**1ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I**

Prof. Flávio Mendes Neto

Setembro de 2013

*Absolutamente sem consulta.*

*A interpretação das questões faz parte da prova.*

*Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.*

Parte teórica e numérica: duração máxima de 1 h 30 min cada

## PARTE TEÓRICA

1ª Questão Considere uma viga contínua com 4 apoios (uniformemente espaçados), sem balanços e submetida a um carregamento gravitacional uniformemente distribuído. Discuta como deveria ser a disposição "ótima", sob o ponto de vista teórico, da armadura longitudinal (não se esqueça de apreciar as variações de sinal e de módulo do momento fletor).

2ª Questão Sabe-se que a área de armadura simples, para uma seção retangular com diagrama RS, pode ser calculada com

$$\overline{\omega}_t = 1 - \sqrt{1 - 2\,\overline{\mu}}.$$

Deseja-se saber:

a) Quais são as restrições para a aplicação dessa expressão?

b) Antigamente (mas muito mesmo) havia a consideração de um "coeficiente de segurança global" ($\gamma_G \geq 1$) onde todos os cálculos eram feitos sem a inclusão explícita de segurança (eram utilizadas, por exemplo, as grandezas $f_{ck}$, $f_{yk}$ e $M_k$ e não $\sigma_{cd}$, $f_{yd}$ e $M_d$) e majorava-se o resultado final da área de armadura. À luz da expressão anterior e dos procedimentos modernos, seria possível continuar a fazer o dimensionamento desta forma arcaica? Em caso afirmativo, com qual $\gamma_G$?

3ª Questão Considere o problema de dimensionamento de armadura dupla de seções sob FNS.

Pede-se:

a) Há espaço para o dimensionamento ser mais ou menos econômico? Como otimizar o custo? A economia ainda pode existir mesmo em casos em que a solução com armadura simples seria possível?

b) Admitindo a "solução padrão" de adotar a linha neutra fronteira entre os Domínios 3 e 4 ($\kappa_{x,\lim}$), o que pode ser dito sobre a segurança na utilização do diagrama RS comparado ao PR?

| Questão | 1 | 2a | 2b | 3a | 3b |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 1,0 | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 1,0 |

*A nota máxima da parte teórica é cinco (5,0).*

## Algumas definições

$$\overline{\mu} = \frac{M_d}{\sigma_{cd}\, b\, d^2} \qquad \overline{\omega}_i = \frac{A_{si}\ f_{yd}}{b\, d\, \sigma_{cd}} \qquad i = c, t \qquad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}} \qquad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$\overline{\eta} = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd}\, b\, d} \qquad \overline{\eta}_a = \frac{R_{cc}\, a}{\sigma_{cd}\, b\, d^2} \qquad \kappa_x = \frac{x}{d} \qquad \delta_c = \frac{d_c}{d}$$

*Observação*: $d = h - d_t$

## Equações de equilíbrio
(FNS, Armadura dupla)

$$\overline{\eta} + \overline{\omega}_c\, \alpha_c = \overline{\omega}_t\, \alpha_t$$

$$\overline{\mu} = \overline{\eta} - \overline{\eta}_a + \overline{\omega}_c\, \alpha_c\, (1 - \delta_c)$$

Funções $\overline{\eta}$ e $\overline{\eta}_a$ para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular [PR])
Base de referência $\equiv b$

$$\overline{\eta} = \begin{cases} \dfrac{5\kappa_x^2(3 - 8\kappa_x)}{3(1 - \kappa_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{16\kappa_x - 1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{17\kappa_x}{21} & \text{Domínios 3 e 4} \end{cases}$$

$$\overline{\eta}_a = \begin{cases} \dfrac{5\kappa_x^3(4 - 9\kappa_x)}{12\,(1 - \kappa_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{171\kappa_x^2 - 22\kappa_x + 1}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{33\kappa_x^2}{98} & \text{Domínios 3 e 4} \end{cases}$$

Funções $\overline{\eta}$ e $\overline{\eta}_a$ para seção retangular (Diagrama retangular simplificado [RS])
Base de referência $\equiv b$

$$\overline{\eta} = 0,8\, \kappa_x$$

$$\overline{\eta}_a = 0,32\, \kappa_x^2$$

$/F_M N/$SWP3.5

**1ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I**

Prof. Flávio Mendes Neto

Setembro de 2013

*Consulta livre (menos a seres humanos, próximos ou distantes), utilização de softwares gerais liberada. Utilização de programas e planilhas previamente confeccionados pelo próprio aluno liberada (entregar cópia eletrônica junto com a resolução).*

