



Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Novembro de 2013

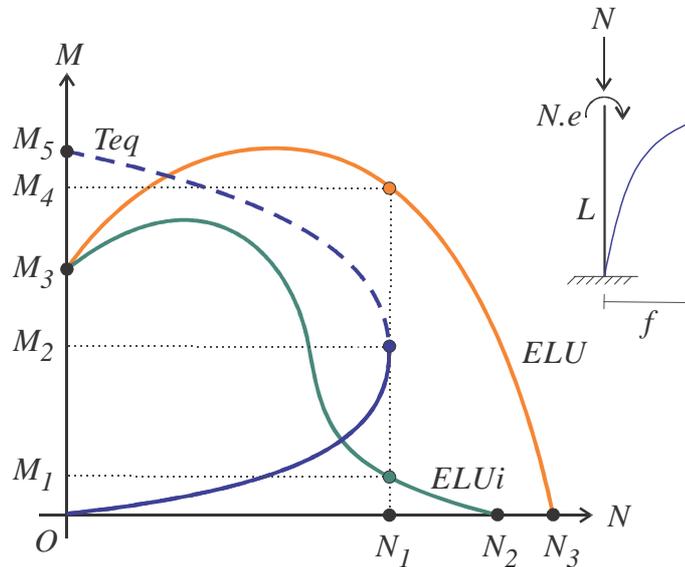
Absolutamente sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

Durações máximas: parte teórica 2 h; parte numérica 2 h

PARTE TEÓRICA

1ª Questão A figura seguinte mostra a curva de interação ELU ($N_d \times M_d$), a curva crítica de projeto ELUi ($N_{cr} \times M_{cr}$) e uma trajetória de equilíbrio Teq ($N_d \times M_{total}$). Considerando um pilar constante com cargas concentradas conforme a figura (onde também está esquematizada uma deformada típica) pede-se:



- Esquematize a reta de momentos de primeira ordem $N \cdot e$ considerando que a excentricidade e seja aquela utilizada para obtenção da curva Teq.
- Considerando aplicada a força N_1 , é possível apontar os momentos de primeira e segunda ordem e seus respectivos valores?
- Considerando o processo da Coluna Modelo, seria possível obter o momento M_5 ?
- Considerando o processo da Coluna Modelo, esquematize a situação do pilar submetido a N_1 em um diagrama momento-curvatura ($1/R \times M_d$).
- Considerando o processo da Coluna Modelo, esquematize a situação do pilar submetido a N_2 em um diagrama momento-curvatura ($1/R \times M_d$).
- A força N_2 pode ser calculada analiticamente? E numericamente?

2ª Questão Explique como poderia ser feita a verificação da estabilidade, por Diferenças Finitas, de um pilar isostático submetido à Flexão Oblíqua Composta.

3ª Questão Considerando a verificação e o dimensionamento de seções transversais de concreto armado e os assuntos discutidos nesta disciplina (FNS, FNC, nFNC, FOC e nFOC), discuta, justificando, qual seria uma sequência ótima de apresentação dos assuntos objetivando o aprendizado e a prática da engenharia estrutural.

Questão	1a	1b	1c	1d	1e	1f	2	3	Numéricas
Valor	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	5,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (1)$$

Alguns adimensionais

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} & \mu &= \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} & \omega &= \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} & \omega_i &= \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} & p_i &= \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} & \alpha_i &= \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}} \\ \eta &= \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} & \eta_a &= \eta \frac{a}{h} & \beta_x &= \frac{x}{h} & \beta_i &= \frac{d_i}{h} & \delta &= \frac{d'}{h} & \beta_{cg} &= \frac{cg}{h} & \theta &= hk = 1000 \frac{h}{R} \end{aligned}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i \quad (2)$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i \quad (3)$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR - ELU)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (5)$$

Equações de equilíbrio (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s \quad (6)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s \quad (7)$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k y \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta \beta_i \quad (9)$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) [$\kappa \neq 0$]

