
PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Aula 6 - 29 março 2007

04 de abril 2007

Aplicação do Valor Esperado em Análise de Decisão

1. Introdução
2. Características de um Processo de Análise de Decisão
3. Estruturação de um Problema de Decisão

Introdução

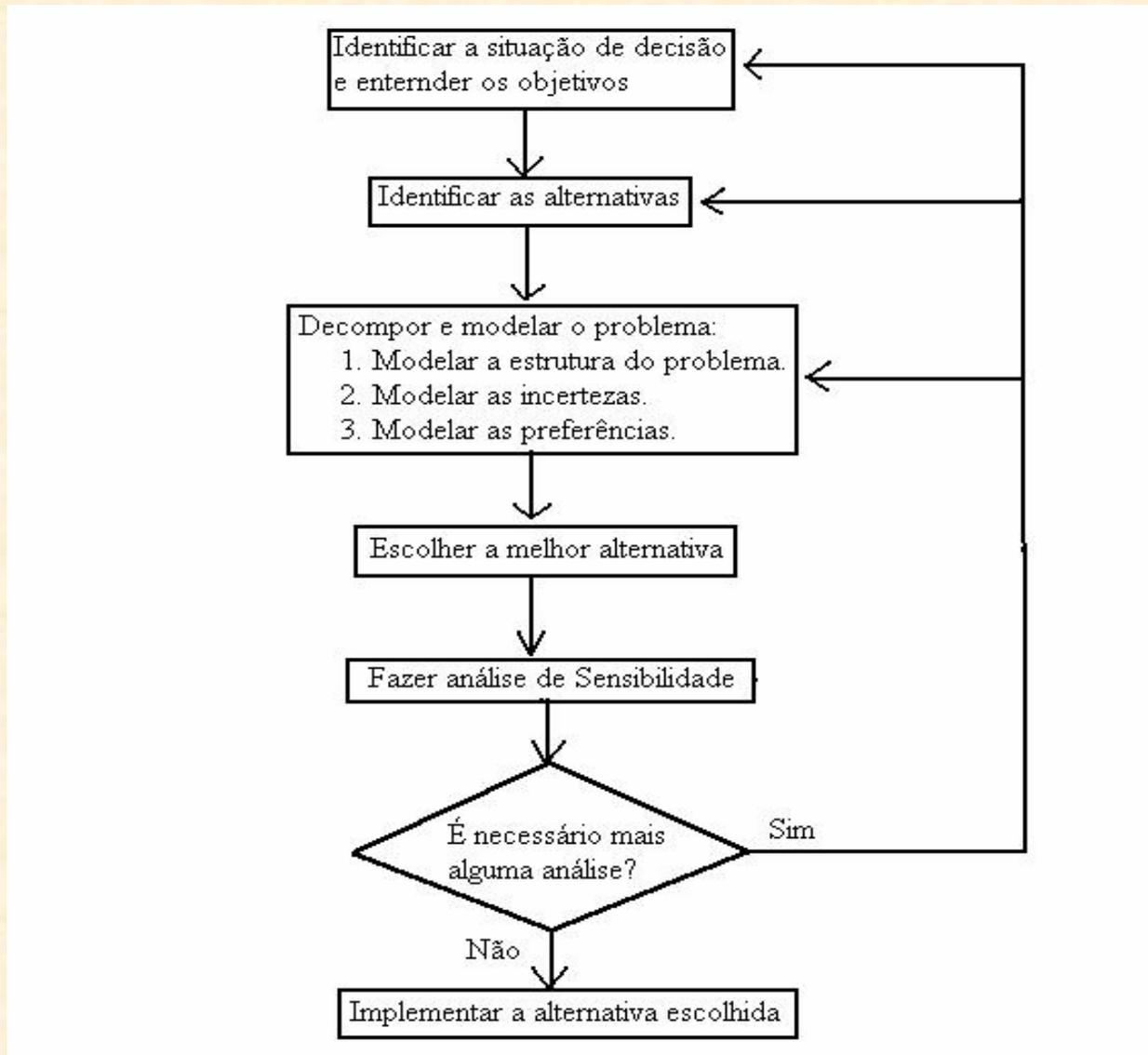
A Análise de Decisão fornece uma estrutura e uma linha sistemática de pensamento para a tomada de decisão.

Case: Família Morgan

Características de um Problema de Análise de Decisão

- Complexidade
- Incerteza
- Múltiplos Objetivos
- Perspectivas diferentes

Processo de Análise de Decisão



Elementos de um Processo de Análise de Decisão

- Valores e Objetivos - contexto da decisão
- Decisões a serem tomadas
 - Devem existir pelo menos duas alternativas para uma tomada de decisão.
 - Decisões seqüenciais
- Eventos Incertos
- Conseqüências

