



## Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Dezembro de 2011

*Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.*

*Justifique cientificamente suas afirmações e deixe cristalina a sua argumentação.*

*Seja SEMPRE o mais técnico possível.*

*Esta prova tem 7 laudas e 10 questões e o enunciado DEVE ser devolvido caso faça parte de sua resposta.*

**(duração máxima: 4 h)**

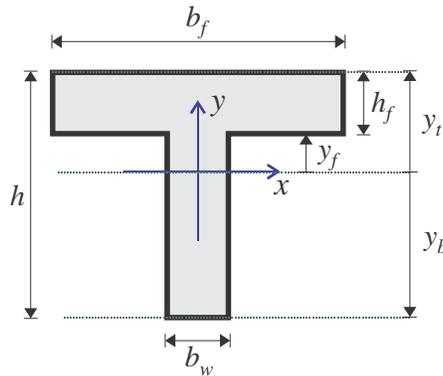
Considere os seguintes dados somente para as questões numéricas:

- Coeficiente de ponderação das ações:  $\gamma_f = 1,40$ .
- Aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $E_s = 210$  GPa).
- Concreto C30, diagrama parabólico-retangular ( $f_{ck} = 30$  MPa e lembrar que  $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$  e que  $\gamma_c = 1,40$ ).
- Seção retangular com base  $b = 20$  cm e altura total  $h = 30$  cm.
- Se precisar transformar unidades de força, use a equivalência de  $1 \text{ kgf} = 10 \text{ N}$ .

**1ª Questão (teórica)** Admita que os esforços resistentes de uma seção de concreto simples retangular  $b \times h$  sejam calculados com as funções

$$N_c(b, h, \varepsilon_o, k) \text{ e } M_c(b, h, \varepsilon_o, k),$$

onde  $\varepsilon_o$  e  $k$  caracterizam, como de costume, a distribuição de deformações nesta seção transversal. Somente utilizando as funções genéricas anteriores, diga como é possível calcular os esforços resistentes para uma seção “T” como a da figura seguinte.



**2ª Questão (teórica)** Deseja-se calcular numericamente a raiz de uma equação  $f(x) = 0$ . Deduza a fórmula de recorrência (ou seja, como é calculada a tentativa  $x_{i+1}$  em função da tentativa anterior  $x_i$ ) utilizando o processo das secantes (*regula falsi*) e o de Newton-Raphson (N-R). Esta expressão de N-R, com a derivada da função avaliada por diferenças finitas

$$f'(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

pode ser comparada com a expressão das secantes?

**3ª Questão (teórica)** Faça um esboço, no mesmo gráfico, de algumas curvas momento-curvatura (plano  $1/R \times M_d$ ) para uma mesma seção duplamente simétrica, com área de armadura constante, para alguns valores distintos de força normal. Confronte, ainda, estes esboços com uma curva de interação no ELU (plano  $N_d \times M_d$ ) para esta mesma seção.

**4ª Questão (numérica)** A Figura 1 apresenta um diagrama momento curvatura para uma seção retangular armada de forma duplamente simétrica ( $nc = 5$ ,  $p_1 = 0,35$ ,  $\delta = 0,05$ ) com uma taxa mecânica de armadura  $\omega = 0,7$  e submetida a uma força normal adimensional  $\nu = 0,9$ .

Supondo que um pilar (constante e com comprimento equivalente  $\ell_e$ ) engastado-livre esteja submetido, na extremidade livre, a uma força normal  $\nu = 0,9$  e a um momento fletor  $\mu$ , e considerando a hipótese do “Pilar Padrão”, ou seja, que a flecha máxima do pilar seja proporcional à curvatura na base

$$f = \frac{\ell_e^2}{\pi^2} \frac{1}{R},$$

pede-se:

- Supondo  $\ell_e/h = 18$  qual seria o maior valor de  $\mu$  que poderia ser aplicado?
- Supondo  $\mu = 0,1$  qual seria o maior valor de  $\ell_e/h$  que o pilar poderia ter?

**5ª Questão (numérica)** A tabela seguinte apresenta os resultados numéricos de uma iteração, por diferenças finitas ( $m = 10$ ), para o cálculo da deformada do pilar da questão anterior ( $\ell_e/h = 18$  e  $\mu = 0,1$ ).

Seção	$\mu_i$	$\theta_i$	$100 y_i/h$
0	0,1523	1,5288	0,0000
1	0,1518	1,5229	0,0619
2	0,1501	1,5055	0,2472
3	0,1473	1,4765	0,5544
4	0,1435	1,4364	0,9812
5	0,1386	1,3856	1,5244
6	0,1327	1,3246	2,1798
7	0,1258	1,2539	2,9425
8	0,1181	1,1743	3,8067
9	0,1094	1,0864	4,7661
10	0,1000	-	5,8135

Pede-se:

- Esta é a primeira iteração? Em caso negativo, esta iteração pode ser considerada a última? Por quê?
- Supondo que esta tabela representasse o equilíbrio do pilar, como esta deformada ( $y_i$  para  $i = 0 \dots 10$ ) se compararia com aquela que seria obtida pelo processo do “Pilar Padrão”?

