



Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro

Novembro de 2018

Prova individual e sem consulta.

A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

Duração da parte teórica: 1 hora e 30 minutos.

PARTE TEÓRICA

1ª Questão Considere uma seção de concreto armado com um eixo de simetria submetida a uma FNS por um par de esforços ($N_d = 0$, $M_d \neq 0$), tal que o momento M_d é perpendicular ao eixo de simetria. A solução $\bar{\mathbf{x}} = \{ \bar{\varepsilon}_0 \quad \bar{k} \}^T$ que satisfaz às equações de equilíbrio foi obtida numericamente pelo método de Newton-Raphson e verificou-se que a distribuição de deformações $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_0 + y \cdot \bar{k}$ respeita as inequações dos polos de ruína do ELU. Considerando que foi utilizada uma estimativa inicial $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ e que foram adotadas precisões e tolerâncias adequadas para a solução do problema de verificação, é possível afirmar que os requisitos de segurança foram atendidos para a seção em questão, correto?

2ª Questão A nFOC pode ser entendida como uma generalização da nFNC para o cálculo dos esforços resistentes, verificação e dimensionamento (otimização por sucessivas verificações) para quaisquer seções transversais poligonais de concreto armado sujeitas à esforços (N_d, M_{dx}, M_{dy}) quaisquer, oriundos das tensões normais. Em ambas as metodologias, o cálculo dos esforços resistentes e das derivadas dos esforços resistentes do concreto (originados pelas tensões normais atuantes na área de concreto) para uma distribuição de deformações linear foi abordado analiticamente. Descreva como a metodologia nFOC generaliza o cálculo do esforço normal resistente do concreto $N_c = \iint_A \sigma_c dA$ para uma seção poligonal qualquer.

3ª Questão A verificação de pilares isostáticos de concreto armado submetidos à compressão uniforme foi apresentado em aula equacionando simultaneamente as verificações de ELU da seção e da carga crítica de instabilidade do pilar, a qual é assumida como sendo aproximadamente a carga crítica de Euler $N_{cr} \approx \pi^2 EI / L_e^2$, considerando a rigidez à flexão do pilar de concreto armado \hat{EI} . Em essência, o equacionamento assume o material do pilar como elástico-linear ou não? Por que é razoável assumir que a rigidez à flexão do pilar é $\hat{EI} = \iint_A (d\sigma/d\varepsilon) y^2 dA$, sendo \hat{EI} uma rigidez da seção transversal? No caso de compressão uniforme para um pilar com seção e arranjo constantes, mas não duplamente simétricos, as hipóteses do equacionamento continuam válidas?

Questão	1	2	3
Valor	1,5	1,5	2,0

/SGFC/SWP3.5

Alguns resultados e comentários (sucintos):

1ª Questão O problema traz informações que permitem afirmar que o problema de verificação tem uma solução fisicamente viável, a qual foi encontrada numericamente pelo método de N-R. No entanto, por se tratar de um problema de FNS, não é possível afirmar que todos os requisitos de segurança foram atendidos. No caso de FNS, por questões de economia, é comum dimensionar a armadura longitudinal para um equilíbrio com uma distribuição de deformações $\bar{\mathbf{x}} = \{ \bar{\varepsilon}_0 \quad \bar{k} \}^T$ muito próxima ou sobre a fronteira da região viável do ELU. Caso a distribuição de deformações obtida com a solução do problema de verificação esteja sobre a fronteira do ELU (uma ilustração da fronteira do ELU que corresponde às possibilidades para o dimensionamento na FNS poderia auxiliar na construção da resposta), deve-se ainda verificar se o limite de ductilidade foi respeitado para garantir uma ruína avisada, que é um dos requisitos de segurança.

2ª Questão Assunto discutido em sala. Em caso de dúvidas, releia a tese do professor Flávio, páginas 8-16.