Estruturação de um Problema de Decisão

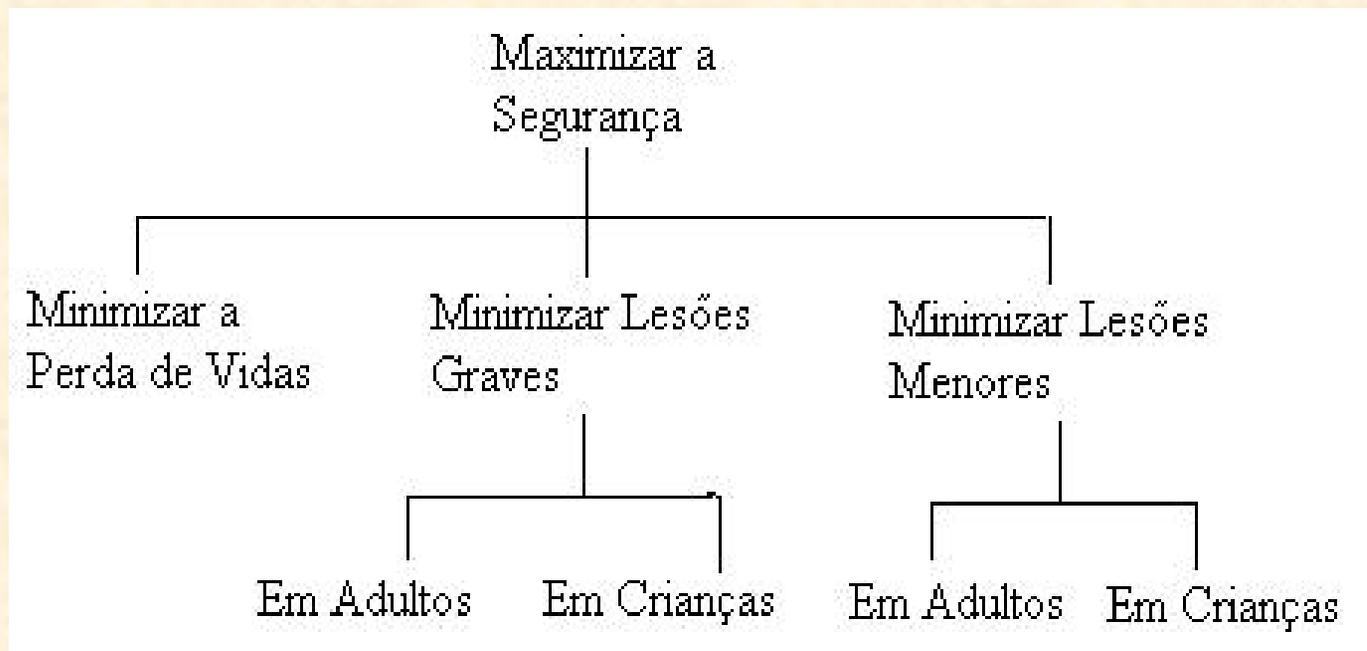
1. Identificar os valores e objetivos
2. Estruturar os elementos de um problema de decisão

