



## Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Dezembro de 2012

*Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.*

*Justifique cientificamente suas afirmações e deixe cristalina a sua argumentação.*

*Seja SEMPRE o mais técnico possível.*

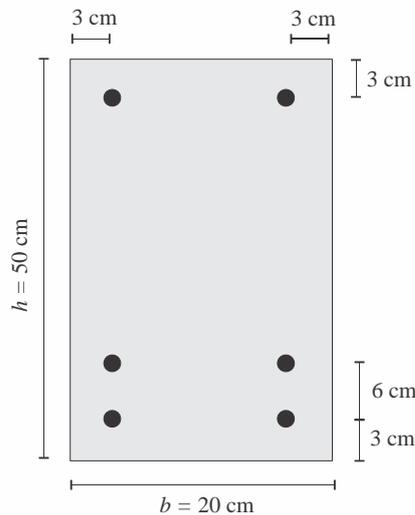
*Esta prova tem 6 laudas e 3 questões e o enunciado DEVE ser devolvido caso faça parte de sua resposta.*

**(duração máxima: 4 h)**

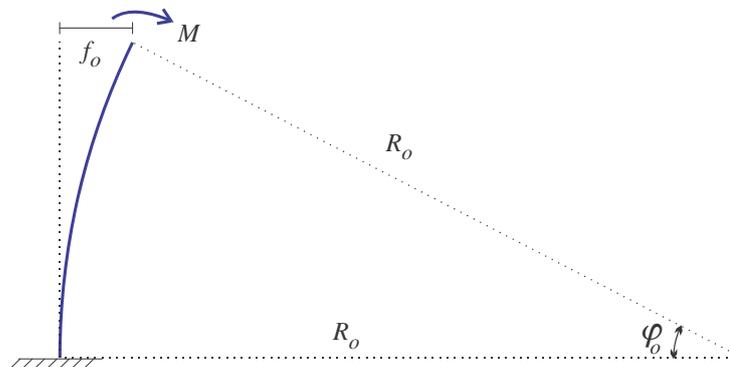
Considere os seguintes dados somente para as questões numéricas:

- Coeficiente de ponderação das ações:  $\gamma_F = 1,40$ .
- Aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $E_s = 210$  GPa).
- Concreto C25, diagrama parabólico-retangular ( $f_{ck} = 25$  MPa e lembrar que  $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$  e que  $\gamma_c = 1,40$ ).

Seção retangular com base  $b = 20$  cm e altura total  $h = 50$  cm, com armadura conforme figura seguinte ( $n_c = 3$  e  $p_i = 1/3$  para  $i = 1 \dots 3$ ).



**1ª Questão** Considere a aplicação do processo das Diferenças Finitas para a verificação da estabilidade de um pilar constante, engastado-livre, submetido somente à atuação de uma carga momento em sua extremidade livre (desconsidere o peso próprio) e com uma deformada inicial dada por um arco de circunferência, conforme figura seguinte (onde  $L = R_o \varphi_o$ ). Discuta a estabilidade deste pilar para momentos  $M$  positivos e negativos.