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \quad (10)$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0) \quad (11)$$

onde

$$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b) \quad (12)$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em ‰, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto

$$\bar{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa} \Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) & \frac{b}{\kappa^3} [\Delta J_2 - 2 (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde

$$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b) \quad (14)$$

$$(15)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (16)$$

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (17)$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - \varepsilon(n+2)}{4(n+2)(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3) \varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (18)$$

Rotação de eixos

$$[U \quad V] = [X \quad Y] \times \mathbf{R}(\varphi) \quad \text{onde } \mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[X \quad Y] = [U \quad V] \times \mathbf{R}(-\varphi) \quad (20)$$

Cálculo de características de polígonos planos

(Valores com sinais corretos para circuição anti-horária. N : número de vértices.)

$$a_k = X_k Y_{k+1} - X_{k+1} Y_k \quad (21)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \quad (22)$$

$$\text{Área} \times X_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (X_k + X_{k+1}) \quad (23)$$

$$\text{Área} \times Y_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (Y_k + Y_{k+1}) \quad (24)$$

Equações de equilíbrio (FOC)

(onde n é o número de barras, A_{cc} é a área bruta de concreto comprimido e os momentos fletores têm a convenção da “consistência de índices”)

$$N_d = \iint_{A_{cc}} \sigma_c dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} \quad (25)$$

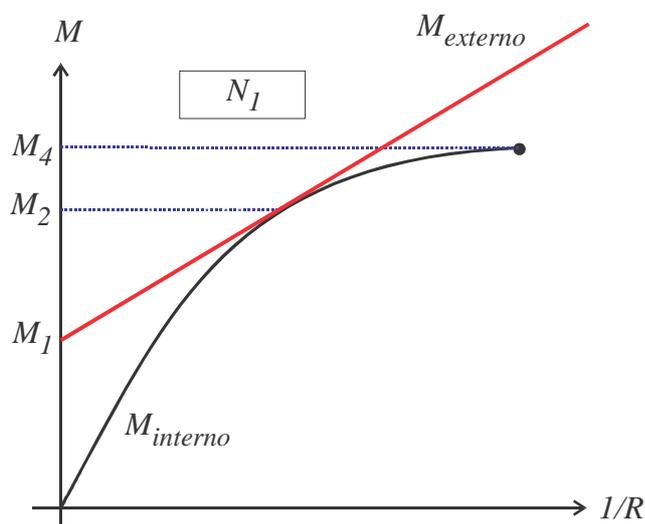
$$M_{dx} = \iint_{A_{cc}} \sigma_c X dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} X_{si} \quad (26)$$

$$M_{dy} = \iint_{A_{cc}} \sigma_c Y dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} Y_{si} \quad (27)$$

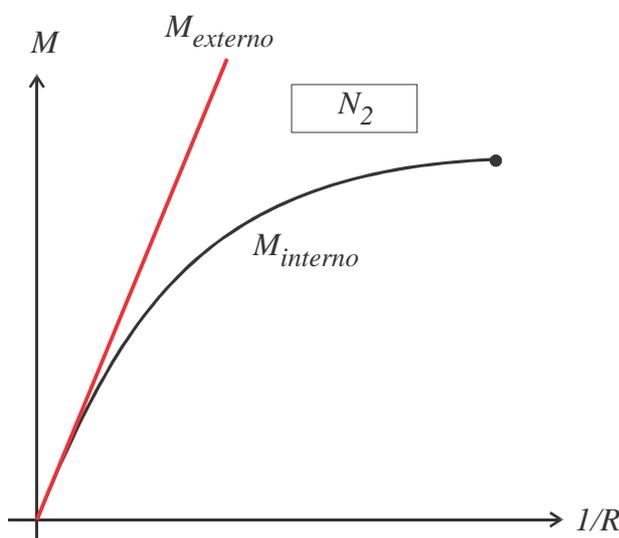
Observação: lembrar que quando for utilizado o diagrama retangular simplificado para o concreto comprimido a tensão máxima é dada por $\sigma_{cd} = 0,80 f_{ck}/\gamma_c$ e a “área comprimida” é aquela delimitada por $0,8x$.