Estruturação de um Problema de Decisão

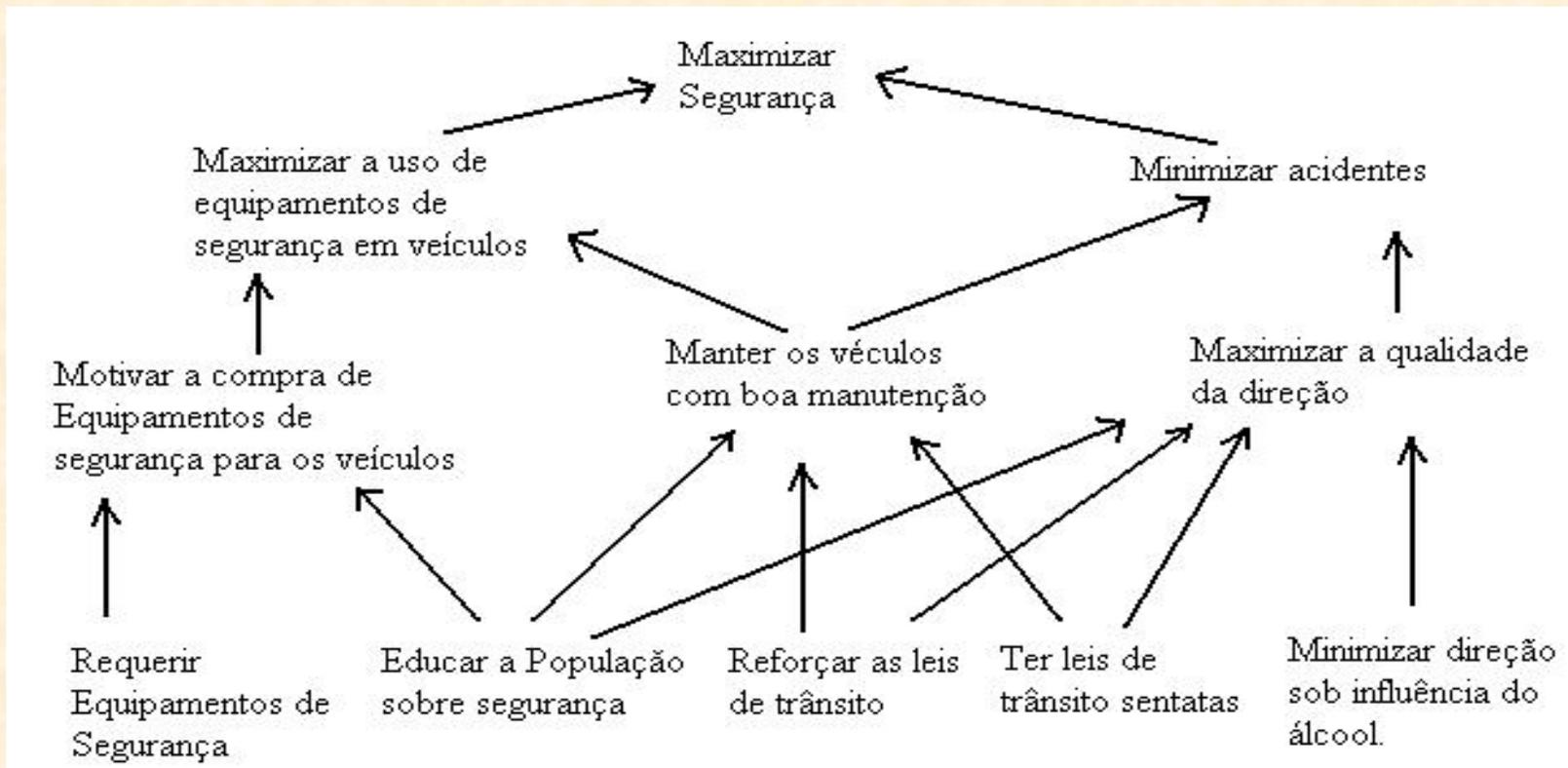
1. Identificar os valores e objetivos

- Objetivos Fundamentais
- Objetivos Meios
- Contexto da decisão

Objetivos Fundamentais de uma Política de Regulamentação de Veículos



Objetivos Meios de uma Política de Regulamentação de Veículos



Estruturação de um Problema de Decisão

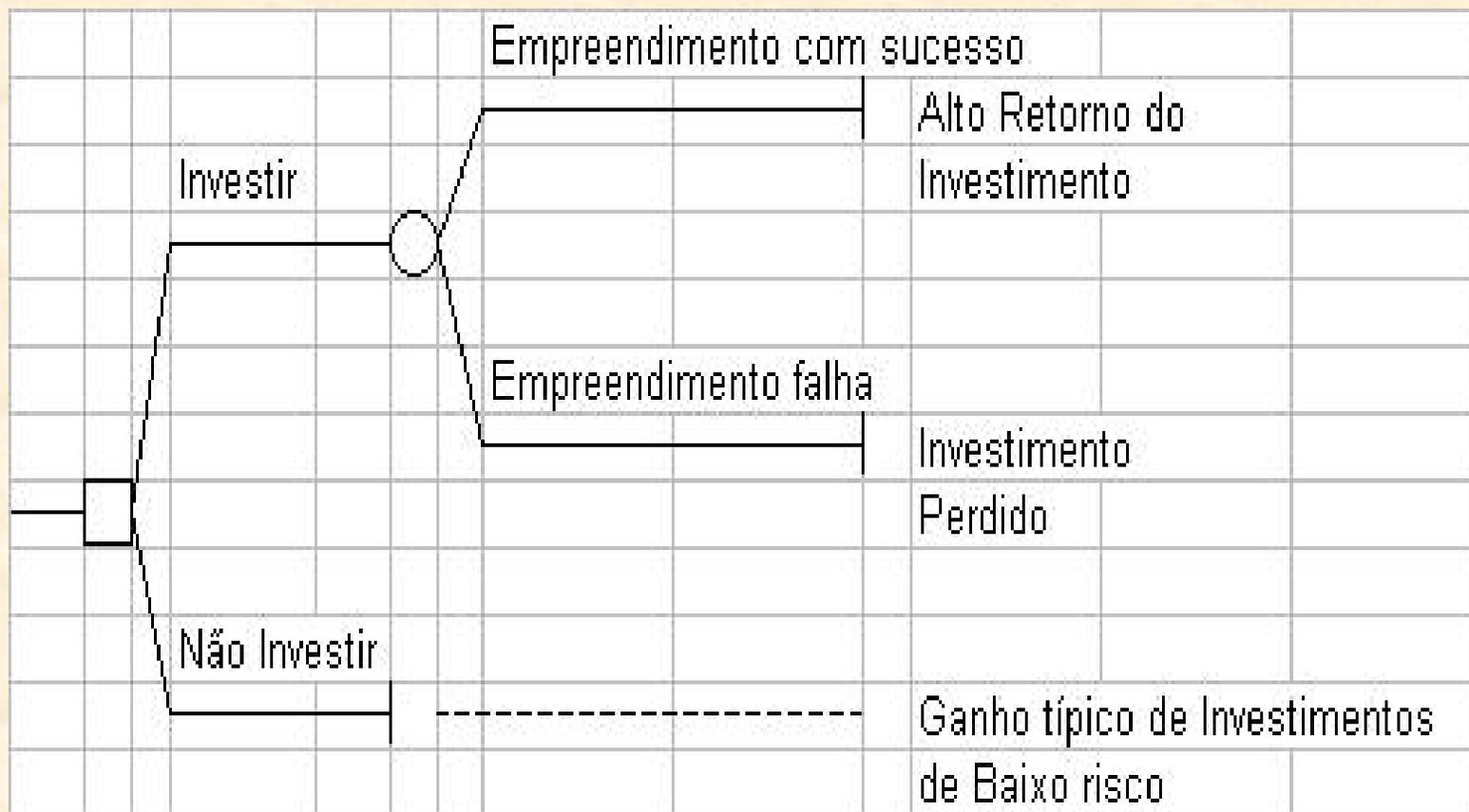
1. Identificar os valores e objetivos
2. Estruturar os elementos de um problema de decisão

2. Estruturar os elementos de um problema de decisão - Árvore de Decisão

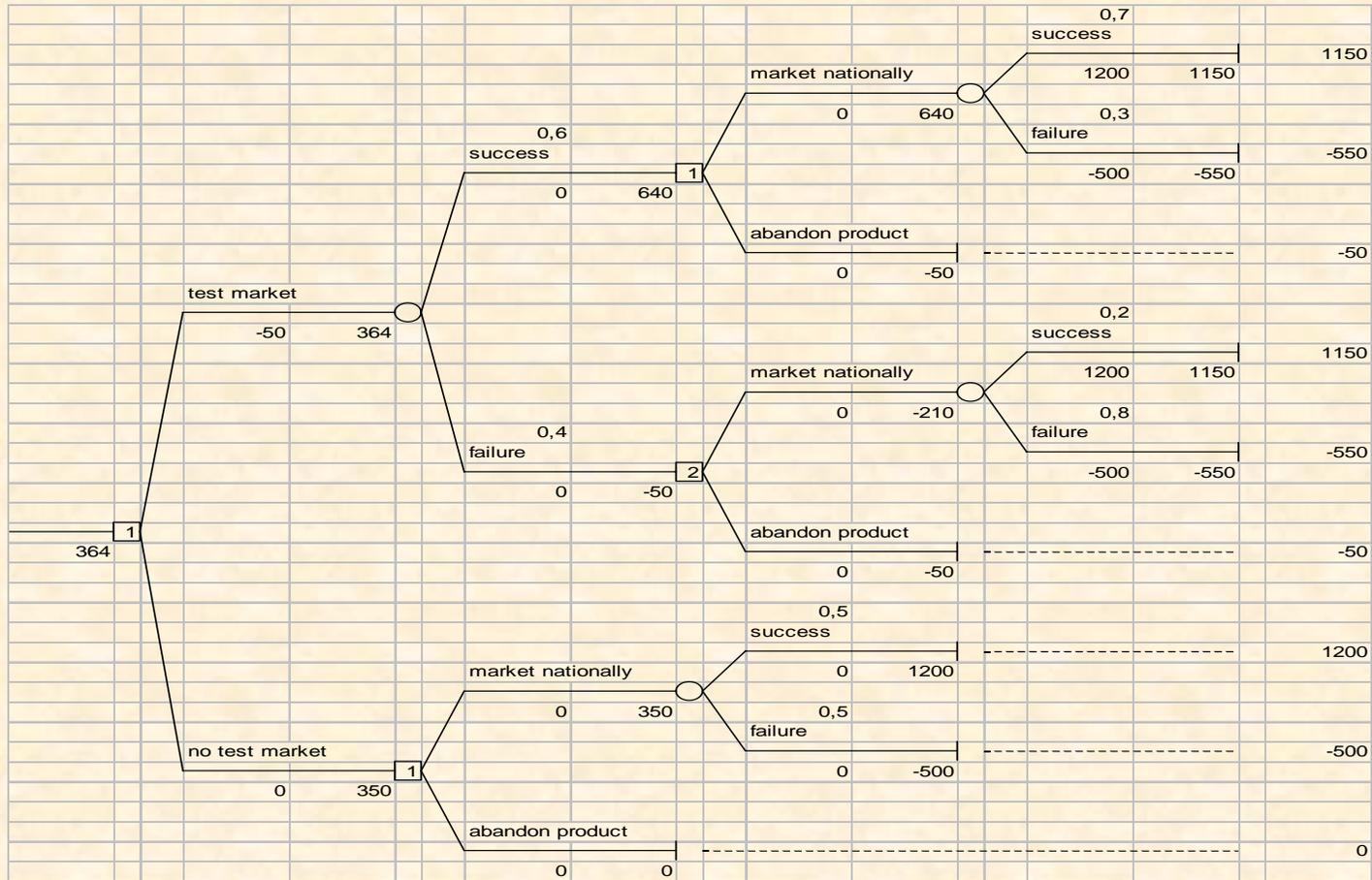
Fornece uma representação detalhada do problema de decisão.