*Observações:* As seções estão numeradas do engaste (seção  $i = 0$ ) para a extremidade livre (seção  $i = 10$ ). O momento total (primeira mais segunda ordem) adimensional na seção  $i$  é  $\mu_i$ . A flecha na seção  $i$  é dada por  $y_i$  e  $h$  é a altura da seção transversal. A curvatura majorada adimensional da seção  $i$  é dada por  $\theta_i$ .

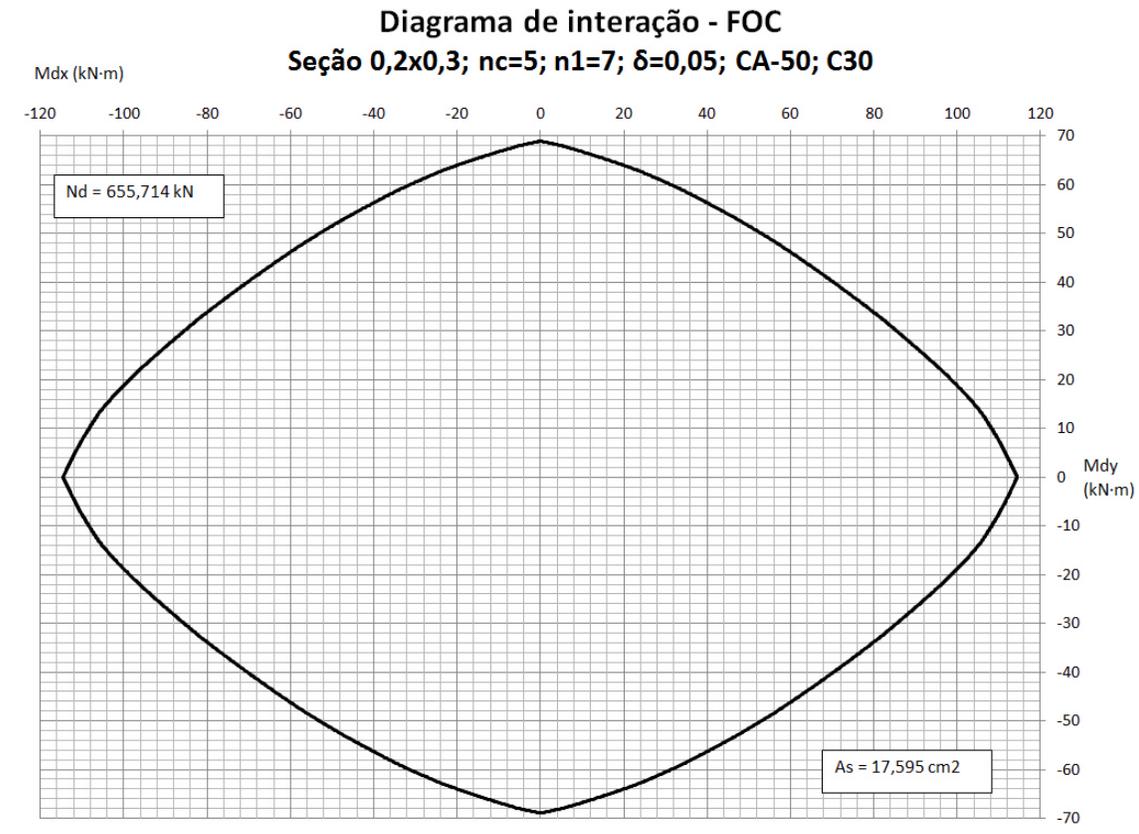
**6ª Questão (numérica)** Considerando o mesmo pilar da questão anterior ( $\ell_e/h = 18$ ) e admitindo uma excentricidade constante de  $e/h = 1/9$  (lembrar que  $\mu = \nu \cdot e/h$ ), foram feitas outras verificações com o processo das diferenças finitas obtendo-se equilíbrios com as seguintes flechas

$\nu$	$\theta_0$	$100 f/h$
0,7	0,9450	3,6643
0,8	1,1996	4,6106
0,9	1,5288	5,8135
1,0	1,9910	7,4634

Com o auxílio das questões anteriores e, ainda, da curva de interação (no ELU) mostrada na Figura 2, o que pode ser dito sobre a carga crítica deste pilar?

**7ª Questão (teórica)** Considerando toda a Região Viável para o ELU no plano  $\theta \times \varepsilon_c$ , como seriam as curvas de nível da força normal resistente para uma seção qualquer conhecida?