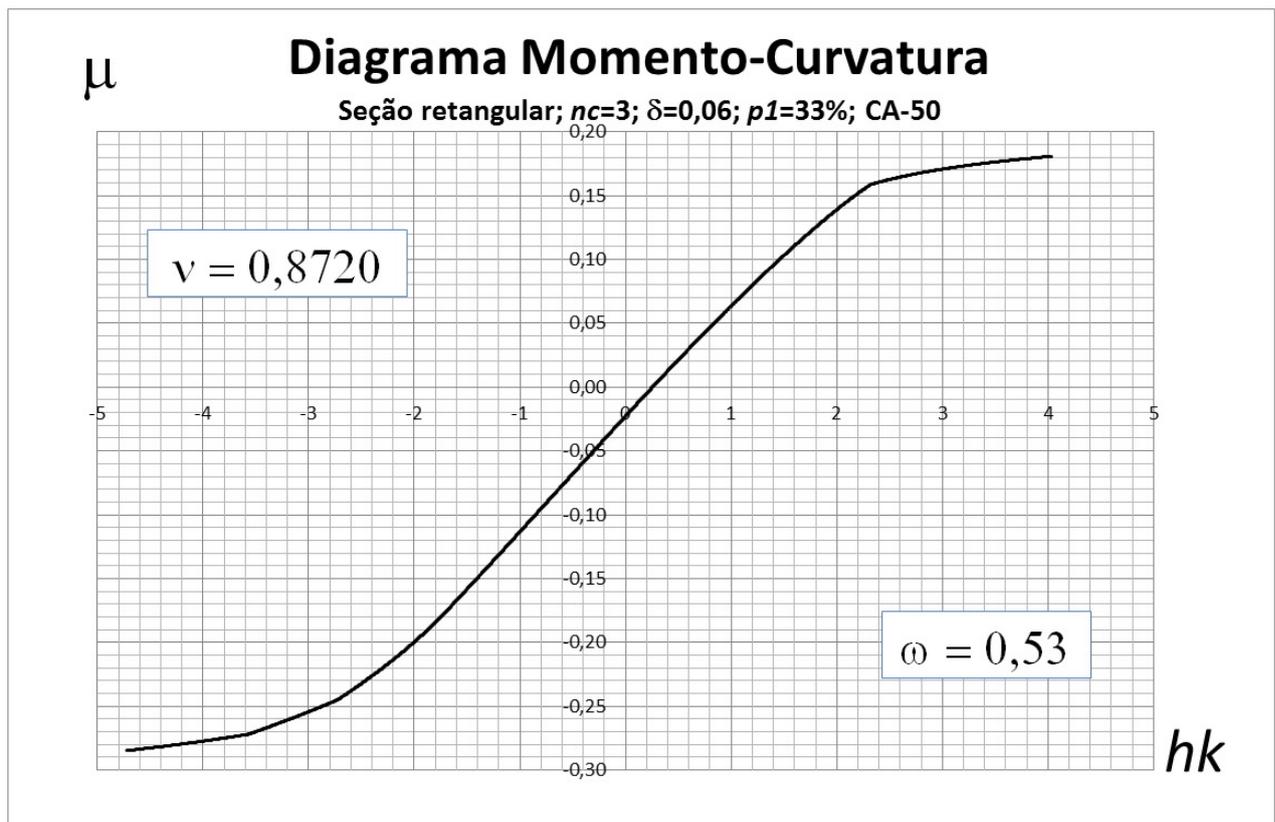
**2ª Questão** A figura apresenta um diagrama momento-curvatura para a seção dada com uma taxa mecânica de armadura  $\omega = 0,53$  e submetida a uma força normal adimensional  $\nu = 0,8720$ .

Supondo que um pilar (constante e com comprimento equivalente  $\ell_e$ ) engastado-livre esteja submetido, na extremidade livre, a uma força normal  $\nu = 0,8720$  e a um momento fletor  $\mu$  de primeira ordem, e considerando a hipótese do “Pilar Padrão”, ou seja, que a flecha máxima do pilar seja proporcional à curvatura na base

$$f = \frac{\ell_e^2}{\pi^2} \frac{1}{R},$$

pede-se:

- Supondo  $\ell_e/h = 11,35$  e  $\mu = 0,045$  pode-se construir o pilar? Em caso positivo, qual a flecha máxima?
- Supondo  $\ell_e/h = 13,27$  e  $\mu = -0,055$  pode-se construir o pilar? Em caso positivo, qual a flecha máxima?
- Calcule, com a maior precisão possível, o momento fletor resistente  $\mu$  da seção para  $\nu = 0,8720$  e  $hk = -1$ . Faça um esboço da distribuição de deformações da seção.
- Por que as curvaturas de início e fim da curva apresentada são diferentes?