Recomendável para uma visão micro do problema

2. Estruturar os elementos de um problema de decisão - Árvore de Decisão - Decisão de Risco



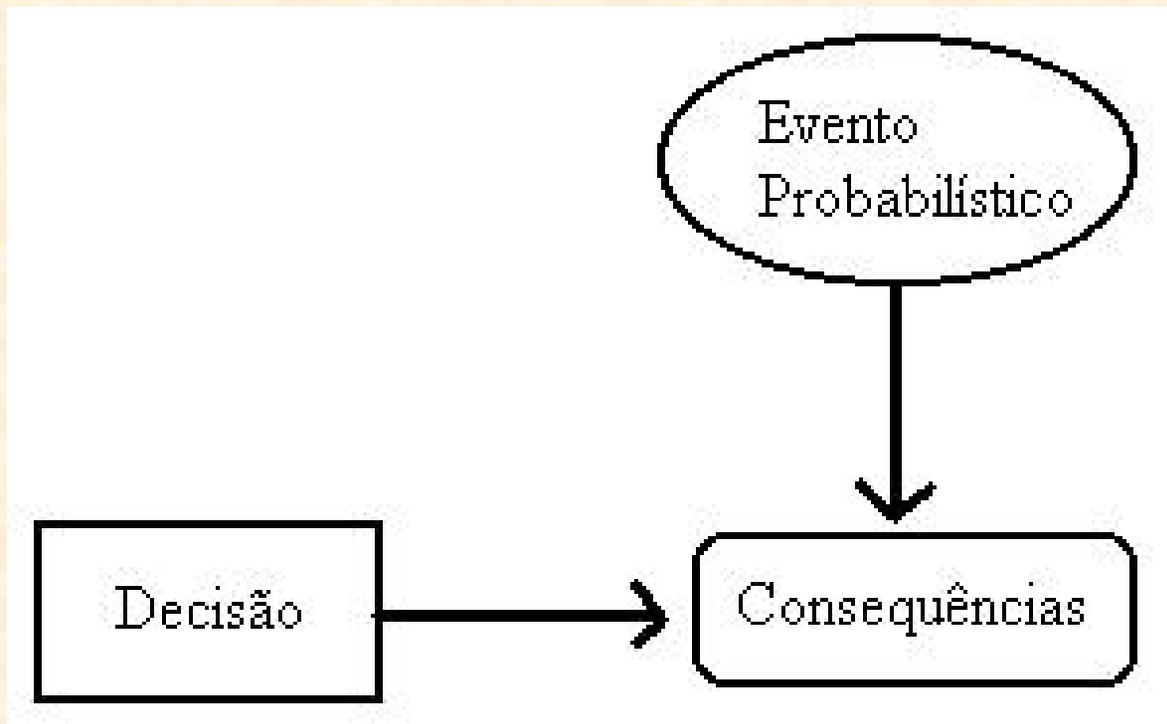
2. Estruturar os elementos de um problema de decisão - Árvore de Decisão - Decisões Seqüências



2. Estruturar os elementos de um problema de decisão - Diagrama de Influencia

- Fornece uma representação compacta do problema de decisão.
- Esconde muitos detalhes.
- Recomendável para uma visão macro do problema

2. Estruturar os elementos de um problema de decisão - Diagrama de Influencia



Exercício 1: Churrasco

Exercício 2: Paciente

Case: Drive Tek

(Para entregar na quarta feira 4 de abril de 2007) [moq-12_2007_solução_drive_tek.xls](#)

Critérios para a Tomada de Decisão

1. Valor Monetário Esperado (VME)
2. Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)
3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

1. Valor Monetário Esperado (VME)

É uma ferramenta quantitativa para realizar uma escolha numa decisão de incerteza. Usa-se árvore de decisão e trabalha-se de trás para frente.

Seja:

(a_1, a_2, \dots, a_n) ações de uma possível decisão

$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ os estados da natureza

Seja:

$E(X/a_j)$ o valor esperado da v.a. X se a ação for a_j
para $(j = 1, 2, 3, \dots, n)$.

1. Valor Monetário Esperado (VME)

Define-se:

$$VME = \max_j \{ E(X/a_j), j = 1, 2, 3, \dots, n \}$$

Para calcular o VME na árvore de decisão trabalha-se de trás para frente. A cada nó de evento incerto calcula-se o valor monetário esperado e, a cada nó de decisão escolhe-se o ramo com o maior valor esperado.

1. Valor Monetário Esperado (VME)

Caso do Jogo de Futebol

João é um torcedor apaixonado que está tentando resolver um problema decisório pouco antes de um jogo entre as seleções do Brasil e da Argentina.