força normal, que é nula). O valor M_3 , por sua vez, é de fácil obtenção, mas por conta de ser uma característica resistente da seção transversal e não um ponto da Teq.

d) O esboço, que deveria ser justificado e conter referências às grandezas mostradas na questão da prova, é o seguinte



e) O ponto a ser considerado é que a a força normal N_2 caracteriza uma carga crítica, em compressão uniforme e que, portanto, a tangente ao diagrama momento curvatura deve ser equivalente à rigidez EI da inclinação da reta de momentos externos. O esboço seguinte ilustra a situação.



f) O assunto foi amplamente discutido em sala de aula. É possível calcular a carga teórica numericamente e, em alguns casos particulares, analiticamente também.

2ª Questão Pode-se fazer um paralelo com a verificação para a flexo-compressão, partindo-se da flecha nula (decomposta), com a obtenção do terno de esforços solicitantes (N_d , M_{dx} , M_{dy}), com uma verificação por N-R levando, potencialmente, à distribuição de deformações (ε_o , k_x , k_y), com a aproximação das curvaturas pelas segundas derivadas, pela aplicação das expressões de Diferenças Finitas ($\partial^2 z / \partial x^2$ e $\partial^2 z / \partial y^2$) e pela obtenção das flechas na seção 1. Os demais passos do procedimento são análogos. As iterações continuam até a ruptura

de alguma seção transversal ou até a convergência, a menos de uma precisão, da flecha arbitrada e a calculada.

3ª Questão Em geral houve uma grande aderência das sugestões com o que foi praticado. Alguns alunos mudaram, um pouco, a sequência mas ninguém sugeriu a retirada ou substituição de assuntos. Agradeço todas as sugestões!



Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Novembro de 2013

Consulta livre (menos a seres humanos, próximos ou distantes), utilização de softwares gerais liberada. Utilização de programas e planilhas previamente confeccionados pelo próprio aluno liberada, criação coletiva Civil15 de ferramentas para a nFOC liberada (entregar cópia eletrônica ao final da prova). A interpretação das questões faz parte da prova. Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos. Sempre explicita a distribuição de deformações e a linha neutra na documentação da solução.

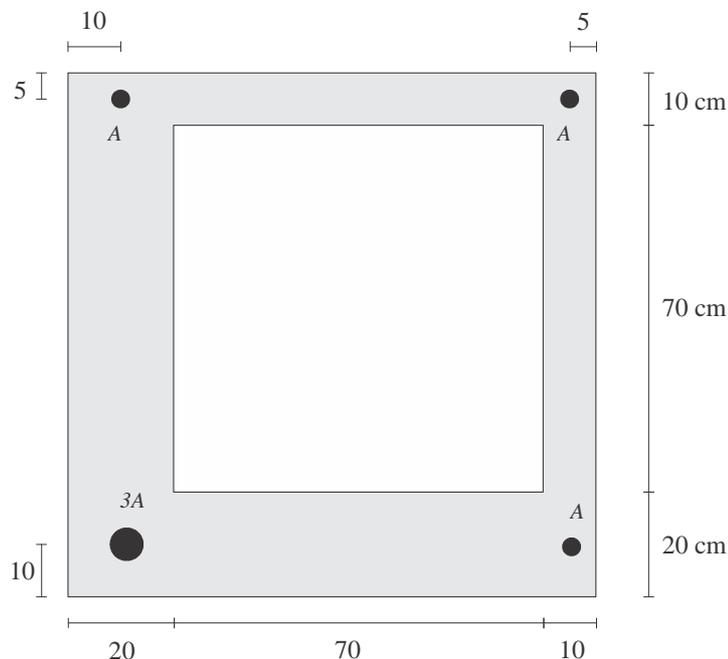
Parte numérica: duração máxima de 2 h

PARTE NUMÉRICA

Considere os seguintes dados somente para as questões numéricas:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_F = 1,40$.
- Aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Diâmetros comerciais a serem considerados (mm): 10; 12,5; 16; 20; 22; 25; 32 e 40.
- Concreto C30, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 30$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).