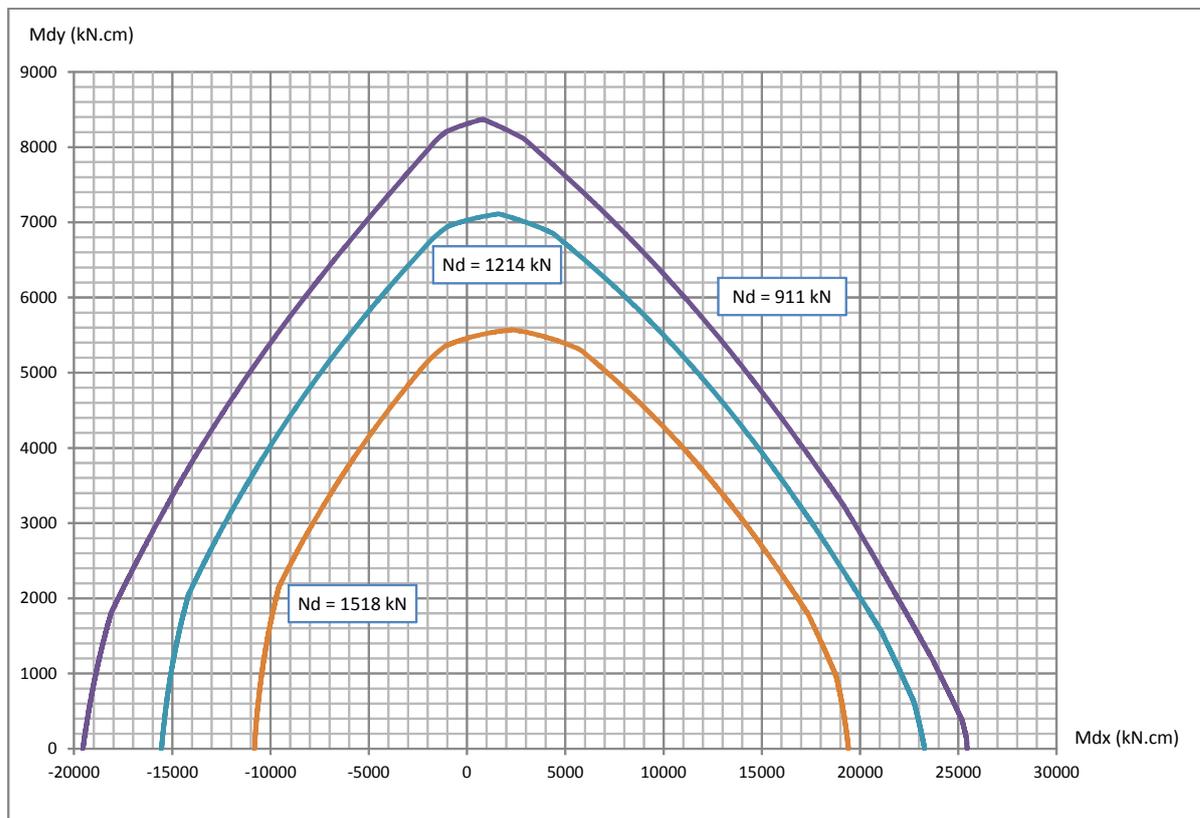
**3ª Questão** A figura mostra três curvas de interação para a FOC para a seção dada (armada com  $6\phi 20$ ), com a convenção dos momentos fletores  $M_{dx}$  e  $M_{dy}$  seguindo a “regra da mão direita” (i.e. o vetor momento fletor  $M_{dx}$  tem sentido e direção do eixo  $x$  horizontal) e, ainda, aproveitando a simetria da seção. Pede-se:

a) Há alguma consistência entre estas curvas e o diagrama momento-curvatura apresentado na questão anterior? Justifique.

b) Qual o intervalo de variação do ângulo  $\varphi$  da linha neutra utilizado para a construção destas curvas? Justifique.

c) Utilizando o diagrama retangular simplificado do concreto, calcule os esforços resistentes da seção dada para uma linha neutra caracterizada por  $\beta_x = 0,65$  e  $\varphi = 247^\circ$ . Plote estes esforços no diagrama de interação abaixo e comente.

d) Analisando somente o diagrama seguinte, você recomendaria algum método simplificado de dimensionamento? Qual?