João deve optar por uma de três possíveis ações:

a_1 = assistir ao jogo no estádio

a_2 = assistir ao jogo pela TV

a_3 = ouvir o jogo pelo rádio

Dois estados da natureza:

V = vitória do Brasil com $P(V) = 0,6$

D = derrota do Brasil com $P(D) = 0,4$

1. Valor Monetário Esperado (VME)

João resume o resultado de sua atribuição de valores na tabela, também denominada, tabela de pay-off

	Ação		
Estados da natureza	a_1	a_2	a_3
Vitória = V	1000	600	-300
Derrota = D	-500	-100	200

1. Valor Monetário Esperado (VME)

Calculando o VME:

$$E(x/a_1) = 1000 P(V) + (-500) P(D) = 400$$

$$E(x/a_2) = 600 P(V) + (-100) P(D) = 320$$

$$E(x/a_3) = -300 P(V) + (200) P(D) = -100$$

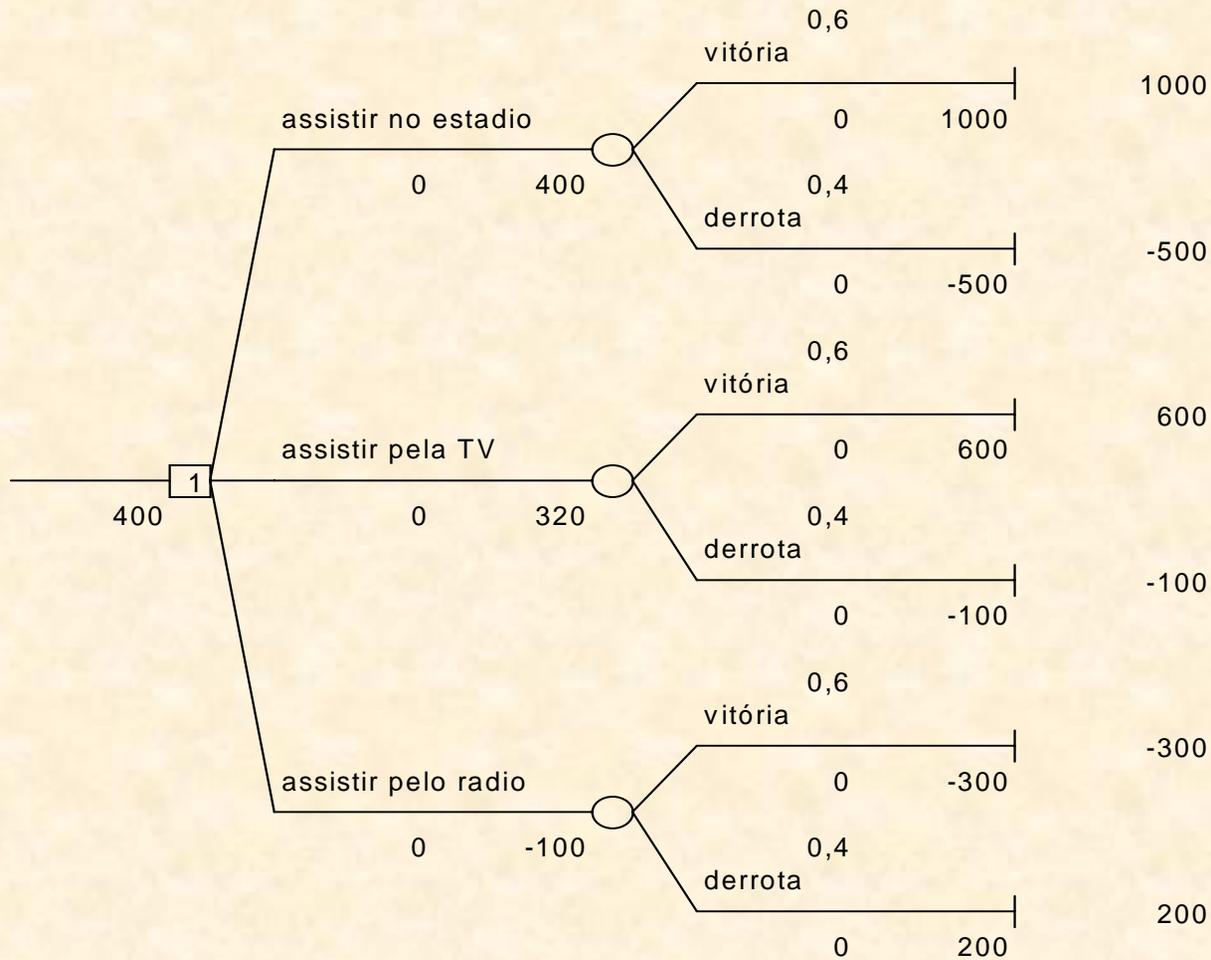
Portanto:

$$VME = \text{máximo } \{ E(x/a_j), \text{ para } j=1,2,3 \}$$

$$VME = \text{máximo } \{ 400, 320, -100 \} = 400$$

1. Valor Monetário Esperado (VME)

Diagrama de Árvore- Utilizando o Tree-plan



Case: Investing in the Stock Market
(exercício em sala) moq-
12_2007_problema_do_investidor.xls

Critérios para a Tomada de Decisão

1. Valor Monetário Esperado (VME)
2. Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)
3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

2. Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)

- A informação fornecida por um especialista ou clarividente é considerada perfeita quando ela está sempre correta.
- Os resultados de eventos probabilísticos são previstos com 100% de precisão.
- Este fenômeno denomina-se clarividência.
- Quanto vale a informação perfeita? Ou até quanto estamos dispostos a pagar para obter esta informação do clarividente?

2. Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)

- Diremos que o valor esperado da informação pode ser zero ou um valor positivo mas nunca negativo.

- Seja:

$VME(\text{info})$ = valor monetário esperado com informação.

- Define-se:

$$\mathbf{VEIP = VME(\text{info}) - VME}$$

onde VEIP fornece uma limite superior do valor de qualquer informação.

