



2ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Outubro de 2012

Absolutamente sem consulta.

A interpretação das questões faz parte da prova.

Não é permitido o uso de programas previamente armazenados (calculadoras etc.), próprios ou alheios, que se refiram ao conteúdo da matéria.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

(duração máxima: 3 h)

Considere os seguintes dados:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_F = 1,40$.
- Aço CA-60 ($f_{yk} = 600$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Duas camadas de barras com distância até a borda mais próxima $d' = 0,06$ m.
- Concreto C30, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 30$ MPa, $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e $\gamma_c = 1,40$).
- Seção retangular com base $b = 0,20$ m e altura total $h = 0,60$ m.
- Diâmetro (em mm) das barras: $\phi 10$.

1ª Questão A seção transversal está submetida a uma força normal de 0,9969 MN e a um momento fletor de 0,1264 MN·m. Solicita-se o dimensionamento da área de armadura considerando:

- a) Arranjo pré-fixado duplamente simétrico ($A_{s1} = A_{s2}$).
- b) Arranjo não pré-fixado (sem pré-fixar qualquer relação entre A_{s1} e A_{s2}).
- c) Admita a armadura superior A_{s2} fixa com $2\phi 10$. Dimensione a área de armadura inferior A_{s1} .

Observação: para todos os itens espera-se que a área de armadura seja transformada em barras e seja feito um esboço da seção transversal. Comparações entre os itens são muito bem-vindas.

2ª Questão As curvas típicas de interação força normal-momento fletor, para uma seção completamente conhecida, mostram um valor máximo para o momento fletor. Discuta como obter, numericamente, este máximo diretamente (**não** considere, em sua resposta, a construção numérica de toda a curva e posterior busca pela ordenada máxima).

Questão	1a	1b	1c	2
Valor	4,0	3,0	3,0	1,0

A nota máxima da prova é dez (10,0).

Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama PR: parabólico-retangular)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

Alguns resultados numéricos e comentários sucintos:

1ª Questão

$$\sigma_{cd} = +18,214286 \text{ MPa}$$

Aço: $f_{yk} = +600 \text{ MPa}$, Classe='A' $\varepsilon_{yd} = +2,484472$ (por mil) $f_{yd} = +521,739130 \text{ MPa}$, $E_s = +210,000000 \text{ GPa}$

Por segurança os esforços fornecidos serão majorados $N_d = 1,3957 \text{ MN}$ e $M_d = 0,1770 \text{ MN}\cdot\text{m}$ fornecendo adimensionais: $\nu = +0,638540$ e $\mu = +0,134940$.

Camada i	p_i	β_i
2	+0,500000	+0,100000
1	+0,500000	+0,900000

a) Arranjo pré-arbitrado duplamente simétrico

A análise de $\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = 0$ leva aos intervalos
 $+0,344648 \leq \beta_x \leq +0,526362$
 $+0,279001 \leq \nu \leq +0,426103$

Há necessidade teórica de armadura, como pode ser verificado resolvendo $\nu = \eta$ e obtendo-se $\beta_x = +0,7888$ ($\mu_o = 0,1098 < \mu$). Será utilizada esta linha neutra para o início das iterações.

Iteração 1: $\beta_x = +0,788800$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,638552 \quad (1)$$

$$\eta_a = +0,209518 \quad (2)$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,056288	+1,000000
1	-0,493408	-0,198597

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,400702 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,039368 \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,098249 \quad (5)$$

Equação da reta: $\mu = +0,598249 * \nu - 0,272255$

Para $\mu = +0,134940$ tem-se $\nu = +0,680645$

$\nu = +0,680645$ $\mu = +0,134940$

Diferença para o ν desejado: +6,593977 %

$N_d = +1,487696 \text{ MN}$ $M_d = +17,696417 \text{ MN}\cdot\text{cm}$

$\omega = +0,105048$ $A_s = +4,400749 \text{ cm}^2$ $\rho = +0,366729$ %

Será feita a interpolação com este resultado e o final do intervalo de $\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = 0$, ou seja, será utilizado o par $\beta_x = +0,526362$ e $\nu = +0,426103$.

Iteração 2: $\beta_x = +0,745400$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,603419 \quad (6)$$

$$\eta_a = +0,187097 \quad (7)$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,030453	+1,000000
1	-0,725919	-0,292182

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,353909 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,081482 \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,230235 \quad (10)$$

Equação da reta: $\mu = +0,730235 * \nu - 0,326025$

Para $\mu = +0,134940$ tem-se $\nu = +0,631256$

$\nu = +0,631256$ $\mu = +0,134940$

Diferença para o ν desejado: -1,140751 %

$N_d = +1,379745$ MN $M_d = +17,696417$ MN.cm

$\omega = +0,078655$ $A_s = +3,295095$ cm² $\rho = +0,274591$ %

A partir de agora as iterações serão feitas com os dois melhores resultados com relação ao ν .