*A interpretação das questões faz parte da prova.*

*Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos. Faça sempre um esboço da armadura em toda a viga (planos $b \times h$, $L \times h$ e $L \times b$) e calcule o custo total (concreto, aço e formas)*

Parte teórica e numérica: duração máxima de 1 h 30 min cada

PARTE NUMÉRICA

Considere os seguintes dados:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_F = 1,40$.
- Aço fictício CA-47 ($f_{yk} = 470$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Utilize barras da armadura $\phi 12,5$ (12,5 mm de diâmetro)
- Concreto C25, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 25$ MPa, $\sigma_{cd} = 0,85\, f_{ck}/\gamma_c$ e $\gamma_c = 1,40$).
- Considere $d_c = d_t = d' = 0,05$ m.
- Seção retangular com base $b = 0,20$ m e altura total $h = 0,60$ m.
- Peso específico do concreto simples $\gamma_{\text{con}} = 24,0$ kN/m$^3$.
- Peso específico do aço $\gamma_{\text{aço}} = 78,5$ kN/m$^3$.
- Custo do concreto (por m$^3$): R$ 245,32.
- Custo da forma (por m$^2$): R$ 13,35.
- Custo da armadura (por kg): R$ 3,46.
- Viga simplesmente apoiada, constante, sem balanços, com carregamento uniformemente distribuído ($L = 10$ m).
- Carregamento (característico) devido ao peso próprio $p = \gamma_{\text{con}}\, A_c$ onde $A_c = b\, h$.
- Se precisar transformar unidades de força, utilize a equivalência 1 kgf = 10 N.

4ª Questão Admita, por simplicidade, que a armadura seja constante em toda a viga e considere, além do peso próprio, um carregamento uniformemente distribuído de 1,6 kN/m:

a) Havia uma "sobra" de barras de 10 mm de diâmetro ($\phi 10$) que foram utilizadas como "porta-estribo" (duas barras posicionadas nos cantos superiores da seção). Dimensione a área de armadura de tração.

b) Se a base $b$ da seção puder variar entre 20 e 40 cm e a altura $h$ entre $2b$ e 90 cm (ambas as variações com incrementos de 5 cm), projete uma viga de custo mínimo para o carregamento dado.

5ª Questão Considere a seção com armadura inferior de $5\phi 25$ e superior de $2\phi 10$:

a) Qual o máximo carregamento $q$ uniformemente distribuído que pode ser aplicado à viga (em kN/m)?

b) Considerando um carregamento de 17 kN/m e a possibilidade de a armadura inferior variar discretamente ao longo do perfil longitudinal (considere seções com 2, 3, 4 ou 5 barras), qual seria um arranjo possível para a armadura? Qual seria a economia obtida comparando com a opção de armadura constante em toda a viga?

| Questão | 4a | 4b | 5a | 5b |
|---|---|---|---|---|
| Valor | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 2,0 |

*A nota máxima da parte numérica é cinco (5,0).*

$/F_M N/$SWP3.5

Alguns resultados e comentários

1ª Questão Não era esperado que o diagrama de momentos fletores, ou as reações de apoio, fossem calculados. Qualitativamente, entretanto, e uma vez que as disciplinas de análise estrutural são pré-requisitos desta, o aluno deveria perceber que a viga em questão está submetida a momentos fletores positivos e negativos, com módulos variados. Um esboço do diagrama de momentos fletores ajudaria a ilustrar a questão sobremaneira. A questão de eventual necessidade de armadura dupla, para módulos de momentos elevados, deveria ser atacada. O posicionamento das armaduras na seção transversal (inferior ou superior) e ao longo do eixo longitudinal deveria ser esboçado corretamente.

*Observação*: claro que é impensável alguém achar que todas as quatro reações de apoio seriam iguais. Além disso, por si só, ser absurdo, ainda resultaria em um diagrama de momentos fletores, errado, só com valores positivos. A armadura assim seria só inferior e, certamente, causaria a ruína da estrutura real, caso fosse executada.