Exemplo 1: João e o futebol

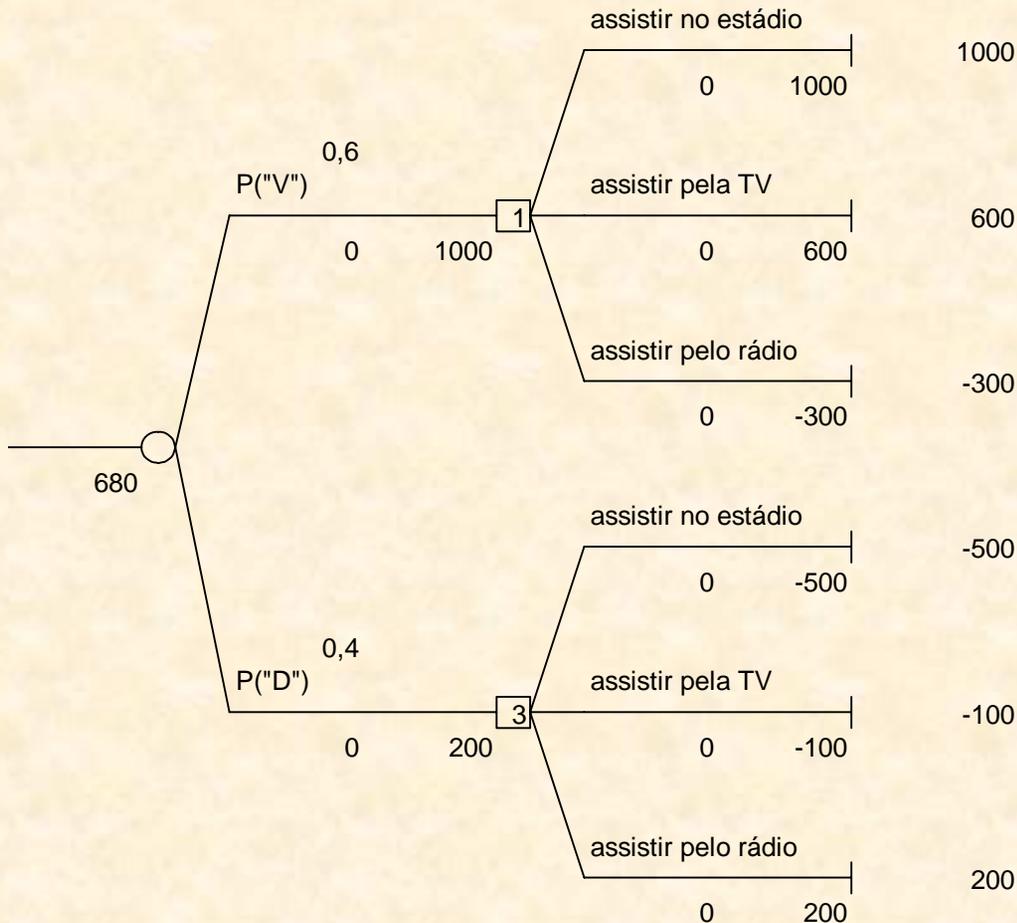
- Suponha que a informação do clarividente é perfeita:
- $P(\text{clarividente dizer V/Vitória Brasil}) = P("V"/V) = 1$
- Analogamente: $P("D"/D) = 1$
- Lembrando que $P(V) = 0,6$ e $P(D) = 0,4$, como calcular $P("V")$ e $P("D")$?

$$P("V") = P("V"/V) P(V) + P("V"/D) P(D) = (1)(0,6) + (0)(0,4) = 0,6$$

$$P("D") = 0,4$$

$VME(\text{info}) = 680$ portanto:

$$VEIP = VME(\text{info}) - VME$$
$$VEIP = 680 - 400 = 280$$



Case: Investing in the Stock Market

Alternativas de decisão:

a_1 = investir em fundo de alto risco

a_2 = investir em fundo de baixo risco

a_3 = investir em poupança

Estados da natureza:

θ_1 = mercado sobe e $P(\text{mercado sobe}) = 0,5$

θ_2 = mercado estável e $P(\text{mercado estável}) = 0,3$

θ_3 = mercado desce e $P(\text{mercado desce}) = 0,2$

Case: Investing in the Stock Market

No problema do investidor ou do mercado de ações, um especialista clarividente poderia dizer que sempre identifica quando o mercado irá subir.

Isto é,

$$P(\text{"Mercado sobe"} / \text{Mercado sobe}) = 1$$

$$P(\text{"Mercado fica estável"} / \text{Mercado sobe}) = 0$$

$$P(\text{"Mercado desce"} / \text{Mercado sobe}) = 0$$

Case: Investing in the Stock Market

Lembrando:

$$P(\text{Mercado sobe}) = 0,5$$

$$P(\text{Mercado estável}) = 0,3$$

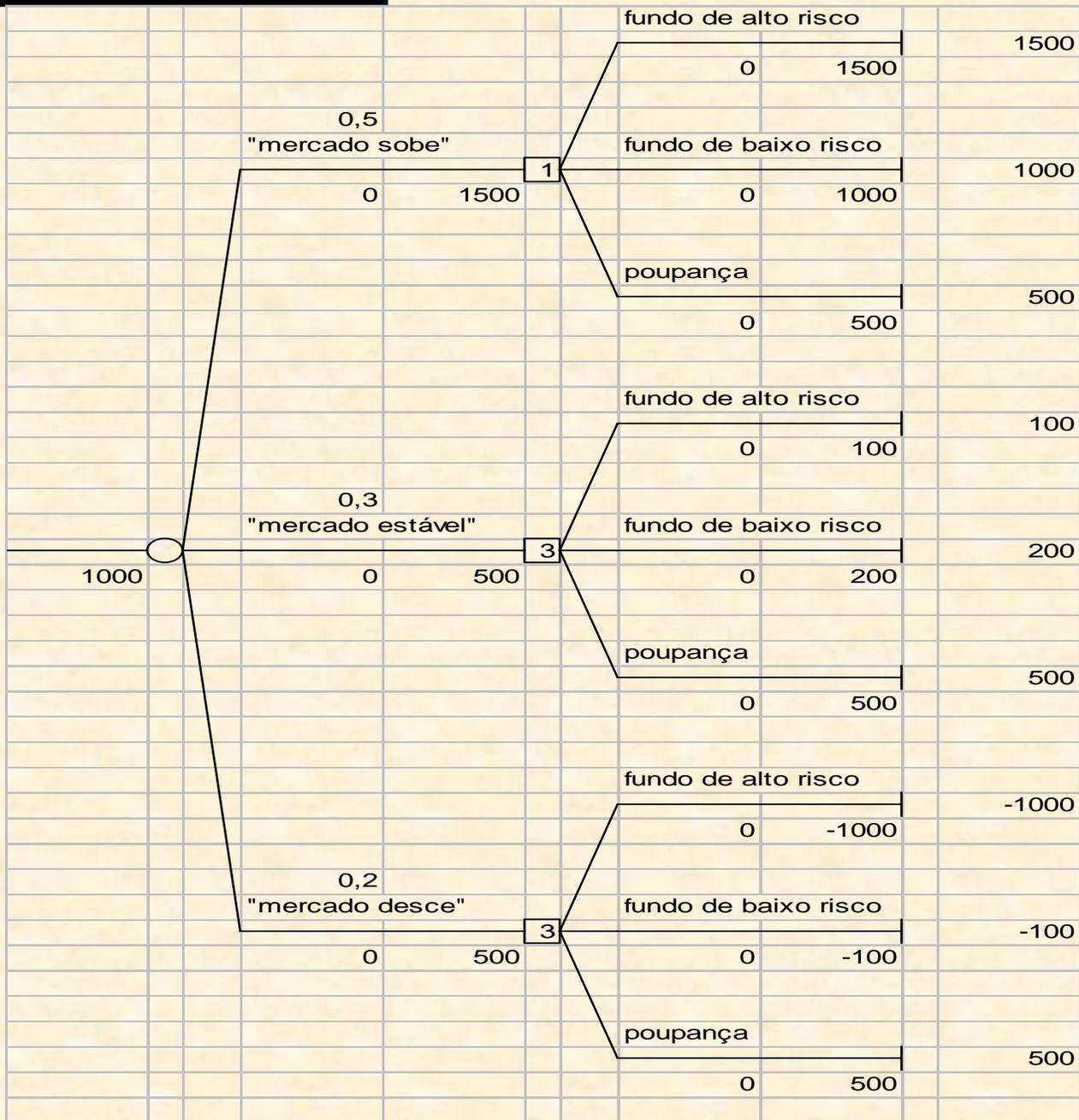
$$P(\text{Mercado desce}) = 0,2$$

Demonstrar:

$$P(\text{"Mercado sobe"}) = 0,5$$

$$P(\text{"Mercado estável"}) = 0,3$$

$$P(\text{"Mercado desce"}) = 0,2$$



Case: Investing in the Stock Market (cont.)

O Valor Esperado da Informação Perfeita é:

$$\text{VEIP} = \text{VME}(\text{info}) - \text{VME}$$

$$\text{VEIP} = (\$1000) - (580)$$

Logo o Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP) é \$420 significa o máximo que o investidor poderia pagar por este tipo de informação.

Critérios para a Tomada de Decisão

1. Valor Monetário Esperado (VME)
2. Valor Esperado da Informação Perfeita (VEIP)
3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

Suponha que o investidor contrate os serviços de um economista especializado em previsões do mercado de ações.

Como ele pode cometer erros, sua informação é imperfeita.

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

•Seja:

$VME(\text{info imp})$ = valor monetário esperado com informação imperfeita.

•Define-se:

$$VEII = VME(\text{info imp}) - VME$$

onde VEII fornece o valor da informação.

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 1: João e o futebol

Suponha que um especialista é consultado tal que em casos de vitória ele acerte 70% das vezes. Em caso de derrota ele acerta 80% das vezes, i.e.:

$$P(\text{especialista dizer V/Vitória}) = P("V"/V) = 0,70$$

$$P(\text{especialista dizer D/Derrota}) = P("D"/D) = 0,80$$

Passo 1: calcular $P("V")$ e $P("D")$ para montar a árvore de decisão.

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 1: João e o futebol

Se $P("V"/V) = 0,70$ então $P("D"/V) = 0,30$

$P("D"/D) = 0,80$ então $P("V"/D) = 0,20$

Lembrando que $P(V) = 0,6$ e $P(D) = 0,4$ temos:

$$P("V") = P("V"/V) P(V) + P("V"/D) P(D)$$

$$P("V") = (0,7) (0,6) + (0,2) (0,4) = 0,5$$

Analogamente $P("D") = 0,5$

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 1: João e o futebol

Passo 2: Calcular as probabilidades condicionais utilizando Teorema de Probabilidade Total:

$$\begin{aligned}P(V/"V") &= [P("V"/V) P(V)] / P("V") \\ &= (0,70)(0,6) / (0,5) = 0,84\end{aligned}$$

$$P(D/"V") = 0,16$$

$$\begin{aligned}P(V/"D") &= [P("D"/V) P(V)] / P("D") \\ &= (0,3) (0,6) / (0,5) = 0,36\end{aligned}$$

$$P(D/"D") = 0,64$$

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 1: João e o futebol

Passo 3: Calcular o VME(info imp).
Utilizando o software Tree-plan, temos:
[moq-12_2007_case_joao_veii.xls](#)

onde: $VME(\text{info imp}) = 456$

Passo 4: Calcular o VEII, onde

$VEII = VME(\text{info imp}) - VME = 456 - 400 = 56 \text{ u.m.}$
Ou seja 56 unidades monetárias (u.m.) é o preço a ser pago pela informação.

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 2: Infraero

O Aeroporto de Congonhas está com graves problemas de capacidade. Infraero está tentando resolver um problema decisório considerando as três possíveis ações:

a_1 = construir outro terminal

a_2 = ampliar o atual terminal

a_3 = não fazer nada

Dois estados da natureza:

θ_1 = demanda crescente,

θ_2 = demanda estabilizada ou crescimento desprezível

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 2: Infraero

Sejam as probabilidades dos estados da natureza:

$$P(\theta_1) = \frac{3}{4} \text{ e } P(\theta_2) = \frac{1}{4}$$

Seja a matriz de pay-off:

	a_1	a_2	a_3
θ_1	2000	1500	-500
θ_2	-800	-200	400

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Exemplo 2: Infraero

- a) Demonstre que o VME é igual a 1300 u.m.
- b) Demonstre que o VEIP é igual a 300 u.m.
- c) Suponha que um especialista é consultado tal que em casos de demanda alta ele acerta 80% das vezes. Em caso de demanda estável acerta 90% das vezes. Demonstre que o VEII é 60 u.m.