Questão	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d
Valor	2,0	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0	1,0	2,0	1,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (0.1)$$

### Alguns adimensionais

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \quad \theta = hk = 1000 \frac{h}{R}$$

### Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i \quad (0.2)$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i \quad (0.3)$$

Funções  $\eta$  e  $\eta_a$  para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR - ELU)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5\beta_x^2 (3\beta_1 - 8\beta_x)}{3(\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16\beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17\beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882\beta_x + 1029\beta_x^2}{21(7\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (0.4)$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5\beta_x^3 (4\beta_1 - 9\beta_x)}{12(\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171\beta_x^2 - 22\beta_x\beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33\beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49\beta_x)(37 - 49\beta_x)}{98(7\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (0.5)$$

**Equações de equilíbrio (nFNC)**

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s \quad (0.6)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s \quad (0.7)$$

**Equação cinemática (seção transversal no plano  $x - y$ )**

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k y \quad (0.8)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta \beta_i \quad (0.9)$$

**Esforços resistentes do concreto (seção retangular  $b \times h$ ) [ $\kappa \neq 0$ ]**

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \quad (0.10)$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0) \quad (0.11)$$

onde

$$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b) \quad (0.12)$$

( $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_b$  são as deformações, em ‰, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

**Matriz de rigidezes do concreto**

$$\bar{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa} \Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) & \frac{b}{\kappa^3} [\Delta J_2 - 2 (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \quad (0.13)$$

onde

$$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b) \quad (0.14)$$

$$(0.15)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (0.16)$$

**Diagrama parabólico-retangular do concreto**

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (0.17)$$

**Integrais do diagrama parabólico-retangular**

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - \varepsilon(n+2)}{4(n+2)(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3) \varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (0.18)$$

Rotação de eixos

$$[ U \quad V ] = [ X \quad Y ] \times \mathbf{R}(\varphi) \quad \text{onde } \mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (0.19)$$

$$[ X \quad Y ] = [ U \quad V ] \times \mathbf{R}(-\varphi) \quad (0.20)$$

Cálculo de características de polígonos planos

(Valores com sinais corretos para circuição anti-horária.  $N$ : número de vértices.)

$$a_k = X_k Y_{k+1} - X_{k+1} Y_k \quad (0.21)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \quad (0.22)$$

$$\text{Área} \times X_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (X_k + X_{k+1}) \quad (0.23)$$

$$\text{Área} \times Y_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (Y_k + Y_{k+1}) \quad (0.24)$$

Equações de equilíbrio (FOC)

(onde  $n$  é o número de barras,  $A_{cc}$  é a área bruta de concreto comprimido e os momentos fletores têm a convenção da “consistência de índices”)

$$N_d = \iint_{A_{cc}} \sigma_c dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} \quad (0.25)$$

$$M_{dx} = \iint_{A_{cc}} \sigma_c X dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} X_{si} \quad (0.26)$$

$$M_{dy} = \iint_{A_{cc}} \sigma_c Y dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} Y_{si} \quad (0.27)$$

*Observação:* lembrar que quando for utilizado o diagrama retangular simplificado para o concreto comprimido a tensão máxima é dada por  $\sigma_{cd} = 0,80 f_{ck}/\gamma_c$  e a “área comprimida” é aquela delimitada por  $0,8x$ .

## Alguns resultados e comentários

**1ª Questão** É razoável admitir que o pilar na posição indeformada, dada pelo arco de circunferência da figura, não está submetido a quaisquer esforços. A aplicação da carga momento, portanto, implica em um simples problema de equilíbrio e não de estabilidade, já que não há interação entre os eventuais deslocamentos e os momentos fletores. Há que se verificar, desta maneira, se a carga momento  $M$  é, ou não, suportada pela seção transversal (isso é feito com o diagrama momento-curvatura, para  $N = 0$ ): se a carga não estiver além do ELU o pilar tem equilíbrio e a deformada gerada pelo carregamento será, também, um arco de circunferência já que o momento fletor é constante e, portanto, a curvatura  $1/R$  (que é provavelmente diferente de  $1/R_o$ ) também. A deformada final, no caso do pilar da figura e caso haja equilíbrio, será a soma dos dois arcos de circunferência.

Se o processo das Diferenças Finitas for considerado é fácil perceber que, para um pilar inicialmente na vertical e pelo fato de a curvatura  $1/R$  ser constante, as iterações para o cálculo das flechas sucessivas levaria

$$y_i = \frac{i^2}{2R} \Delta L^2$$

para  $i = 0 \dots m$ , onde  $\Delta L = L/m$  e  $m$  é o número de divisões do pilar. A flecha máxima, portanto, seria

$$y_m = \frac{L^2}{2R}$$

e o processo converge na primeira iteração (que, de fato, nem precisaria ser feita).

