



3ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Novembro de 2013

Absolutamente sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

Se for impossível resolver a questão com os dados fornecidos, argumente e passe para a próxima.

Durações máximas: parte teórica - 40 min; parte numérica 2 h

PARTE TEÓRICA

1ª Questão Para uma seção conhecida, foram calculados os esforços resistentes para as seguintes distribuições de deformações:

- 1) $(\varepsilon_o; k) = (-10; 0)$
- 2) $(\varepsilon_o; k) = (2 \cdot \varepsilon_{yd}; 0)$

Pede-se:

- a) Quais foram os esforços resistentes (N_r, M_r) obtidos?
- b) Sem fazer qualquer cálculo ou iteração, quais seriam as distribuições de deformações obtidas pelo processo de verificação de Newton-Raphson para estes mesmíssimos esforços?

2ª Questão Considerando o processo da Coluna Modelo (“Pilar Padrão”), que supõe, entre outras coisas, que

$$f = \left(\frac{\ell_e}{\pi}\right)^2 \frac{1}{R},$$

descreva como podem ser obtidas as seguintes curvas:

- a) Trajetória de equilíbrio (ramos estável e instável): $N_d \times M_d$.
- b) Curva de sensibilidade a imperfeições: $e \times N_{cr}$.
- c) Curva de projeto do ELUi: $N_{cr} \times M_{cr}$.

Questão	1	2
Valor	2,0	1,5

A nota máxima da prova é 10,0.

Esforços resistentes da seção (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s \quad (1)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s \quad (2)$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k y \quad (3)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta \beta_i \quad (4)$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) [$\kappa \neq 0$]

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \quad (5)$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0) \quad (6)$$

$$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b) \quad (7)$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em o/oo , da fibra superior [$y = y_t$] e da fibra inferior [$y = y_b$] da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto ($\kappa \neq 0$)

$$\bar{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa} \Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) & \frac{b}{\kappa^3} [\Delta J_2 - 2 (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b) \quad (9)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (10)$$

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck} / \gamma_c$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - \varepsilon(n+2)}{4(n+2)(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3)\varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

Fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson

$$\varepsilon_o \leftarrow \varepsilon_o + \frac{1}{J} \left[\widehat{EI} (N_d - N_r) - \widehat{ES} (M_d - M_r) \right] \quad (13)$$

$$\kappa \leftarrow \kappa + \frac{1}{J} \left[-\widehat{ES} (N_d - N_r) + \widehat{EA} (M_d - M_r) \right] \quad (14)$$

$$J = \frac{\partial N_r}{\partial \varepsilon_o} \frac{\partial M_r}{\partial \kappa} - \left(\frac{\partial N_r}{\partial \kappa} \right)^2 = \widehat{EA} \widehat{EI} - (\widehat{ES})^2 \quad (15)$$

Alguns resultados e comentários

1ª Questão

a) Não foram feitas considerações sobre a seção transversal, de forma que uma solução genérica parece ser mais adequada do que uma particularizada. Notar ainda que a aplicação direta das expressões (5)-(7) fornecidas na folha de questão não é possível por conta de os exemplos solicitados serem, justamente, casos em que $k = 0$ (seção uniformemente alongada e comprimida, respectivamente).

a.1) Todos os aços nacionais têm $\varepsilon_{yd} \leq 10^\circ/oo$ de forma que, considerando os casos práticos, a tensão para todas as camadas é a de escoamento em tração e os esforços resistentes obtidos são

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s = 0 - A_s f_{yd} = -A_s f_{yd} \quad (16)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s = 0 - f_{yd} \sum_{i=1}^{nc} A_{si} y_{si} = -f_{yd} \sum_{i=1}^{nc} A_{si} y_{si}. \quad (17)$$

Se a seção tiver um arranjo duplamente simétrico, caracterizado por

$$\begin{aligned} A_{si} &= A_{s(nc-i+1)} \\ y_{si} &= -y_{s(nc-i+1)}, \end{aligned}$$

é fácil perceber que $M_s = 0$.

a.2) A tensão para todas as camadas é a de escoamento em compressão e, considerando que os aços nacionais têm $\varepsilon_{yd} \geq 1^\circ/oo$, a distribuição de deformações faz com que todos os pontos da seção trabalhem com a tensão σ_{cd} . Os esforços resistentes obtidos são

