimento com espaço amostral S. Seja A um evento tal que se A acontece, temos um êxito tal que $P(A) = p$. Se A não acontece, temos um fracasso tal que $P(A^c) = q$, (onde $p + q = 1$) e ambas as probabilidades constantes.

Considere n repetições independentes do experimento i.e. uma sequência de n experimentos Bernoulli.

Seja X : número de repetições necessárias até que o enevto A ocorra pela r-ésima vez. ($r \geq 1$)

# 4. Distribuição Pascal ou Binomial Negativa

A v.a. X assim definida tem a função de probabilidade:

$$P[X = x] = p(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \, q^{x-r} \quad x \geq r, r \geq 1$$

# 4. Distribuição Pascal ou Binomial Negativa

Exemplo:

Uma companhia recebe uma encomenda para fundir tres peças complicadas. A probabilidade de se conseguir um molde adequado é 0,4; sendo o molde destruído quando da retirada da peça. Qual a probabilidade de se fundir no máximo 6 peças para atender a encomenda?

P(conseguir um molde adequado) = p = 0,4

r = 3, pede-se calcular $P(X \leq 6)$.

Comprove que $P(X \leq 6) = 0{,}4556$

# 4. Distribuição Pascal ou Binomial Negativa

Para uma v.a. X ~ Pascal (p) demonstre:

- Valor Esperado de X :

$$E(X) = r/p$$

- Variança de X:

$$V(X) = rq/p^2$$

A Distribuição Geométrica é um caso particular da Dist. Pascal quando r = 1.

# 5. Distribuição Hipergeométrica

Seja um conjunto de N elementos nos quais $r \leq N$ possuem uma caracteristica $\gamma$. Supõe-se que deste conjunto seja extraída uma amostra de n elementos sem reposição.

Seja X : número de elementos com a caracteristica $\gamma$ na amostra.

A v.a. X assim definida tem a função de probabilidade:

$$P[X = x] = p(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad para\ x = 0,1,\ldots \begin{Bmatrix} n\ se\ \ r > n \\ r\ se\ \ r < n \end{Bmatrix}$$

# 5. Distribuição Hipergeométrica

Exemplo:

O pessoal do departamento de Eletrônica está constituído de cinco engenheiros e 9 técnicos. Escolhem-se aleatoriamente cinco indivíduos para trabalharem em um projeto. Qual a probabilidade de que o grupo de projeto tenha exatamente dois engenheiros?

# 5. Dist. Hipergeométrica - Parâmetros

Para uma v.a. X ~ Hipergeométrica demonstre:

• Valor Esperado de X :

$$E(X) = np$$

• Variança de X:

$$V(X) = npq\,[(N - n)/(N - 1)]$$

onde $p = r/N$

# 5. Dist. Hipergeométrica - Propriedade

Para N grande ($N > 10n$) a Dist. Hipergeométrica pode ser aproximada a uma Dist. Binomial.

Se $N \to \infty$ e n muito pequeno então

$$[(N - n)/(N - 1)] \to 1$$

Neste caso V(X~Binomial) = V(X~Hipergeométrica) e as probabilidades de extração com reposição e sem reposição são equivalentes.

# 6. Distribuição Poisson

No caso da distribuição binomial (e das outras estudadas até agora), a variável de interesse é o número de sucessos em um intervalo discreto (n observações ou repetições). Muitas vezes,entretanto, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo

Exemplos:

Em um call center chegam, em média, 3 ligações por minuto;

Em um determinado processo de fabricação de cabos, em média, aparece 1 falha a cada 400 metros.

(aula do Prof. Rodrigo)

# 6. Distribuição Poisson

Def: Se X é uma v.a. que é igual ao número de sucessos em um intervalo contínuo, então diz-se que esta segue uma distribuição de Poisson.

A v.a. X assim definida tem a função de probabilidade:

$$P[X=x]=p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad para\, x=0,1,2,\ldots\ldots$$

então X~Poisson ($\lambda$).

# 6. Distribuição Poisson - Parâmetros

Para uma v.a. $X \sim$ Poisson ($\lambda$) demonstre:

• Valor Esperado de X :

$$E(X) = \lambda$$

• Variança de X:

$$V(X) = \lambda$$

Usar $E(x^2) = E[x\,(x - 1)] + E(x)$

# 6. Distribuição Poisson como aproximação da Distribuição Binomial

Quando numa Dist Binomial o tamanho da amostra n é muito grande e a probabilidade de ocorrencia do evento é muito pequena, permanecendo finito e não nulo o produto $\lambda = np$, então $X \sim Poisson\ (\lambda)$.

Exemplo:

Suponha que 2% dos itens produzidos numa fábrica sejam defeituosos. Encontre a probabilidade de existirem tres itens defeituosos em uma amostra de 100 itens.

## 6. Distribuição Poisson como aproximação da Distribuição Binomial

Teorema:

Suponha que X~B(n,p) e seja $\lambda$ = np. Admita-se que quando n $\rightarrow\infty$ e p $\rightarrow$0 tal que np $\rightarrow$ $\lambda$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

onde $\lambda$ = np é o número esperado de sucessos por unidade de tempo.

**Desafio: Demonstre!**

# 6. Processo de Poisson

Def: Quando a variável aleatória de interesse conta o número de ocorrências do evento ao longo do tempo, têm-se um Processo de Poisson.

Suposições do Processo de Poisson:

- As ocorrências são independentes e estacionárias ( $\lambda$ constante);
- O número de ocorrências é proporcional ao tamanho do intervalo;
- Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de ocorrer mais de um sucesso é desprezível.

(aula do Prof. Rodrigo)

# 6. Processo de Poisson

Neste caso:

$$P[X = x] = p(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!} \qquad para \;\; x = 0,1,2,........$$

onde :

$$E(X) = \lambda t$$

$$V(X) = \lambda t$$

# 6. Distribuição Poisson - Aplicações

1. Teoria de Filas.

2. Logística

3. Processos Estocásticos

# $4^a$ Série de exercícios

## Em anexo

## (já enviada por e-mail)