
PROBABILIDADES E INTRODUÇÃO A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Aula 2 - 07 e 08 março 2007

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

1. Probabilidade Condicional
2. Propriedades
3. Partições
4. Teorema de Probabilidade Total
5. Teorema de Bayes
6. Independencia de Eventos

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Probabilidade Condicional $P(A|B)$

É definido como a probabilidade de ocorrência do evento A quando se dispõe da informação que o evento B já ocorreu.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema do produto:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Propriedades:

i. $0 \leq P(A \setminus B) \leq 1$

ii. $P(S \setminus B) = 1$

iii. Se A e B forem mutuamente excludentes então

$$P(A \cup B \setminus C) = P(A \setminus C) + P(B \setminus C)$$

iv. Sejam A_1, A_2, \dots eventos mutuamente excludentes,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \setminus B) = P(A_1 \setminus B) + P(A_2 \setminus B) + \dots$$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercícios:

i) $P(\bar{A} \setminus B) = 1 - P(A \setminus B)$

ii) $P(A \cup B \setminus C) = P(A \setminus C) + P(B \setminus C) - P(A \cap B \setminus C)$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Partições:

Dizemos que os eventos B_1, B_2, \dots, B_k representam uma partição do espaço amostral S quando:

$$a) B_i \cap B_j = \phi$$

$$b) \bigcup_{i=1}^k B_i = S$$

$$c) P(B_i) > 0$$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Teorema de Probabilidade Total:

Sejam B_1, B_2, \dots, B_k uma partição do espaço amostral e A um evento qualquer, então:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercício:

Suponha B_1 , B_2 e B_3 eventos mutuamente excludentes.
Se $P(B_j) = 1/3$ e $P(A/B_j) = j/6$ para $j = 1, 2, 3$. Calcule $P(A)$.

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Teorema de Bayes:

Dada a situação anterior estamos interessados em encontrar a probabilidade de um evento particular B_j .

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercícios:

i) Suponha que temos duas urnas 1 e 2, cada uma com duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta. A urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso; a seguir uma das suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada dessa gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna 2?

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Independência de eventos:

Os eventos A e B são independentes se: $P(A \setminus B) = P(A)$

Ou equivalentemente $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Propriedade:

Se A e B são eventos independentes então seus complementos também são independentes.

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercício 1:

Sejam A e B dois eventos independentes tais que a probabilidade de que ambos ocorram simultaneamente é $1/6$ e a probabilidade que nenhum deles ocorra é $1/3$. Encontre $P(A)$, $P(B)$, serão $P(A)$ e $P(B)$ unicamente determinadas?

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercício 2:

Uma urna contém quatro bolas brancas e duas bolas vermelhas. Uma bola é extraída. Se a bola for branca, esta não será devolvida à urna. Se a bola for vermelha, esta será devolvida à urna. Outra bola é extraída.

Seja A o evento: a primeira bola extraída é branca.

Seja B o evento: a segunda bola extraída é branca.

Responda se os seguintes enunciados são verdadeiros ou falsos, justificando em cada caso a sua conclusão:

- a) $P(A) = 2/3$
- b) $P(B) = 3/5$
- c) $P(B/A) = 3/5$
- d) $P(A/B) = 9/14$
- e) Os eventos A e B são mutuamente excludentes
- f) Os eventos A e B são independentes

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Exercício 3:

Uma caixa contém três moedas, duas delas não viciadas e uma com duas caras. Uma moeda é selecionada aleatoriamente e lançada. Se ocorrer cara, a moeda é lançada novamente. Se ocorrer coroa, então outra moeda é selecionada dentre as duas restantes e lançada.

- a) Encontre a probabilidade de ocorrer cara duas vezes R: $1/2$
- b) Se a mesma moeda é lançada duas vezes, encontre a probabilidade de ser a de duas caras. R: $1/2$
- c) Encontre a probabilidade de ocorrer coroa duas vezes. R: $1/12$

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Desafio 1:

Três prisioneiros são informados pelo seu carcereiro de que um deles será escolhido aleatoriamente para ser executado, e os outros dois prisioneiros serão libertados. O prisioneiro A pergunta ao carcereiro, em segredo, qual de seus dois companheiros será libertado, comentando que não há nada de errado com esta informação, uma vez que ele já sabe de antemão que pelo menos um deles será libertado. O carcereiro recusa-se a fornecer esta informação argumentando que, se A conhecesse qual de seus colegas ficará livre, então a sua própria probabilidade de ser executado mudaria de $1/3$ para $\frac{1}{2}$, uma vez que ele seria um dos dois prisioneiros. Você está de acordo com esta argumentação? Explique e demonstre.

CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADES

Desafio 2:

Uma moeda honesta é jogada $2n$ vezes.

- a) Obtenha a probabilidade de ocorrer um igual número de caras e coroas;
- b) Demonstre que a probabilidade calculada em a), é uma função decrescente de n .