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s = A_c \sigma_{cd} + A_s f_{yd} \quad (18)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s = \sigma_{cd} \iint y dA_c + f_{yd} \sum_{i=1}^{nc} A_{si} y_{si}. \quad (19)$$

Como anteriormente, se a seção tiver um arranjo duplamente simétrico é fácil perceber que $M_s = 0$. Além disso, se a origem do sistema de coordenadas que define a seção transversal for, como de costume, o seu CG, é fácil perceber que $M_c = 0$. Se estas duas situações particulares ocorrerem simultaneamente tem-se $M_r = 0$.

b) As iterações de N-R ocorrem até a convergência ou a ruptura, ruptura esta caracterizada pelo determinante nulo da matriz das rigidezes. Considerando a estimativa inicial nula $(\varepsilon_o; k) = (0; 0)$ e que os esforços desejados são viáveis, por terem sido calculados no item anterior, é de se esperar que haja a convergência, a menos de questões de precisão numérica, mas não necessariamente para a mesma distribuição de deformações, já que as distribuições de deformações do item anterior tocam os patamares de “escoamento” dos diagramas tensão-deformação dos materiais componentes (região “inútil”).

b.1) Pode-se utilizar as equações dos esforços resistentes mas é possível racionalizar que a distribuição será dada por $(-\varepsilon_{yd}; 0)$ uma vez que só o aço resiste e que, a partir desta deformação, não há acréscimos de esforços resistentes.

b.2) Analogamente, sabe-se que os esforços resistentes do concreto, em compressão uniforme, sofrem alterações até o encurtamento de $2^\circ/oo$. Os esforços resistentes da armadura, em compressão, sofrem acréscimos até a deformação ε_{yd} . Há que se comparar, portanto, o escoamento do aço com a deformação de $2^\circ/oo$. A distribuição de deformações será, portanto, $(\max\{2; \varepsilon_{yd}\}; 0)$.

2ª Questão

A questão era sobre o processo da Coluna Modelo (“Pilar Padrão”) e não genérica ou sobre o processo das Diferenças Finitas. Todos os itens são viáveis e foram comentados em sala de aula. O fato de usar um processo simplificado traz uma aceleração do processo numérico dos itens (a) e (b).



3ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Novembro de 2013

Consulta livre (menos a seres humanos, próximos ou distantes), utilização de softwares gerais liberada. Utilização de programas e planilhas previamente confeccionados pelo próprio aluno liberada (entregar cópia eletrônica ao final da prova). A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos. Sempre explicita a distribuição de deformações (ε_o, k) na documentação da solução.

Parte numérica: duração máxima de 2 h

PARTE NUMÉRICA

Considere os seguintes dados:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_F = 1,40$.
- Aço CA-25 ($f_{yk} = 250$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C25, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 25$ MPa, $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e $\gamma_c = 1,40$).
- Seção retangular com base $b = 0,25$ m e altura total $h = 0,70$ m.
- Arranjo de armadura duplamente simétrico “usual” ($nc = 3$; $n_1 = 3$; $\delta = 0,05$).
- Peso específico do aço $\gamma_{aço} = 78,5$ kN/m³.
- Custo do concreto (por m³): R\$ 246,77. Custo da forma (por m²): R\$ 13,75. Custo da armadura (por kg): R\$ 3,47.
- Se precisar transformar unidades de força, utilize a equivalência $1 \text{ kgf} = 10 \text{ N}$.

3ª Questão Para uma seção armada com $8\phi 25$ (armadura total de 8 barras com diâmetro de 25 mm), obtenha as distribuições de deformações que equilibram os seguintes pares de esforços (N_k em MN e M_k em MN·m):

- $(N_k; M_k) = (-0,6098; 0)$
- $(N_k; M_k) = (1,2881; -0,2243)$
- $(N_k; M_k) = (-0,1200; 0,1200)$

4ª Questão Para a seção armada com área total de $25,13 \text{ cm}^2$, calcule a rigidez mínima à flexão que a seção apresenta para uma força normal, de cálculo, $N_d = 1,8 \text{ MN}$?

5ª Questão Para a seção submetida aos esforços de cálculo $(N_d; M_d) = (2,92 \text{ MN}; 0,19 \text{ MN} \cdot \text{m})$, dimensionar a área total de armadura A_s .