Não há necessidade de diferenciar casos para momentos  $M$  positivos ou negativos, todos os argumentos anteriores valem para os dois casos. Obviamente espera-se que as flechas aumentem para momentos positivos e diminuam para os negativos.

**2ª Questão** Por erro de digitação, os valores de  $\ell_e$  foram informados, nos itens (a) e (b), como se fossem  $\ell_e/h$  de forma que a intenção original não era o que acabou sendo pedido e aceito (a questão acabou ficando “sem graça”).

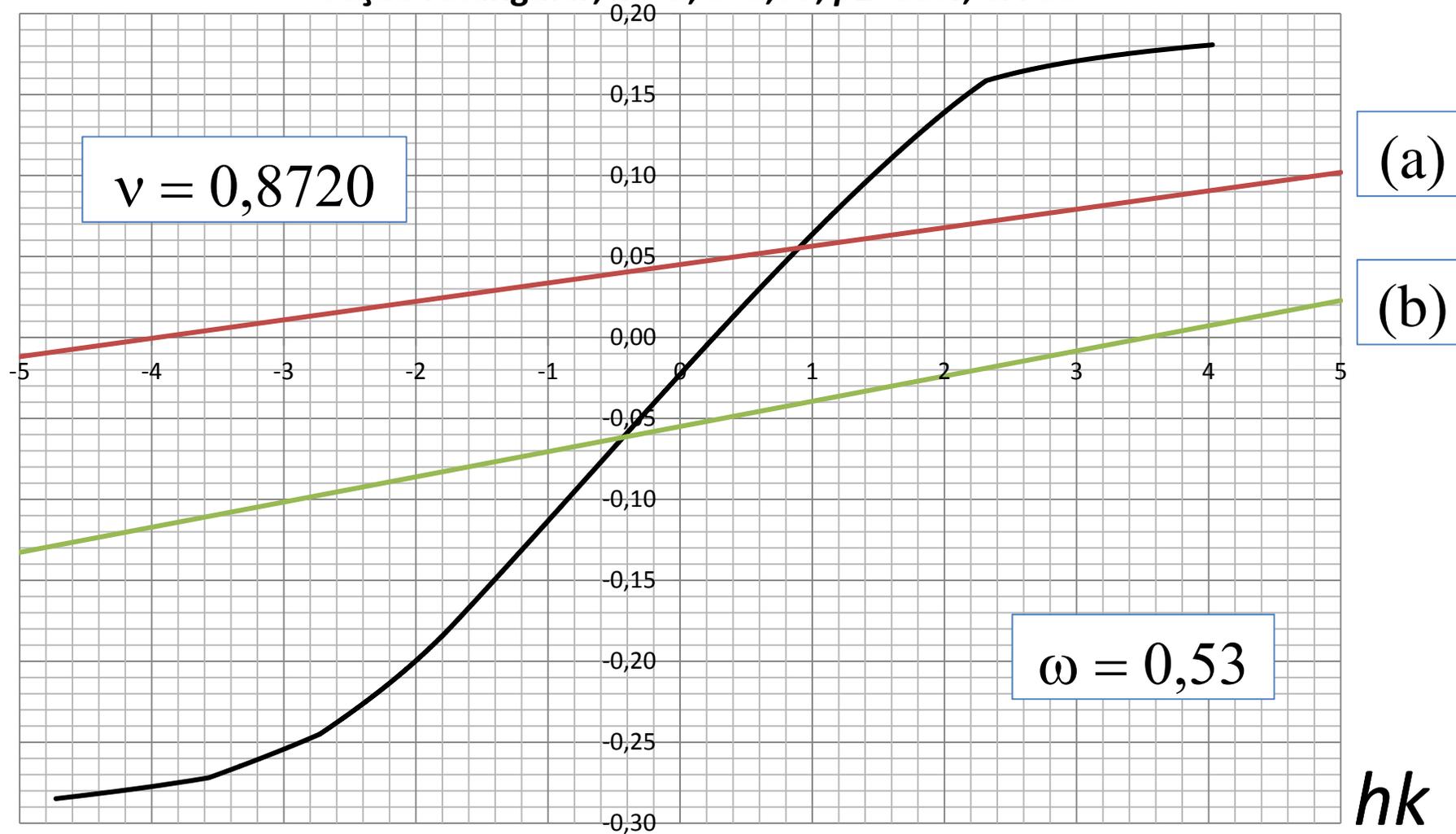
(a) Há equilíbrio estável, como pode ser verificado na figura seguinte. O coeficiente angular da reta de momentos externos é 0,011382 e a curvatura de equilíbrio  $hk_a = 0,8972$  fornecendo um momento total  $\mu_a = 0,055212$  e uma flecha máxima de  $f_a = 5,85$  mm.

