PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

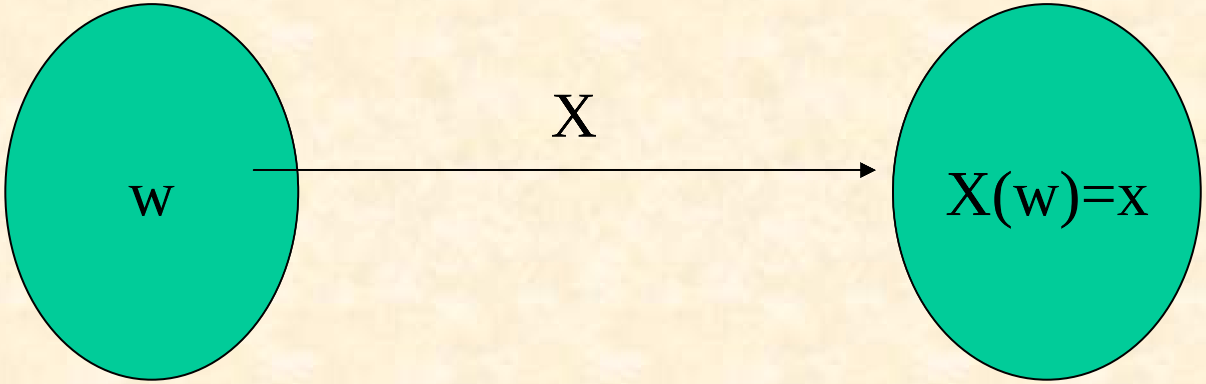
Aula 3 – 14 e 15 março 2007

Variáveis Aleatórias

1. Definição Variável Aleatória
2. Variável Aleatória Discreta
3. Variável Aleatória Contínua

Definição Variável Aleatória

Uma variável aleatória é uma função X que associa a cada elemento $w \in S$ um número real X(S).



O contradominio da função é $R_x = \{x_1, x_2, ...x_k\}$

Definição Variável Aleatória

Exemplo 1:

Seja o experimento de lançar 3 moedas e seja X = número de caras. Defina o R_x

Seja S= {(c,c,c), (c,c,k),…………………….(k,k,k)}, então:

X(c,c,c) = 3

X(c,c,k) = X(c,k,c) = X(k,c,c) = 2

X(c,k,k) = X(k,k,c) = X(k,c,k) = 1

X(k,k,k) = 0

Assim $R_x = \{0,1,2,3\}$

Definição Variável Aleatória (v.a.)

Exemplo 2:

Seja o experimento que consiste em tomar um conjunto de lâmpadas e ensaiá-las até encontrar a primeira defeituosa.

Seja X = número de lâmpadas ensaiadas.

Demonstre que $R_x = \{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Variável Aleatória Discreta

Def.1: Seja X uma v.a. Se o número de valores possíveis de X for finito ou infinito numerável então X é uma v.a. discreta.

Def. 2: Se X é uma v.a. discreta, então a cada resultado possível x_i será associado um número $p(x_i) = P(X=x_i)$ denominado probabilidade de x_i.

Estes números p(xi) devem satisfazer:

a) $p(x_i) \geq 0$

b) $\sum p(xi) = 1$

Variável Aleatória Discreta

Exemplo 3:

Para o experimento das moedas encontre a distribuição [x, p(x)].

Dado que $R_x = \{0,1,2,3\}$, então:

$P(X=0) = p(0) = 1/8$

$P(X=1) = p(1) = 3/8$

$P(X=2) = p(2) = 3/8$

$P(X=3) = p(3) = 1/8$

Assim

x	0	1	2	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Variável Aleatória Discreta

Exemplo 4:

Para o exemplo das lâmpadas assuma que:

P(lâmpada boa) = p e P(lamp. defeituosa) = 1 – p = q

Sendo X = número de lâmpadas ensaidas $\Rightarrow R_x = \{1,2,3......\}$

$X(D) = 1 \Rightarrow P(X=1) = 1 - p$

$X(BD) = 2 \Rightarrow P(X=2) = p\,(1 - p)$

$X(BBBB......D) = k \Rightarrow P(X=k) = p^{k-1}\,(1 - p)$

Demonstre que $p(x) = P(X=k) = p^{k-1}\,(1 - p)$ cumpre as condições.

Variável Aleatória Discreta

Exemplo 5:

Uma variável aleatória X pode tomar quatro valores, com probabilidades

$(1 + 3x)/4$, $(1 - x)/4$; $(1 + 2x)/4$ e $(1 - 4x)/4$

Para que valores de x é esta uma distribuição de probabilidades?

Rpta: $(-1/3 \leq x \leq 1/4)$

Variável Aleatória Contínua

Def. 1: Seja X uma v.a.contínua se o contradomínio de X está formado por todos os valores reais num intervalo $c \leq x \leq d$ ou uma coleção de intervalos.

Def. 2: Se X é uma v.a. contínua define-se a função de densidade de probabilidade f(x) que cumpre as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x$

b) $\int f(x)\, dx = 1$

c) Para quaisquer a e b, com $-\infty < a < b < +\infty$, temos:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Variável Aleatória Contínua

Exemplo:

Seja X uma v.a. contínua. Verifique que as seguintes f.d.p. cumprem as condições:

(a) $f(x) = x/2$ para $0 \leq x \leq 2$, e 0 para outro caso (o.c.)

(b) $f(x) = 1/(b - a)$ para $a < x < b$, e 0 para o.c.

(c) Calcule o valor da constante k (Rpta. k = 2/3)

$$f(x) = \begin{cases} kx & para \quad 0 \leq x < 1 \\ k(2-x) & para \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & para\ outro\ caso \end{cases}$$

3^a Série de exercícios

Em anexo