2ª Questão

a) É fácil mostrar que a expressão fornecida vale desde que o dimensionamento com armadura simples seja possível e resulte em escoamento da armadura tracionada. Isso requer que a linha neutra esteja nos Domínios 2 ou 3:

$$0 < k_x \leq k_{x,\lim 3-4} = k_{x,\lim} = \frac{3,5}{3,5 + \varepsilon_{yd}}.$$

Em termos de uso da expressão mostrada, que só tem momento fletor adimensional no lado direito, isso requer que

$$0 \leq \overline{\mu} \leq \overline{\mu}_{\lim} = \overline{\eta}_{\lim} - \overline{\eta}_{a,\lim},$$

onde $\overline{\eta}_{\lim} = \overline{\eta}\left(k_{x,\lim}\right)$ e $\overline{\eta}_{a,\lim} = \overline{\eta}_a\left(k_{x,\lim}\right)$. Notar que para os aços comuns esta imposição é mais restritiva do que a linha neutra ser real ($\overline{\mu} \leq 0,5$) ou fisicamente possível ($k_x \leq 1$ ou $\overline{\mu} \leq 0,48$).

b) Explicitando a área de armadura, a expressão fornecida é equivalente a

$$A_{st} = 0,85\frac{f_{ck}}{\gamma_c}\frac{\gamma_s}{f_{yk}}bd\left(1 - \sqrt{1 - 2\overline{\mu}}\right).$$

**Supondo** que ainda seja válida retirando os fatores de segurança 0,85; $\gamma_c$; $\gamma_F$ e $\gamma_s$ pode-se calcular a área $A^*_{st}$ com

$$A^*_{st} = \frac{f_{ck}}{f_{yk}}bd\left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{0,85}{\gamma_c\gamma_F}\overline{\mu}}\right)$$

(notar que os fatores surgem na expressão anterior para manter o uso do momento adimensional $\overline{\mu}$, e que não afetarão $M_k$). O coeficiente global proposto poderia ser dado, assim, por

$$\gamma_G = \frac{A_{st}}{A^*_{st}} = \frac{0,85\frac{\gamma_s}{\gamma_c}\left(1 - \sqrt{1 - 2\overline{\mu}}\right)}{1 - \sqrt{1 - 2\frac{0,85}{\gamma_c\gamma_F}\overline{\mu}}}.$$

Pode-se perceber que não é linear, é monotonicamente crescente e que depende da solicitação, dificultando a adoção de um valor único. Para momentos fletores adimensionais entre zero e 0,48 pode-se calcular a variação deste coeficiente $\gamma_G$ como

$$1,61 \leq \gamma_G \leq 2,37$$

para os valores usuais de coeficientes de ponderação ($\gamma_c = 1,4$; $\gamma_F = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$). Utilizar este procedimento, entretanto, não parece ser interessante atualmente.

3ª Questão

a) Assunto amplamente discutido em sala. Esperava-se argumentação científica e objetiva incluindo a questão de como fazer a otimização da armadura.

Quando o dimensionamento é possível com armadura simples deve-se ter um cuidado extra com a otimização uma vez que linhas neutras menores do que a obtida com a armadura simples não são candidatos viáveis.

b) O cálculo da armadura dupla pode ser colocado sob a forma

$$\overline{\omega}_c = \frac{\overline{\mu} - \overline{\mu}_{\lim}}{\alpha_c\ (1 - \delta_c)},$$
$$\overline{\omega}_t = \overline{\eta}_{\lim} + \frac{\overline{\mu} - \overline{\mu}_{\lim}}{1 - \delta_c},$$

onde o índice lim refere-se à aplicação das expressões na fronteira entre os Domínios 3 e 4, como na Questão 2. Considerando a aplicação dos diagramas tensão-deformação PR e RS, o que se procura, de fato, é a diferença nos resutlados das taxas de armadura. Pode-se mostrar que

$$\overline{\omega}_{c,PR} - \overline{\omega}_{c,RS} = -\frac{\overline{\mu}_{\lim,PR} - \overline{\mu}_{\lim,RS}}{\alpha_c\ (1 - \delta_c)}$$
$$\overline{\omega}_{t,PR} - \overline{\omega}_{t,RS} = \overline{\eta}_{\lim,PR} - \overline{\eta}_{\lim,RS} - \frac{\overline{\mu}_{\lim,PR} - \overline{\mu}_{\lim,RS}}{1 - \delta_c}$$

e que

$$\overline{\mu}_{\lim,PR} - \overline{\mu}_{\lim,RS} = \frac{1}{105} k_{x,\lim} - \frac{41}{2450} k_{x,\lim}^2$$
$$\overline{\eta}_{\lim,PR} - \overline{\eta}_{\lim,RS} = \frac{1}{105} k_{x,\lim}.$$

Observa-se, assim, que tanto a armadura de compressão quanto a de tração são menores, para os aços usuais e com valores de $\delta_c$ comuns ($0 \leq \delta_c < 0,5$)[1], quando se utiliza o diagrama RS. Conclui-se, portanto, que a utilização do diagrama RS é, como no caso da armadura simples, contra a segurança.