6ª Questão Considerando o processo da Coluna Modelo (“Pilar Padrão”) e o diagrama momento-normal-curvatura apresentado a seguir, para um pilar submetido somente a cargas concentradas em sua extremidade livre (normal e momento), pede-se:

- Qual o maior comprimento L que o pilar pode ter quando $M_d = 0,1301 \text{ MN} \cdot \text{m}$?
- Qual a flecha máxima do pilar para $L = 5 \text{ m}$ e $M_d = 0,09 \text{ MN} \cdot \text{m}$?

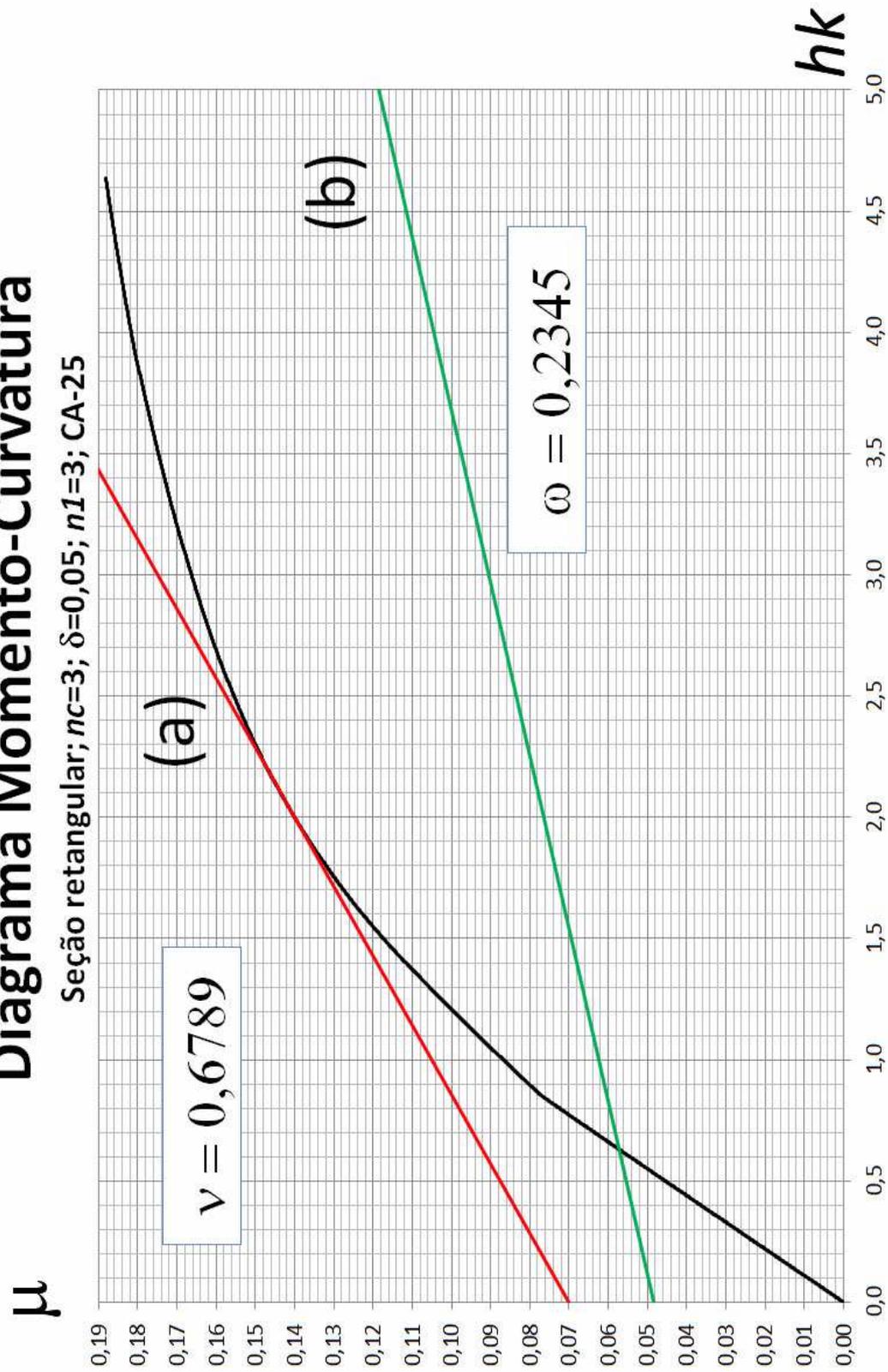
Questão	3	4	5	6
Valor	3,0	1,5	2,0	2,0

A nota máxima da prova é 10,0.

