PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Aula 4 – 21 e 22 março 2007

Variáveis Aleatórias

1. Função de Disitribuição Acumulada F(x)
2. Propriedades
3. Revisão de conceitos e exercícios em sala.

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Revisão:

A quantidade de pão (em centos de libras) que uma padaria pode vender num dia é um fenômeno aleatório com a seguinte função de densidade de probabilidade.

Encontre o valor de A para que f(x) seja uma f.d.p. e calcule P(X ≥ 3)

$$f(x)=\begin{cases} Ax & para\ 0\le x<5 \\ A(10-x) & para\ 5\le x<10 \\ 0 & para\ outro\ caso \end{cases}$$

Observações sobre:

$P[a<X<b]$, $P[a\leq X<b]$, $P[a<X\leq b]$, $P[a\leq X\leq b]$

Caso 1: v.a. Discreta

Para uma v.a. discreta os $p(x)$ determinam completamente as probabilidades para os eventos

$[X\leq a]$, $[X>a]$, $[a<X<b]$, $[a\leq X<b]$, $[a<X\leq b]$, ...etc.

Caso 2: v.a. Contínua

Para uma v.a. contínua $P(X=a) = 0$ portanto as seguintes probabilidades são equivalentes:

$$P[a<X<b],\ P[a\leq X<b],\ P[a<X\leq b],\ P[a\leq X\leq b]$$

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Uma maneira alternativa de caracterizar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória é através da sua“Distribuição Acumulada”.

Trata-se de uma função que fornece, para qualquer ponto considerado, a probabilidade da variável aleatória assumir um valor menor ou igual ao correspondente a esse ponto.

$$F(x) = P[X \leq x] \,, \quad -\infty < x < \infty$$

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Se X é uma v.a. e x um número, define-se o evento

$[X \leq x] = \{w / X(w) \leq x\}$.

Calcular $P[X \leq x]$ é calcular um número cujo valor depende de x i.e. uma função de x.

A Função de Distribuição Acumulada de uma v.a. X é denotada como F(x) ou $F_X(x)$ tal que:

$$F(x) = P[X \leq x] \ , \quad -\infty < x < \infty$$

A F(x) é uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e o contradominio é o conjunto de números entre 0 e 1.

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Se X é uma v.a. discreta:

$F(x) = P[X \leq x] = P[X=x_i$ para algum $x_i \leq x]$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Se X é uma v.a. contínua:

$F(x) = P[X \leq x] = P[-\infty < X \leq x]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Diferenciando: $F'(x) = f(x)$

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Exemplo 1: Para o exercicio do nascimentos (X = nº de meninos), construa o gráfico da $F(x)$.

Lembrando:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Exemplo 2: Para o valor k = 2/3 calcule a F(x);

$$f(x)=\begin{cases} kx & para \quad 0 \le x < 1 \\ k(2-x) & para \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & para\ outro\ caso \end{cases}$$

Função de Distribuição Acumulada F(x)

Propriedades:

(a) $0 \leq F(x) \leq 1$

(b) Se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$ i.e. a F(x) é não decrescente.

(c) $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

(d) A Função de Distribuição Acumulada F(x) ou $F_x(x)$ é continua pela direita. $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Determinando probabilidades através da F(x)

Cálculo de $P[a<X<b] = F(b) - F(a)$

Desde que $[X \leq a] \cup [a<X \leq b] = [X \leq b]$ então

$$P[X \leq a] + P[a<X \leq b] = P[X \leq b]$$

$$P[a<X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

$$P[a<X \leq b] = F(b) - F(a)$$

Determinando probabilidades através da F(x)

Cálculo de $P[X>a] = 1 - F(a)$

Desde que $[X \leq a] \cup [X>a] = S$ então

$$P[X \leq a] + P[X>a] = P(S) = 1$$

$$P[X>a] = 1 - P[X \leq a]$$

$$P[X>a] = 1 - F(a)$$

3ª Série de exercícios

Em anexo