2ª Questão Em essência, o equacionamento assume sim que podemos aproximar um pilar de concreto armado sob compressão uniforme a um pilar de material elástico-linear. Isso porque assumimos que a carga crítica de instabilidade é obtida pela expressão da carga crítica de Euler, a qual pode ser deduzida a partir da energia potencial total Π de um pilar constituído por um material elástico-linear (fisicamente linear). No caso da compressão uniforme, $k = 0$, a hipótese de assumir o material elástico-linear, mesmo no caso do concreto que sabemos que é um material fisicamente não linear, não é tão grosseira. Isso porque, na compressão uniforme todos os pontos da seção transversal tem uma mesma deformação $\varepsilon = \varepsilon_0$ e, portanto, todos os pontos estão sujeitos a uma mesma tensão normal $\sigma = \sigma(\varepsilon_0)$. Logo, a rigidez à flexão da seção resulta $\hat{EI} = \iint_A [d\sigma/d\varepsilon(\varepsilon_0)] y^2 dA = [d\sigma/d\varepsilon(\varepsilon_0)] \iint_A y^2 dA = [d\sigma/d\varepsilon(\varepsilon_0)] I$. Note que não somente todos os pontos da seção transversal tem a mesma deformação como também todas as infinitas seções transversais do pilar tem a mesma distribuição constante de deformações $\varepsilon = \varepsilon_0$. Logo, é razoável assumir que o pilar como um todo tem uma rigidez à flexão igual a: $\hat{EI} = [d\sigma/d\varepsilon(\varepsilon_0)] I$. Mesmo no caso de seções não duplamente simétricas, as hipóteses do equacionamento continuam válidas. Isto porque as hipóteses não dependem da simetria da seção e do arranjo, mas sim do fato de ser um problema de compressão uniforme, o qual independentemente da seção, irá fornecer esforços (momento e normal) tais que a curvatura seja nula e todos os pontos do pilar se deformem igualmente. A confusão pode ocorrer para compressões centradas, as quais dependem de uma dupla-simetria da seção para se tornarem problemas de compressão uniforme.



Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro

Novembro de 2018

Consulta livre a materiais didáticos e utilização de softwares gerais liberada. Utilização de programas previamente confeccionados pelo próprio aluno liberada (obrigatória a entrega de cópia eletrônica específica para cada questão junto com a resolução).

A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

Sempre explicita a distribuição de deformações da seção mais solicitada na documentação da solução.

Duração da parte numérica: 4 horas.

PARTE NUMÉRICA

Considere os seguintes dados:

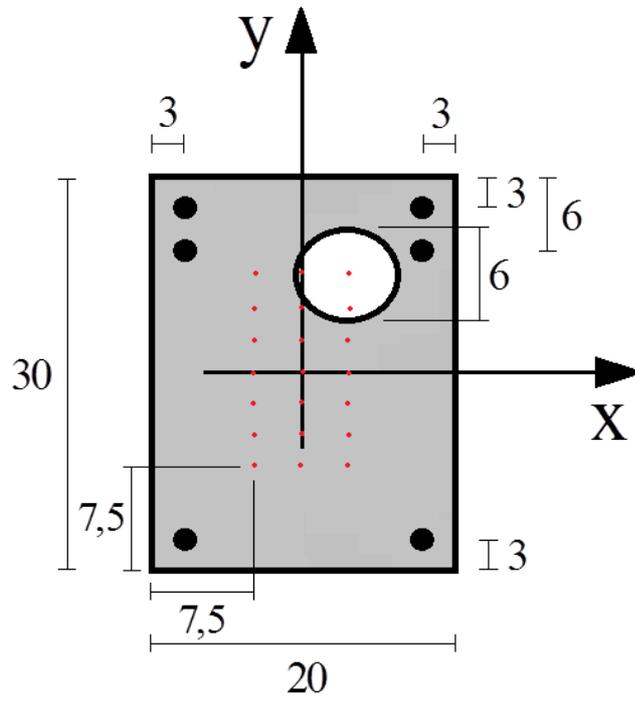
- Aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C90 com diagrama não-linear ($f_{ck} = 90$ MPa, $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e $\gamma_c = 1,40$).

4ª Questão Considere um pilar engastado-livre com comprimento $L = 7$ m e seção transversal retangular $20 \times h$ (em cm), tal que $h \geq 20$ cm, submetido a um esforço normal $N_d = 2000$ kN aplicado na extremidade livre com uma excentricidade $e = 4$ cm na direção de h . Considerando a seção do pilar armada com três camadas de forma duplamente simétrica com $8\phi 25$ (considere um cobrimento das barras de 3 cm), pede-se:

a) Verifique a estabilidade do pilar para $h = 50$ cm. Caso haja equilíbrio, verifique se a flecha máxima do pilar é muito diferente quando avaliada por Diferenças Finitas e Pilar Padrão?

b) Qual a menor dimensão h que garante que o pilar não rompa? Ilustre a deformada do pilar para o valor de h encontrado. Considere que o processo construtivo tenha uma precisão 2,5 cm para as dimensões da seção.