Iteração 3: $\beta_x = +0,751770$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,608576 \quad (11)$$

$$\eta_a = +0,190308 \quad (12)$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,034432	+1,000000
1	-0,690111	-0,277770

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,361115 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,074996 \quad (14)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,207680 \quad (15)$$

Equação da reta: $\mu = +0,707680 * \nu - 0,316697$

Para $\mu = +0,134940$ tem-se $\nu = +0,638194$

$\nu = +0,638194$ $\mu = +0,134940$

Diferença para o ν desejado: -0,054137 %

$N_d = +1,394910$ MN $M_d = +17,696417$ MN.cm

$\omega = +0,082020$ $A_s = +3,436045$ cm² $\rho = +0,286337$ %

Iteração 4: $\beta_x = +0,752080$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,608827 \quad (16)$$

$$\eta_a = +0,190465 \quad (17)$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,034624	+1,000000
1	-0,688384	-0,277075

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,361463 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,074684 \quad (19)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,206615 \quad (20)$$

Equação da reta: $\mu = +0,706615 * \nu - 0,316258$

Para $\mu = +0,134940$ tem-se $\nu = +0,638535$

$\nu = +0,638535$ $\mu = +0,134940$

Diferença para o ν desejado: -0,000861 %

Considera-se a precisão adequada e, portanto, a resposta do problema.

$N_d = +1,395654$ MN $M_d = +17,696417$ MN.cm

$\omega = +0,082188$ $A_s = +3,443083$ cm² $\rho = +0,286924$ %

São necessárias, de fato, 4,4 barras de 10 mm de diâmetro mas, por conta da simetria forçada, serão utilizadas duas camadas com 3 ϕ 10 em cada camada (esboço da seção esperado).

b) Arranjo não pré-arbitrado em duas camadas

É necessária a pesquisa de Zona. Como $0 < \nu < 1$ sabe-se que o problema está restrito às Zonas O, B, C ou D. O item anterior eliminou a Zona O. A intersecção entre as Zonas B, C, D e O se dá quando $\omega = 0$ e $\beta_x = \beta_{x,\lim} = 0,5264$ e fornece $\nu_{\lim} = \eta|_{\beta_x=\beta_{x,\lim}} = 0,4261$. Como $\nu > \nu_{\lim}$ sabe-se que o problema está restrito às Zonas B ou C. A fronteira entre as Zonas B e C é obtida forçando $\omega_1 = 0$ e $\beta_x = \beta_{x,\lim}$. Utilizando a força normal dada chega-se em $\mu_{BC} = 0,2047$, o que leva à conclusão de que o problema deve ser resolvido na Zona B ($\omega_1 = 0$ e $\omega_2 > 0$), com o cálculo da linha neutra β_x .

Facilmente obtem-se $\beta_x = 0,7302$ ($\eta = 0,5912$; $\eta_a = 0,1796$; $\varepsilon_2 = 3,0207$; $\alpha_2 = 1$) que leva à $\omega = \omega_2 = 0,04734$. São necessárias 2,5 barras de 10 mm de diâmetro, ou seja, a camada superior com 3 ϕ 10 (e a inferior sem armadura) é suficiente para resistir aos esforços dados.

c) Armadura superior fixa (2 ϕ 10)

Este problema também se resume à duas equações e duas incógnitas e a equação de forças a ser resolvida pode ser colocada na forma (é fácil calcular $\omega_2 = 0,037496$)

$$\nu = \frac{\mu + \eta_a - \eta \beta_1 + \omega_2 \alpha_2 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_{cg} - \beta_1}$$

e, com hipóteses, pode ser resolvida sem iterações. A solução é $\beta_x = 0,7653$ ($\eta = 0,6195$; $\eta_a = 0,1972$; $\varepsilon_2 = 3,0427$; $\alpha_2 = 1$; $\varepsilon_1 = -0,6160$; $\alpha_1 = -0,2479$) que fornece $\omega_1 = 0,07461$. São necessárias 3,98 barras de 10 mm de diâmetro, ou seja, a camada inferior com 4 ϕ 10 (e a superior com 2 ϕ 10) é suficiente para resistir aos esforços dados.

Observação: ainda eram esperadas comparações entre os resultados obtidos.

2ª Questão

A observação da existência de um máximo para o momento fletor é muito natural.

Há que se evitar, entretanto, a solução ingênua de tentar achar quando

$$\frac{\partial \mu}{\partial \nu} = 0$$

por conta de os esforços resistentes não serem independentes. De fato, usando a equação

$$\mu = \nu (\beta_{cg} - \kappa) - \eta_a + \eta \kappa$$

seria obtida, erroneamente, a derivada

$$\frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \beta_{cg} - \kappa$$

que seria nula quando $\beta_{cg} = \kappa$. Ora, sabe-se que para seções duplamente simétricas isso só ocorre quando $\beta_x \rightarrow \pm\infty$ e que, para estes casos, $\mu \rightarrow 0$, o que contraria o fato do momento ser máximo (já que se admitem, por hipótese, momentos não negativos).

Para uma seção conhecida sabe-se que os esforços resistentes são função da linha neutra e, aí sim, há a possibilidade de encontrar-se, numericamente, quando

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta_x} = 0.$$

A equação do momento fletor resistente em função da linha neutra é

$$\mu = \eta \beta_{cg} - \eta_a + \omega \sum p_i \alpha_i (\beta_{cg} - \beta_i)$$

que, derivada, fornece

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta_x} = \frac{\partial \eta}{\partial \beta_x} \beta_{cg} - \frac{\partial \eta_a}{\partial \beta_x} + \omega \sum p_i \frac{d\alpha_i}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_x} (\beta_{cg} - \beta_i).$$

Esta equação, depois de determinadas – analiticamente – as derivadas do lado direito, pode ser resolvida numericamente para obter, diretamente, o ponto de momento máximo.