4ª Questão Considere a seção retangular vazada, com arranjo de armadura conforme figura seguinte. Observação: a barra do canto inferior esquerdo tem três vezes a área das outras barras.



- Dimensione a área de armadura total A_s quando a seção estiver submetida aos esforços, consistentes com a regra da “mão-direita”, $N_d = 1,234$ MN; $M_{dx} = -0,860$ MN·m e $M_{dy} = 0,215$ MN·m;
- Escolha a bitola das barras e faça a verificação da seção para os esforços anteriores.
- Com a linha neutra do item anterior, calcule os esforços resistentes com o diagrama RS e metodologia “tradicional”.

5ª Questão Considere uma seção transversal quadrada de lado 20 cm armada de forma duplamente simétrica com $4\phi 10$ (considere $d' = 2$ cm). O pilar é engastado-livre com cargas concentradas em sua extremidade livre $N_d = 0,6$ MN e $M_d = 0,015$ MN·m. Pede-se:

a) Analise, pelo processo da Coluna Modelo, a estabilidade deste pilar. Caso seja estável forneça a sua deformada e, em caso contrário, calcule a bitola necessária para sua estabilidade.

b) Faça uma, e somente uma, iteração por Diferenças Finitas partindo da flecha máxima de 6 mm (utilize, no mínimo, 5 divisões do pilar).

Questão	Teóricas	4a	4b	4c	5a	5b
Valor	6,0	2,0	0,5	0,5	1,0	1,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

/F_{MN}/SWP3.5

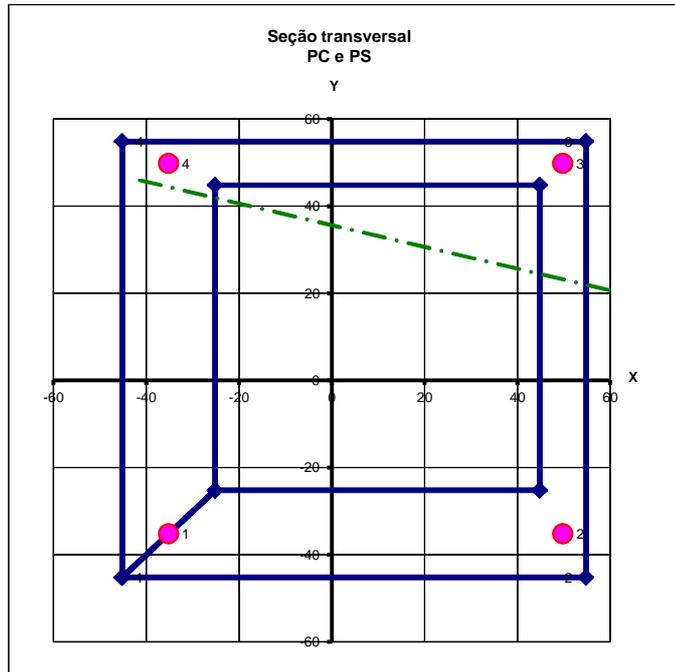
4ª Questão

a) Como foi pedida a área total de armadura A_s e o item (b) trata de escolha de diâmetros comerciais, não era esperado que este item fosse tratado como uma mera verificação e, sim, como dimensionamento. Se, entretanto, a bitola das barras fosse adequadamente tratada como uma variável contínua, e não discreta, os resultados seriam válidos. Os resultados esperados seriam $A_s = 9,80 \text{ cm}^2$ para uma distribuição de deformações $(\varepsilon_o; k_x; k_y) = (-5,2070; -0,1264; 0,00982)$ – onde as curvaturas encontram-se em cm^{-1} .