(b) Há equilíbrio estável, como pode ser verificado na figura seguinte. O coeficiente angular da reta de momentos externos é 0,015558 e a curvatura de equilíbrio  $hk_a = -0,4320$  fornecendo um momento total  $\mu_a = -0,06172$  e uma flecha máxima de  $f_a = -3,85$  mm (para a “esquerda”).

$\mu$

# Diagrama Momento-Curvatura

Seção retangular;  $n_c=3$ ;  $\delta=0,06$ ;  $p1=33\%$ ; CA-50



**2ª Questão** (continuação)

c) Trata-se de um problema de nFNC já que a curvatura  $hk = -1$  nitidamente está antes do ELU. É um sistema de duas equações (normal e momento) com duas incógnitas ( $\varepsilon_o$  e  $\mu$ ) já que se conhece a curvatura e a normal. Pode-se resolver o sistema através de processo numérico como, por exemplo, o da secantes. A solução é  $\varepsilon_o = 0,8244$  (esperava-se um esboço com as deformações extremas  $\varepsilon_b = 1,3244$  e  $\varepsilon_t = 0,3244$ ) que fornece um momento  $\mu = -0,1133$  (correspondente a  $M_k = 0,06142$  MN·m).

d) O fato de a seção não ter o eixo de simetria horizontal (por conta da armadura) implica, a princípio, em comportamentos distintos quando submetida a momentos positivos ou negativos. Isso é evidenciado, por exemplo, pelo fato de a curva momento-curvatura não passar pela origem  $hk = \mu = 0$ . É de se esperar, portanto, que os pontos extremos da curva, que são, de fato, pontos do ELU, tivessem módulos diferentes.

A título de curiosidade os equilíbrios extremos são ( $\varepsilon_o = 1,1353$  e  $hk = -4,7249$ ) e ( $\varepsilon_o = 1,4852$  e  $hk = 4,029$ ) fornecendo, respectivamente, momentos adimensionais de  $-0,2848$  e  $0,1807$ . Curiosamente, provavelmente pelo fato da força normal ser elevada, observa-se um módulo de momento negativo maior do que o do positivo.