- 8ª Questão (teórica e numérica) Considerando o diagrama de interação para a FOC da figura seguinte, que utiliza corretamente a regra da “mão direita” para os momentos fletores, pede-se:
- Descreva como esta curva pode ser construída numericamente.
  - Esta curva foi obtida com o diagrama RS ou PR?



9ª Questão (teórica) Como pode ser calculado numericamente o valor máximo do momento fletor resistente de uma seção completamente conhecida sob FNC?

10ª Questão (teórica) Sob algumas condições particulares, notoriamente quando  $\sum \omega_i \alpha_i = 0$ , a área de armadura  $\omega$  na FNC pode ser colocada em função dos esforços aplicados ( $\nu, \mu$ ) e uma equação analítica é obtida para uma curva de interação no ELU no plano  $\nu \times \mu$ . Existem condições análogas para a obtenção de uma curva momento-curvatura no plano  $hk \times \mu$ ?

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

Nome do aluno: \_\_\_\_\_

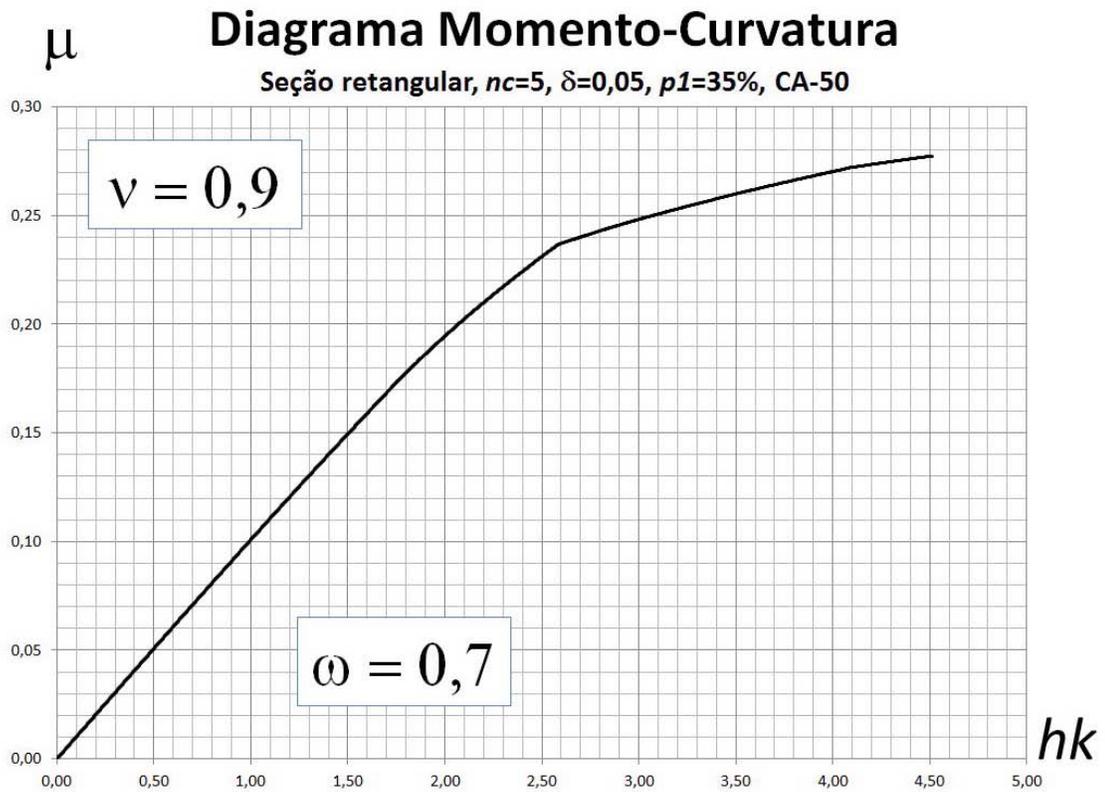


Figura 1: Diagrama Momento-Curvatura

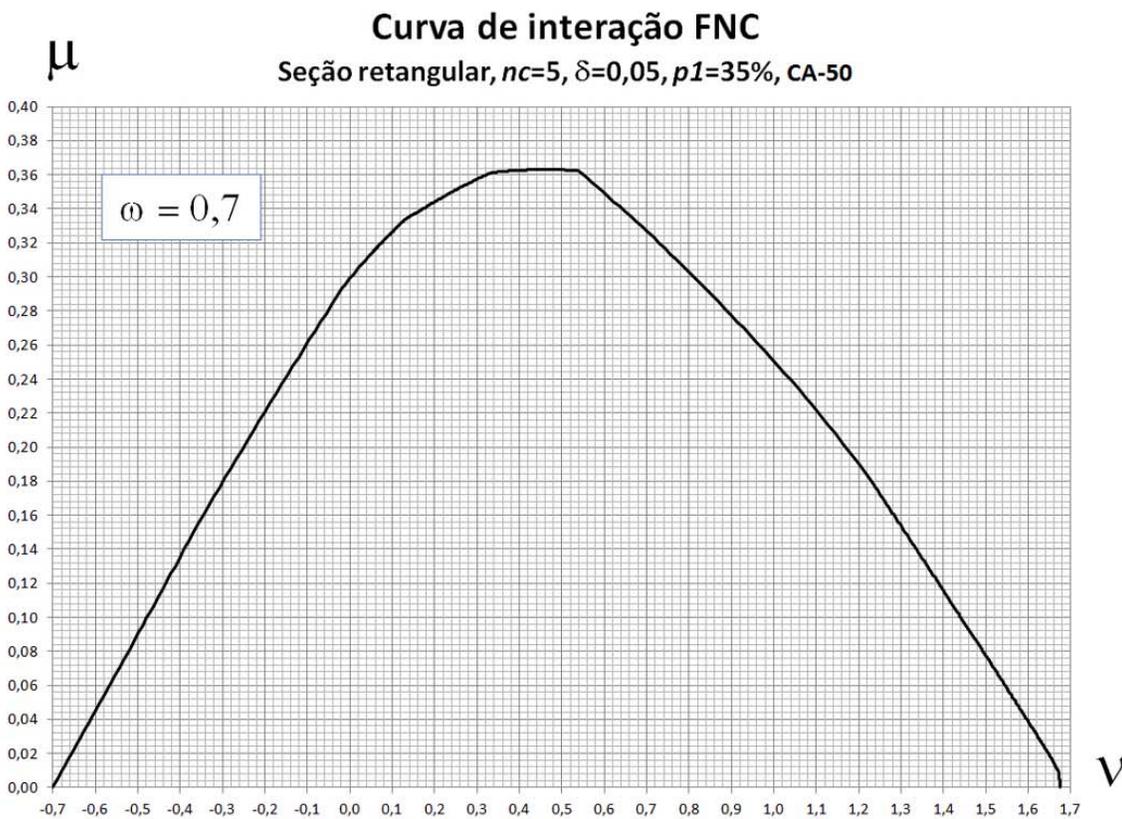


Figura 2: Curva de interação no ELU

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (1)$$

### Alguns adimensionais

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \quad \theta = hk = 1000 \frac{h}{R}$$

### Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i \quad (2)$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i \quad (3)$$

Funções  $\eta$  e  $\eta_a$  para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR - ELU)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right. \quad (5)$$

**Equações de equilíbrio (nFNC)**

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s \quad (6)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s \quad (7)$$

**Equação cinemática** (seção transversal no plano  $x - y$ )

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k y \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta \beta_i \quad (9)$$

**Esforços resistentes do concreto** (seção retangular  $b \times h$ ) [ $\kappa \neq 0$ ]

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \quad (10)$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0) \quad (11)$$