b) A área total obtida no item anterior deve ser dividida por 6 (3 barras de mesma área e uma barra com a área de 3 barras), fornecendo um diâmetro teórico de 14,4 mm. O triplo desta área teórica indica um diâmetro de 24,9 mm. Conclui-se, assim, por uma armação com $3\phi 16$ e $1\phi 25$ (no canto inferior esquerdo da seção). A verificação desta seção leva à seguinte distribuição de deformações com o ELU ok de $(\varepsilon_o; k_x; k_y) = (-2,1447; -0,06168; 0,00727)$, que é equivalente, com a notação de FOC, a $\varepsilon_c = 1,6337$; $\theta = 6,8945$ (equivalente a $\beta_x = 0,2370$, embora não configure ELU) e $\varphi = 353,28^\circ$.

c) Utilizando a área total do item (b), equivalente a $\omega = 0,05441$, e uma linha neutra, supostamente no ELU, caracterizada por $\beta_x = 0,2370$ e $\varphi = 353,28^\circ$ e, ainda, o diagrama RS, não é difícil obter os esforços resistentes da armadura $(N_s; M_{sx}; M_{sy}) = (-0,1561; 0,05496; 0,17953)$ e do concreto $(N_c; M_{cx}; M_{cy}) = (1,9161; 0,1673; 0,9344)$ totalizando $(N_d; M_{dx}; M_{dy}) = (1,7600; 0,2223; 1,1139)$ – nas mesmas unidades dos esforços fornecidos no item (a). Notar que, neste item (c), a convenção de momentos fletores é diferente da do item (b). O momento resistente teria excentricidades equivalentes de $e_x = 12,6289 \text{ cm}$ e $e_y = 63,2943$, com uma inclinação de $78,7161^\circ$.

A título de conferência, a barra maior teria 44,87% da área total e as três menores 18,38% cada, totalizando 55,13%. As deformações nas barras seriam de -9,7934; -8,4701; 1,4381 e 2,7615 (em por mil).