5ª Questão Considere a seção retangular 20×30 cm, com um furo circular com 6 cm de diâmetro e arranjo pré-fixado, conforme a figura a seguir (fora de escala, dimensões em cm), submetida aos esforços, consistentes com a regra da "mão-direita", $N_d = 3000$ kN, $M_{dx} = -5000$ kN·cm e $M_{dy} = -10000$ kN·cm. Sabendo que a distância do centro do furo às faces da seção deve ser de pelo menos 7,5 cm e que o processo construtivo permite uma precisão de 2,5 cm para o seu posicionamento, determine a posição (coordenadas x, y) do centro do furo que resulta em um dimensionamento com a menor área teórica de armadura possível. Os pontos na figura ilustram as possibilidades viáveis para as coordenadas do centro do furo. (Dica: A origem do sistema de coordenadas deve estar no C.G. da seção bruta de concreto, considerando a presença do furo).



Questão	4a	4b	5
Valor	2,0	1,5	1,5

/SGFC/SWP3.5

Alguns resultados e comentários (sucintos):

4ª Questão

a) Para solucionar o problema por Diferenças Finitas, optou-se por discretizar o pilar em 7, 70 e 700 trechos igualmente espaçados. Os seguintes resultados de flecha máxima na extremidade livre do pilar e dos parâmetros da distribuição de deformações na seção mais solicitada (seção do engaste) foram obtidos:

7 trechos: $f = 4,697$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5570$, $k = 2,1162e - 2$ 1/cm.

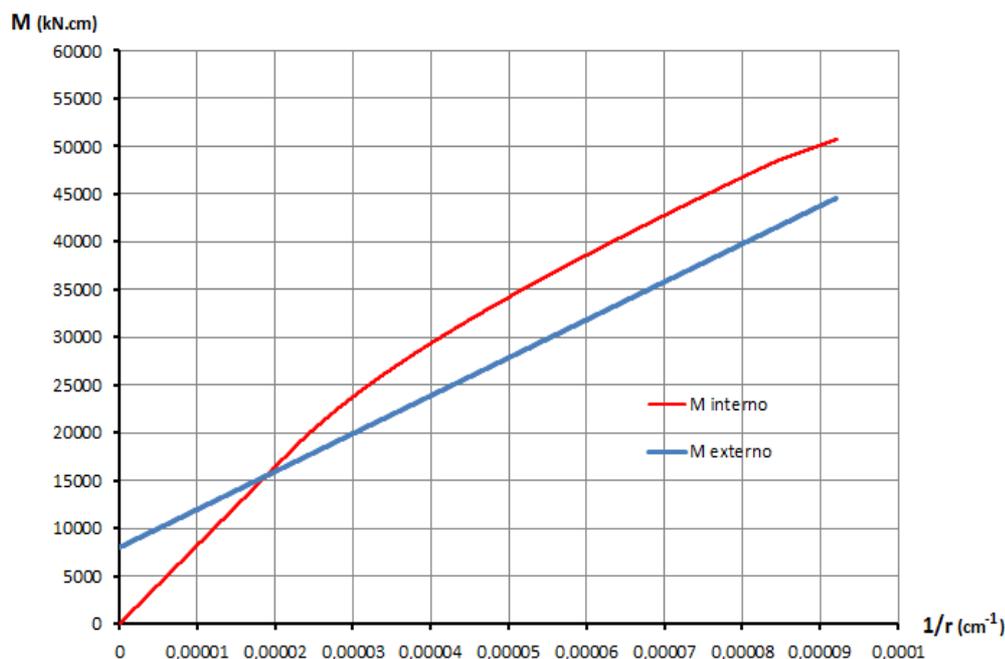
70 trechos: $f = 4,678$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5570$, $k = 2,1117e - 2$ 1/cm.

700 trechos: $f = 4,678$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5570$, $k = 2,1116e - 2$ 1/cm.

Em todas as análises de verificação foram necessárias 34 iterações para que a flecha adimensionalizada convergisse.

Com o método do Pilar Padrão os seguintes resultados de flecha máxima na extremidade livre do pilar e dos parâmetros da distribuição de deformações na seção mais solicitada (seção do engaste) foram obtidos: $f = 3,738$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5556$, $k = 1,8820e - 2$ 1/cm.