/F_MN/SWP3.5

Diagrama Momento-Curvatura

Seção retangular; $nc=3$; $\delta=0,05$; $n1=3$; CA-25



Alguns resultados e comentários

3ª Questão Obtendo-se numericamente o zero (da ordem de 10^{-10}) da soma dos quadrados das diferenças entre esforços resistentes e aplicados

$$(N_d - N_r)^2 + (M_d - M_r)^2$$

com a variação dos parâmetros ε_o e k (partindo do zero e lembrando que podem ser negativos ou positivos) obtém-se as seguintes distribuições de deformação:

Item	ε_o	k (m^{-1})
a)	-1,0352	0
b)	0,7336	-3,1281
c)	-0,3578	2,1413

4ª Questão A mínima rigidez à flexão \widehat{EI} pode ser obtida com a maximização (ou minimização) do momento fletor resistente, considerando que a equação de equilíbrio de forças deve ser satisfeita. Também pode-se minimizar, diretamente, a própria rigidez. Um terceiro encaminhamento é obter a referida rigidez no ELU, que seria o último ponto do diagrama momento-curvatura da seção para o esforço normal considerado.

Minimizando-se a rigidez com a variação dos parâmetros ε_o e k da distribuição de deformações (aqui poderiam ser sempre positivos, dado a força normal elevada) com a restrição da equação de momentos ser satisfeita e o ELU também, obteve-se

$$(\varepsilon_o; k) = (1, 1951; 6, 5855 \text{ m}^{-1})$$

resultando em uma rigidez $\widehat{EI} = 0,02630 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$. A título de curiosidade a rigidez na origem do diagrama momento-curvatura, para a mesma força normal, seria de $0,1122 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$.

5ª Questão Aqui pode-se minimizar a área total de armadura, mantendo-se as proporções e posições das camadas indicadas nos dados numéricos, com as restrições de que a área seja positiva, que as equações de força e de momento sejam satisfeitas e que o ELU não seja ultrapassado. As variáveis a serem alteradas, negativas ou positivas, são as que caracterizam a distribuição de deformações $(\varepsilon_o; k)$, além da área total de armadura A_s (esta, sim, maior ou igual a zero).

Note que, dependendo do programa de minimização utilizado, pode ser necessário um artifício de definir a função objetivo como a soma das áreas das camadas que são obtidas, por sua vez, por uma multiplicação da variável A_s pelas porcentagens p_i . Os valores assim obtidos foram

$$(\varepsilon_o; k) = (1, 7672; 4, 6566 \text{ m}^{-1})$$

resultando em uma área $A_s = 4404 \text{ mm}^2$ (que seria obtida com uma utilização de bitola de mais de 26 mm).

6ª Questão A equação da reta de momentos solicitantes pode ser dada por

$$M_T = M_d + 1,8033 \left(\frac{2L}{\pi} \right)^2 \frac{hk}{700}.$$

a) Pode-se maximizar, numericamente, o comprimento total L do pilar variando-se os parâmetros que definem a distribuição de deformações $(\varepsilon_o; k)$, que podem assumir valores positivos ou negativos. As equações de equilíbrio de forças e momentos são colocadas como restrições, assim como o ELU não ser ultrapassado. Procura-se um comprimento L naturalmente positivo. Os valores obtidos foram

$$(\varepsilon_o; k) = (0, 7884; 2, 9695 \text{ m}^{-1})$$

para um comprimento total de pilar $L \simeq 7,90$ m. Para estes valores obtem-se uma flecha total de 7,52 cm e um momento fletor total (primeira mais segunda ordens) de 0,2656 MN·m. Este equilíbrio pode ser visualizado com a tangência da reta de momentos externos à curva momento-curvatura da seção, como pode ser apreciado no gráfico anterior.

b) Pode-se buscar o zero numérico das equações de equilíbrio, como na 3ª questão, variando-se a distribuição de deformações e com as restrições de curvatura positiva e o ELU não ser ultrapassado. Os valores obtidos foram

$$(\varepsilon_o; k) = (0,6451; 0,9001 \text{ m}^{-1})$$

forneendo uma flecha de 9,1 mm e um momento total de 0,1064 MN·m. Este equilíbrio mostra a reta de momentos externos interceptando uma única vez a curva momento-curvatura, como também pode ser apreciado no gráfico anterior.