onde

$$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b). \quad (12)$$

( $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_b$  são as deformações, em  $^{\circ}/_{oo}$ , da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

**Matriz de rigidezes do concreto**

$$\bar{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa} \Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) & \frac{b}{\kappa^3} [\Delta J_2 - 2 (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde

$$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b) \quad (14)$$

$$(15)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (16)$$

**Diagrama parabólico-retangular do concreto**

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (17)$$

**Integrais do diagrama parabólico-retangular**

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - \varepsilon(n+2)}{4(n+2)(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3)\varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (18)$$

Rotação de eixos

$$[ U \quad V ] = [ X \quad Y ] \times \mathbf{R}(\varphi) \text{ onde } \mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[ X \quad Y ] = [ U \quad V ] \times \mathbf{R}(-\varphi) \quad (20)$$

Cálculo de características de polígonos planos

(Valores com sinais corretos para circuição anti-horária.  $N$ : número de vértices.)

$$a_k = X_k Y_{k+1} - X_{k+1} Y_k \quad (21)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \quad (22)$$

$$\text{Área} \times X_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (X_k + X_{k+1}) \quad (23)$$

$$\text{Área} \times Y_{cg} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^N a_k (Y_k + Y_{k+1}) \quad (24)$$

Equações de equilíbrio (FOC)

( $n$ : número de barras)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_i \quad (25)$$

$$\mu_x = \frac{M_{dx}}{\sigma_{cd} A_c b} = \eta_{ax} + \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_i \frac{X_{si}}{b} \quad (26)$$

$$\mu_y = \frac{M_{dy}}{\sigma_{cd} A_c h} = \eta_{ay} + \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_i \frac{Y_{si}}{h} \quad (27)$$

Alguns comentários e resultados numéricos

1<sup>a</sup> Questão