A título de curiosidade, as curvas de momento interno e de momento externo são ilustradas na figura a seguir:



As seguintes tolerâncias/precisões foram adotadas:

- Tolerância para a norma adimensionalizada do vetor de equações de equilíbrio:

$$\mathbf{f}_{ad} = \sqrt{[(N_d - N_r) / (\sigma_{cd} A_c)]^2 + [(M_d - M_r) / (\sigma_{cd} A_c h)]^2} \leq 1e - 5$$

- Tolerância para a singularidade da matriz de rigidezes adimensionalizada:

$$\|[\mathbf{R}_{ad}]\| = \hat{EA} / (\sigma_{cd} \cdot A_c) \cdot \hat{EI} / (\sigma_{cd} \cdot A_c \cdot h^2) - \hat{ES} / (\sigma_{cd} \cdot A_c \cdot h) \leq 1e - 10$$

- Tolerância para indeterminações do tipo $1/k$:

$$h \cdot k \leq 1e - 3$$

- Precisão para a convergência da flecha adimensionalizada:

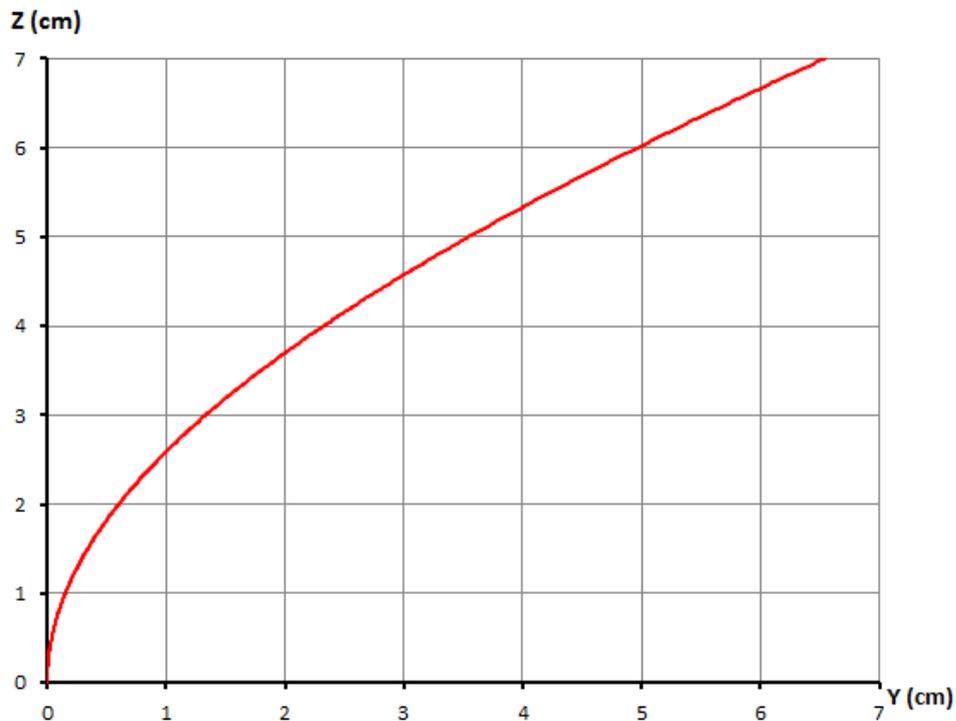
$$f_{ad} = \|f\| / h \leq 1e - 8$$

Observação: $d = c + \phi = 4,25$ cm. Caso $d = c + \phi = 3$ cm a resposta seria:

Diferenças Finitas: 700 trechos: $f = 4,336$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5560$, $k = 1,9494e - 2$ 1/cm.

Pilar Padrão: $f = 3,467$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5548$, $k = 1,7456e - 2$ 1/cm.

b) A menor dimensão que garante que o pilar não rompa, considerando que a dimensão h pode variar de 2,5 cm em 2,5 cm, é $h = 47,5$ cm. Os resultados de flecha máxima e dos parâmetros da distribuição de deformações na seção mais solicitada foram: $f = 6,539$ cm, $\varepsilon_0 = 0,5803$, $k = 3,0347e - 2$ 1/cm. A figura a seguir ilustra a deformada do pilar:



Observação: $d = c + \phi = 4,25$ cm. Caso $d = c + \phi = 3$ cm a resposta seria:

Dimensão mínima: $h = 45$ cm,

Flecha máxima: $f = 11,196$ cm,

Parâmetros da distribuição de deformações na seção mais solicitada: $\varepsilon_0 = 0,5558$, $k = 5,5176e - 2$ 1/cm.