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Case: Investing in the Stock Market

Alternativas de decisão:

a_1 = investir em fundo de alto risco

a_2 = investir em fundo de baixo risco

a_3 = investir em poupança

Estados da natureza:

θ_1 = mercado sobe e $P(\text{mercado sobe}) = 0,5$

θ_2 = mercado estável e $P(\text{mercado estável}) = 0,3$

θ_3 = mercado desce e $P(\text{mercado desce}) = 0,2$

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Case: Investing in the Stock Market

Foi contratado um especialista que diz :

$$P(\text{"Mercado sobe"} / \text{Mercado sobe}) = 0,80$$

$$P(\text{"Mercado estável"} / \text{Mercado estável}) = 0,70$$

$$P(\text{"Mercado desce"} / \text{Mercado desce}) = 0,60$$

Estas probabilidades denominadas "a priori" estão resumidas no quadro a seguir tal que:

- $P(\text{"Mercado sobe"} / \text{Mercado estável}) = 0,15$

- $P(\text{"Mercado sobe"} / \text{Mercado desce}) = 0,20$

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

$$P(\text{"Mercado estável"} / \text{Mercado sobe}) = 0,10$$

$$P(\text{"Mercado estável"} / \text{Mercado desce}) = 0,20$$

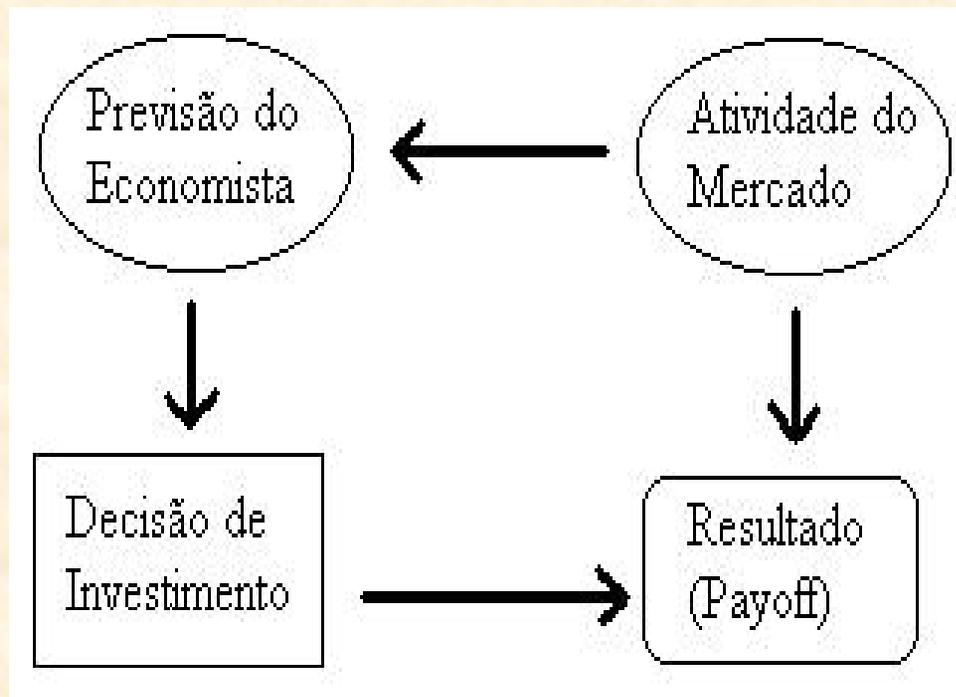
$$P(\text{"Mercado desce"} / \text{Mercado sobe}) = 0,10$$

$$P(\text{"Mercado desce"} / \text{Mercado estável}) = 0,15$$

Previsão do Economista	Verdadeiro Estado do Mercado		
	Sobe	Fica Estável	Desce
"Mercado Sobe"	0,80	0,15	0,20
"Mercado Estável"	0,10	0,70	0,20
"Mercado Desce"	0,10	0,15	0,60
	1,00	1,00	1,00

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

Diagrama de Influencia do Investidor considerando informação imperfeita:



3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII) - Case: Investing in the Stock Market

Passo 1: Calcular $P(\text{"Mercado sobe"})$, $P(\text{"Mercado estável"})$ e $P(\text{"Mercado desce"})$ para montar a árvore de decisão.

Neste caso verificar:

$$P(\text{"Mercado sobe"}) = 0,485$$

$$P(\text{"Mercado estável"}) = 0,300$$

$$P(\text{"Mercado desce"}) = 0,215$$

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

Passo 2: Calcular as probabilidades condicionais para um estado dado a Previsão do Economista:

$$P(\text{Mercado sobe} / \text{"Mercado sobe"}) =$$

$$\frac{[P(\text{"Mercado sobe"} / \text{Mercado sobe})P(\text{Mercado sobe})]}{P(\text{"Mercado sobe"})} = (0,8) (0,5) / 0,485 = 0,8247$$

	Probabilidade posterior para os estados:		
Previsão do Economista	Mercado Sobe	Mercado fica Estável	Mercado Desce
"Mercado Sobe"	0,8247	0,0928	0,0825
"Mercado Estável"	0,1667	0,7000	0,1333
"Mercado Desce"	0,2325	0,2093	0,5581

3. Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEII)

Passo 3: Calcular o $VME(\text{info imp})$.

Utilizando o software Tree-plan, temos: [moq-12_2007_problema_do_investidor_veii.xls](#)

onde: $VME(\text{info imp}) = 822$

Passo 4: Calcular $VEII = VME(\text{info imp}) - VME$
 $VEII = (\$822) - (580)$

Logo o Valor Esperado da Informação Imperfeita (VEIP) é \$242,00 significa o valor que o investidor poderia pagar por este tipo de informação.

**Case: Gorman Manufacturing
Company**
(para entregar na quarta feira 11 de abril)