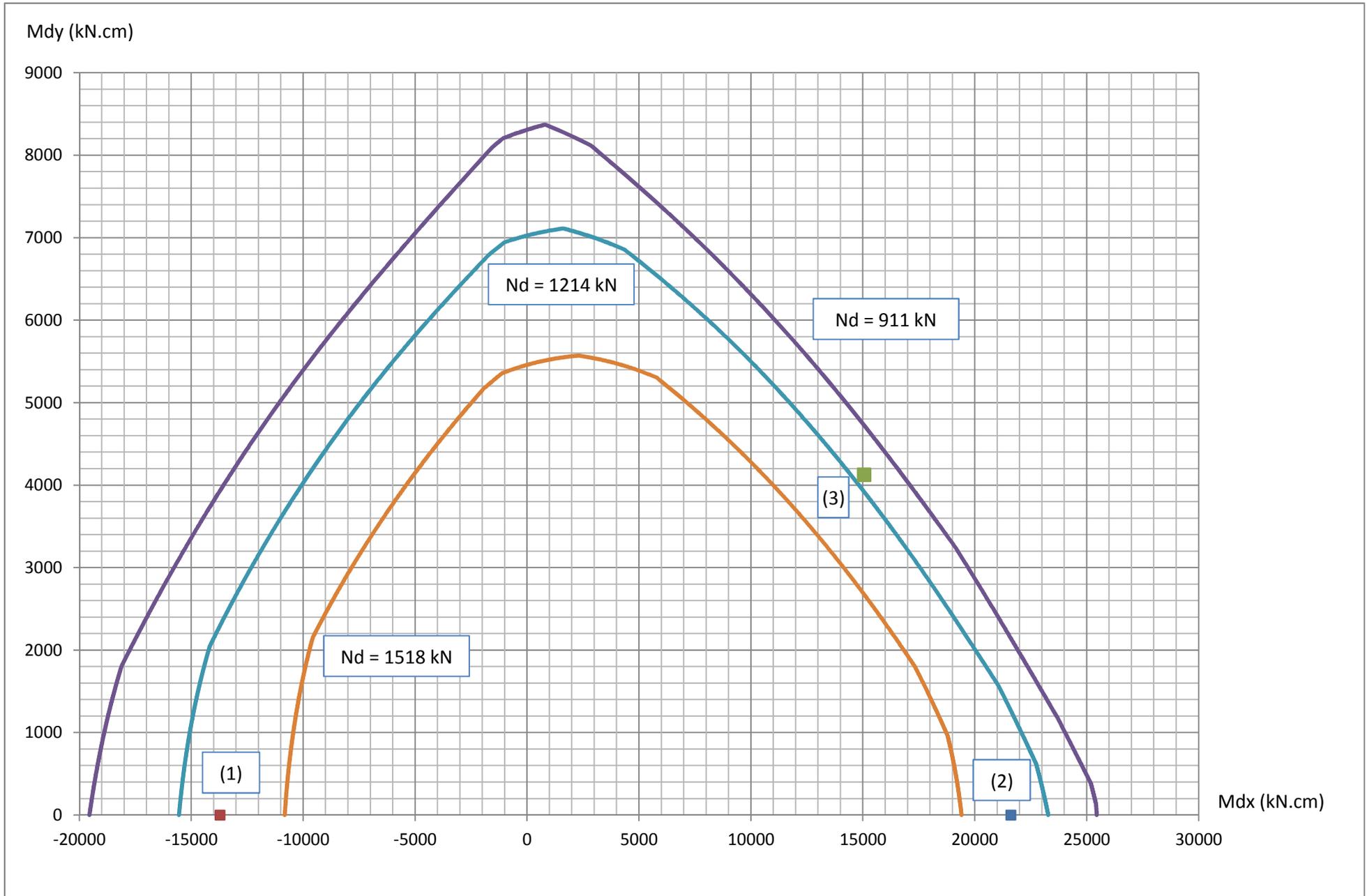
**3ª Questão**

a) Sim, há consistência entre as curvas, mas deve-se notar algumas diferenças que explicam o que poderia ser entendido, apressadamente, como discrepâncias.

A área total de armadura é (um pouco) diferente nos dois casos:  $\omega = 0,53$  para o diagrama momento-curvatura (DMC) e  $\omega = 0,5399$  para o diagrama de interação para a FOC (DFOC), por ter sido feito para armadura  $6\phi20$ .

A convenção de momentos fletores para o DMC é diferente do que a do DFOC. No DFOC um momento qualquer do DMC deveria ser encarado como  $-M_{dx}$  (com  $M_{dy} = 0$ ) trocando, portanto, de sinal.

A figura seguinte mostra os pontos extremos (1) e (2) do DMC no DFOC.



**3ª Questão** (continuação)

(b) Levando em conta a simetria da seção, a convenção de momentos e os seus sinais, pode-se afirmar que o ângulo  $\varphi$  da linha neutra (medido no sentido trigonométrico e com o lado comprimido conforme a “regra da mão esquerda”) variou entre  $180^\circ$  e  $360^\circ$ .