5ª Questão

Os resultados de área teórica de armadura obtidos com os dimensionamentos para as 21 possibilidades de posicionamento do centro do furo foram:

x (cm)	y (cm)	A_{st} (cm ²)
-2,5	-7,5	43,83
0	-7,5	44,15
2,5	-7,5	44,82
-2,5	-5	43,67
0	-5	43,89
2,5	-5	44,45
-2,5	-2,5	43,53
0	-2,5	43,66
2,5	-2,5	44,10
-2,5	0	43,40
0	0	43,44
2,5	0	43,77
-2,5	2,5	43,29
0	2,5	43,23
2,5	2,5	43,46
-2,5	5	43,18
0	5	43,03
2,5	5	43,16
-2,5	7,5	43,08
0	7,5	42,84
2,5	7,5	42,87

Esses resultados foram obtidos para o problema de dimensionamento com arranjo monoparamétrico e considerando a área total A_{st} como uma variável contínua. Os dimensionamentos foram obtidos a partir do método da bisseção. As sucessivas verificações foram feitas com o equacionamento da nFOC. As seguintes tolerâncias/precisões foram adotadas para a análise:

- Tolerância para a norma adimensionalizada do vetor de equações de equilíbrio:

$$\mathbf{f}_{ad} = \sqrt{[(N_d - N_r) / (\sigma_{cd} A_c)]^2 + [(M_{dx} - M_{rx}) / (\sigma_{cd} A_c h)]^2 + [(M_{dy} - M_{ry}) / (\sigma_{cd} A_c h)]^2} \leq 1e - 5$$

- Tolerância para a singularidade da matriz de rigidezes adimensionalizada:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_{ad}\| = & EA \cdot \hat{EI}_{xx} \cdot \hat{EI}_{yy} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot A_c \cdot Tr(\mathbf{I})^2 \right) - ES_x \cdot \hat{ES}_y \cdot \hat{EI}_{xy} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot (A_c \cdot h)^2 Tr(\mathbf{I}) \right) \\ & - \hat{ES}_x \cdot \hat{ES}_y \cdot \hat{EI}_{xy} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot (A_c \cdot h)^2 Tr(\mathbf{I}) \right) - EA \cdot \hat{EI}_{xy} \cdot \hat{EI}_{xy} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot A_c \cdot Tr(\mathbf{I})^2 \right) \\ & - \hat{ES}_y \cdot \hat{ES}_y \cdot \hat{EI}_{xx} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot (A_c \cdot h)^2 Tr(\mathbf{I}) \right) - \hat{ES}_x \cdot \hat{ES}_x \cdot \hat{EI}_{yy} / \left(\sigma_{cd}^3 \cdot (A_c \cdot h)^2 Tr(\mathbf{I}) \right) \leq 1e - 8 \end{aligned}$$

onde $Tr(\mathbf{I})$ é o traço do tensor de momentos de inércia da seção $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$.

- Tolerância para indeterminações do tipo $1/k$:

$$h \cdot k \leq 1e - 3$$

- Tolerância para indeterminações do tipo $1/\Delta\varepsilon$:

$$h \cdot k \leq 1e - 3$$

- Precisão para a área teórica de armadura:

$$1e - 5 \text{ cm}^2$$

Portanto, a coordenada do centro do furo que resulta na mínima área de armadura teórica é $(x; y) = (0; 7,5)$. O dimensionamento nesse caso resulta: $A_{st} = 42,84 \text{ cm}^2$, e a seção se equilibra para a seguinte

distribuição de deformações: $\varepsilon_0 = 1,3052$ por mil, $k_x = -0,0075450$ 1/cm e $k_y = -0,1178805$ 1/cm.

Observação: A área $A_{st} = 42,84$ cm² corresponde a aproximadamente 7,5 % da área da seção bruta de concreto A_c . Não que fosse o objetivo da questão, mas é válido lembrar que o limite para a área máxima de armadura definido pela NBR 6118 para pilares (elementos submetidos à flexo-compressão) é de 8% da área A_c . No caso de vigas (elementos predominantemente submetidos à flexão) esse limite é de 4% da área A_c . Visto que a questão aborda um problema de flexo-compressão, os dimensionamentos estão adequados.