4ª Questão

a) Trata-se de um problema de dimensionamento determinado, com duas equações e duas incógnitas. Pode-se utilizar o *Solver* do Excel (Método GRG não linear) com a função objetivo sendo a equação de forças (tentando obter o seu zero) e colocando como restrição o zero da equação de momentos. As variáveis a serem alteradas seriam a profundidade da linha neutra ($\kappa_x$) e a área de armadura de tração ($A_{st}$), ambas não negativas. É conveniente aumentar a precisão, nas opções, das restrições ($1 \times 10^{-15}$).

*Resultados*: $\kappa_x = 0,1368$; $A_{st} = 3,6888$ cm$^2$. O custo de uma viga constante seria de R$ 626,05 (mas são necessárias, de fato, $3,0059 \sim 4\phi 12,5$).

b) O enunciado não exige armadura dupla, variável ou fixa, para este item, de forma que será tentada a otimização com armadura simples. Tenta-se minimizar o custo total da peça (concreto, aço e formas) alterando as variáveis **inteiras e múltiplas de 5** (em cm) da base $b$ e altura $h$, dentro dos limites estabelecidos, e, ainda, a profundidade da linha neutra ($\kappa_x$) e a área de armadura tracionada ($A_{st}$). As restrições são as equações de equilíbrio (forças e momentos), que devem ser zeradas, e a profundidade da linha neutra $\delta_c \leq \kappa_x \leq k_{x,\lim}$.

*Resultados*: base $b = 20$ cm; altura $h = 40$ cm; $\kappa_x = 0,2341$; $A_{st} = 4,7589$ cm$^2$. O custo teórico de uma viga constante seria de R$ 459,98 (Concreto R$ 195,09; Aço R$ 129,26 e Formas R$ 135,63). Considerando um número inteiro de barras a armadura seria de $4\phi 12,5$ e o custo total passaria a R$ 464,01).

*Observação*: se, erroneamente, fosse considerada a armadura superior fixa com $2\phi 10$, a mesma seção seria encontrada e a linha neutra obtida seria de $\kappa_x = 0,2090$ e a área de armadura tracionada seria de $A_{st} = 4,7384$ cm$^2$, aumentando o custo teórico para R$ 501,71 (ou R$ 506,29, com $4\phi 12,5$).

5ª Questão

a) Questão de verificação clássica, com armadura dupla. O sistema 2×2 determinado pode ser resolvido como no primeiro item da Questão 4. A linha neutra é $\kappa_x = 0,6551$ (maior que $k_{x,\lim} = 0,6427$) e o momento resistente

[1] Exceção feita ao aço CA-25 com valores de $\delta_c$ excepcionalmente grandes (0,3 ou maiores).

$M_k = 0,2760$ MN·m. Levando em consideração o peso próprio (0,00288 MN/m), o máximo carregamento a ser aplicado seria de 19,20 kN/m (nas unidades solicitadas). Como esse equilíbrio está no Domínio 4 deve-se aplicar menos do que isso, $q < 19,20$ kN/m.O custo total de uma peça constante seria de R$ 1.187,38.

b) O dimensionamento para a seção crítica ($L/2$) da viga leva a uma armadura de tração de $5\phi25$ (a de compressão é considerada fixa com $2\phi10$, como está no enunciado). Deve-se, agora, fazer verificações com $n = 2$, 3 e 4 barras na armadura tracionada, igualar ao diagrama de momento fletor e verificar onde são necessárias. A tabela seguinte mostra os resultados principais:

| $n$ | $M_k$ (MN·m) | $x_{\text{ini}}$ (m) | $x_{\text{fim}}$ (m) |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,1416 | 1,7 | 8,3 |
| 3 | 0,1992 | 2,8 | 7,2 |
| 4 | 0,2471 | 4,6 | 5,4 |

Esperava-se uma configuração prática e viável de barras que atendesse à necessidade observada (2 barras em $0 \leq x \leq 1,7$ e $8,3 \leq x \leq 10,0$; 3 barras em $1,7 \leq x \leq 2,8$ e $7,2 \leq x \leq 8,3$; 4 barras em $2,8 \leq x \leq 4,6$ e $5,4 \leq x \leq 7,2$ e, por fim, 5 barras em $4,6 \leq x \leq 5,4$). O custo e a economia (em R$ e %) também eram esperados, além dos esboços.