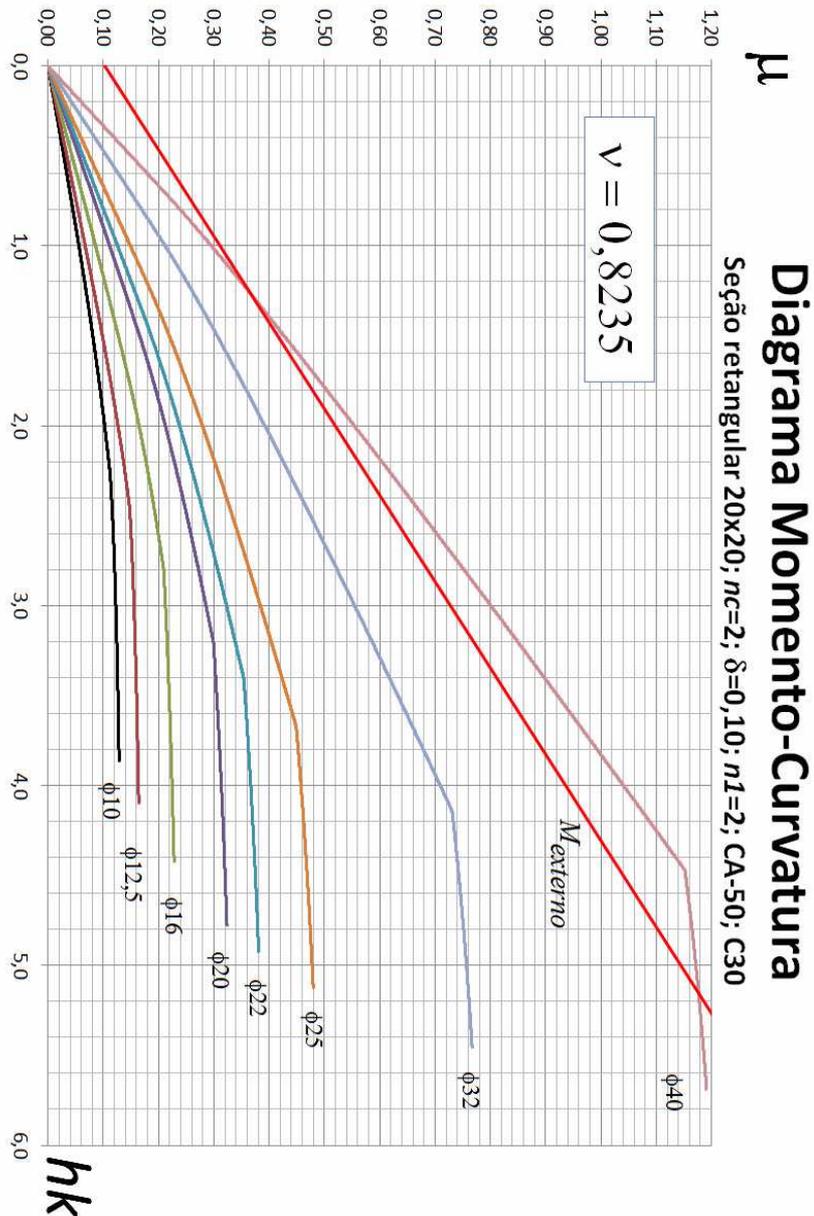


5ª Questão

a) A equação da reta dos momentos externos é facilmente obtida

$$\mu_e = 0,10294 + 0,208602 hk.$$

Há várias maneiras numéricas de tentar resolver o problema mas, por motivos didáticos, mostra-se a solução gráfica com a utilização de curvas momento-curvatura. Fica nítido, com a figura a seguir, que o problema não apresenta equilíbrio para a armadura sugerida ($4\phi 10$) e só apresenta equilíbrio com $4\phi 40$ (!), o que daria uma taxa geométrica $\rho = A_s/A_c$ de mais de 12% (desnecessário dizer que esta taxa é absurda). De qualquer forma, a título de informação sobre o suposto equilíbrio estável, seria obtido para $hk = 1,2788$ e um momento total $\mu = 0,3697$. Note como o processo da Coluna Modelo permite, com facilidade, a obtenção do ponto de equilíbrio instável ($hk = 5,1461$ e $\mu = 1,1764$, que não tem, naturalmente, qualquer utilidade prática).



b) A seguir apresenta-se a tabela que resume a primeira iteração pelo processo das Diferenças Finitas (DF) com uma flecha inicial de 6 mm. Imaginava-se que não haveria equilíbrio possível, nem partindo-se da flecha máxima nula, por conta do item anterior. Ao final da iteração comprova-se a ruptura da seção. Note, ainda, que como foi adotada uma abordagem numérica para a obtenção da curvatura, houve uma inversão de sinais a partir da seção 3, indicando uma mudança de curvatura inconsistente com as solititações e, portanto, falsa. O problema ocorre pois a flecha fica muito grande e, por DF, obtém-se uma flecha subsequente negativa. O momento fletor fica negativo e o processo de N-R tenta achar uma solução para o equilíbrio, mesmo que para isso tenha que mudar o sinal da curvatura (no caso a seção é duplamente simétrica, resistindo igualmente a momentos positivos e negativos).

Seção	μ_i	θ_i	$100 y_i/h$
0	0,1276	3,6845	0,0000
1	0,0897	1,6910	4,6057
2	0,0170	0,2967	13,4389
3	-0,0619	-1,1144	23,0139
4	-0,1178	-2,5799	29,8028
5	0,1029	-	30,1419

A figura a seguir ilustra a inversão de sinais.

