PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Aula 5 – 28 março 2007

Variáveis Aleatórias

1. Definição de Valor Esperado de uma variável aleatória
2. Propriedades do Valor Esperado E(X)
3. Definição da Variança de uma variável aleatória
4. Propiedades da variança V(X)

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Caso Discreto:

Seja X é uma v.a. discreta com função de probabilidade p(x). Define-se:

$$E(X) = \sum x\, p(x) \qquad \forall x \in R_x$$

A E(X) é definida desde que a série envolvida convirja absolutamente, i.é:

$$\sum /x/\, p(x) < \infty \qquad \forall x \in Rx$$

Caso contrário a E(X) não tem esperança finita e E(X) é indefinida.

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Exemplo 1: Uma caixa contem 8 lâmpadas das quais duas são defeituosas. Um homem seleciona três lâmpadas sem reposição. Encontre o número esperado de lâmpadas defeituosas.

Seja X = número de lâmpadas defeituosas $\rightarrow R_x = \{0,1,2\}$

tal que:

$P[X=0] = p(0) = 5/14$

$P[X=1] = p(1) = 30/56$

$P[X=2] = p(2) = 6/56$

então $E(X) = \sum x\, p(x) = \frac{3}{4}$.

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Exemplo 2:

Seja X uma v.a. discreta,

$$p(x) = \begin{cases} k/x^2 & para\ x = 1, 2, 3 ... \\ 0 & outro\ caso \end{cases}$$

demonstre que a E(X) não é finita.

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Caso Contínuo:

Se X é uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f(x) temos:

$$E(X) = \int x \, f(x) \, dx$$

A E(X) existirá se e somente se $\int |x| \, f(x) \, dx$ for finita

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Exemplo 1:

Seja X uma v.a. continua com f.d.p:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ a \le x < b \\ 0 & para\ outro\ caso \end{cases}$$

Demonstre que E(X) = (a + b)/2

Valor Esperado ou Média ou Esperança

Exemplo 2:

Seja X uma v.a. contínua,

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2 & para\ x > 100 \\ 0 & outro\ caso \end{cases}$$

demonstre que a E(X) não está definida.

Valor Esperado

Valor Esperado de uma função:

Se X é uma v.a. com função de probabilidade p(x) e seja φ uma função real.

Seja a v.a. $Z=\varphi(x)$ então Z possui esperança finita se:

$$\sum |\varphi(x)|\, p(x) < \infty$$

Se o anterior é verdadeiro, então:

$$E(Z) = \sum \varphi(x)\, p(x)$$

Valor Esperado

Exemplo 1:

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade p(x).

Seja φ (x) = aX + b uma função real. Calcule E[φ (x)].

Então: $E[\varphi(x)] = \sum \varphi(x)\, p(x) = \sum (a\,x + b)\, p(x)$

$$= \sum a\, x\, p(x) + \sum b\, p(x)$$

$$= a \sum x\, p(x) + b \sum p(x)$$

$$= a\, E(x) + b$$

Assim $E(aX + b) = a\,E(X) + b$

Valor Esperado

Exemplo 2:

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade p(x).

Seja $\varphi(x) = E[(X - E(X))^2]$

Demonstre que

$$E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

Valor Esperado - Propriedades

1. Se c é uma constante e $P(X=c) = 1$ então $E(X) = c$.
2. Suponha c uma constante e X uma v.a., então

$$E(cX) = c\,E(X)$$

3. Sejam X e Y duas v.a. quaisquer, então

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

4. Sejam X_1 $X_2 \ldots X_n$ n v.a., então

$$E(X_1 + X_2 \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

5. Seja (X,Y) uma v.a. bidimensional e suponha que X e Y são v.a. independentes, então

$$E(X\,Y) = E(X)\,E(Y)$$

Variança

Seja X uma v.a. e seja a variança V(X) definida como:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

A raiz quadrada positiva da V(X) é denominada desvio padrão de X denotado por σ_X

Uma forma alternativa de calcular a V(X) é:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Variança

Exemplo 1:

Seja X uma v.a. continua com f.d.p:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ a \le x < b \\ 0 & para\ outro\ caso \end{cases}$$

Demonstre que $V(X) = (b - a)^2/12$

Variança - Propriedades

1. Se c é uma constante então $V(X + c) = V(X)$
2. Se c é uma constante e X uma v.a., então

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

3. Sejam X e Y duas v.a. independentes, então

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

e $$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

4. Sejam $X_1\ X_2 \ldots X_n$ n v.a., independentes então

$$V(X_1 + X_2 \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$

3ª Série de exercícios

Revisão de v.a.

(já enviada por e-mail)