(c) Unidades básicas: kgf e cm

$f_{ck} = 250.0$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $f_{yk} = 5000$  Classe Aco = A,  $E_s = 2100000$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $w = 0.5737$

Rotacao= 247.0

Secao de concreto:

4 vertices

-10.000 -25.000 vertice 1

10.000 -25.000 vertice 2

10.000 25.000 vertice 3

-10.000 25.000 vertice 4

Area= 1000.0000 Sx= 0.0000 Sy= 0.0000

Base= 20.0000 Altura= 50.0000

Xcg= 0.0000 Ycg= 0.0000

Xmin= -10.0000 Ymin= -25.0000

Xmax= 10.0000 Ymax= 25.0000

Barras:

6 vertices

-7.000 -22.000 vertice 1

-7.000 -16.000 vertice 2

-7.000 22.000 vertice 3

7.000 -22.000 vertice 4

7.000 -16.000 vertice 5

7.000 22.000 vertice 6

Xmin= -7.0000 Ymin= -22.0000

Xmax= 7.0000 Ymax= 22.0000

Secao de concreto girada:

4 vertices

26.920 0.563 vertice 1

19.105 18.973 vertice 2

-26.920 -0.563 vertice 3

-19.105 -18.973 vertice 4

Area= 1000.0000 Sx= 0.0000 Sy= 0.0000

Base= 53.8399 Altura= 37.9467

Barras giradas:

6 vertices

22.986 2.153 vertice 1

17.463 -0.192 vertice 2

-17.516 -15.040 vertice 3

17.516 15.040 vertice 4

11.993 12.695 vertice 5

-22.986 -2.153 vertice 6

Area total de aco = 18.8501

beta(1) = 0.4433

beta(2) = 0.5051

beta(3) = 0.8963

beta(4) = 0.1037

beta(5) = 0.1654

beta(6) = 0.5567

\*\*\*\*\*

\*\*\* BetaX = 0.6500 \*\*\*

```

*****
Barra 1 esid = 1.1131 ssdi = 2337.5907
Barra 2 esid = 0.7805 ssdi = 1638.9888
Barra 3 esid = -1.3264 ssdi = -2785.4899
Barra 4 esid = 2.9418 ssdi = 4347.8261
Barra 5 esid = 2.6091 ssdi = 4347.8261
Barra 6 esid = 0.5022 ssdi = 1054.7170
Somatorios das tensoes:
Ssd= 10941.4588 Ssd*X(i) = 59914.9565 Ssd*Y(i) = -280945.2123
Esforços com Dimensoes fornecidas:
Ns = 34374.6769 Mxs = 188234.2482 Mys = -882642.8977
Esforços adimensionais:
Ns = 0.2406 Mxs = 0.0659 Mys = -0.1236
Y_corte = -0.7589
Poligono Comprimido (girado):
5 vertices
23.805 -0.759 vertice 1
26.920 0.563 vertice 2
19.105 18.973 vertice 3
-26.920 -0.563 vertice 4
-26.837 -0.759 vertice 5
Area= 538.7936 Sx= 3403.2513 Sy= 3150.2233
Base= 53.8399 Altura= 19.7323
Xcg= 6.3164 Ycg= 5.8468
Xmin= -26.9199 Ymin= -0.7589
Xmax= 26.9199 Ymax= 18.9733
Poligono Comprimido (desgirado):
5 vertices
-10.000 -21.616 vertice 1
-10.000 -25.000 vertice 2
10.000 -25.000 vertice 3
10.000 25.000 vertice 4
9.787 25.000 vertice 5
Area= 538.7936 Sx= 1570.0396 Sy= -4363.5996
Base= 20.0000 Altura= 50.0000
Xcg= 2.9140 Ycg= -8.0988
Xmin= -10.0000 Ymin= -25.0000
Xmax= 10.0000 Ymax= 25.0000
Esforços com Dimensoes fornecidas:
Nc = 76970.5108 Mxc = 224291.3696 Myc = -623371.3749
Esforços TOTAIS com dimensoes fornecidas:
Ni = 111345.1877 Mix = 412525.6178 Miy = -1506014.2726
Excentricidades:
ex = 3.7049 ey = -13.5256
angulo momento resistente = 285.3186 (graus)

```

Os esforços resistentes foram plotados no diagrama anterior (3) só que há duas diferenças consideráveis que explicam eventuais discrepâncias: (i) estes esforços foram calculados com o diagrama retangular simplificado e, assim, (ii)  $\sigma_{cd} = 0,8 f_{cd}$  (o que, por si só, já traria algumas diferenças).

(d) Esperavam-se considerações sobre a convexidade das curvas apresentadas e a classe de métodos simplificados que tentam substituir a curva de interação por curvas analíticas “internas”. Naturalmente estas simplificações têm impactos na economia do dimensionamento e isso também poderia ser comentado.