



## 2ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Outubro de 2011

*Absolutamente sem consulta.*

*A interpretação das questões faz parte da prova.*

*Não é permitido o uso de programas previamente armazenados (calculadoras etc.), próprios ou alheios, que se refiram ao conteúdo da matéria.*

*Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.*

**(duração máxima: 3 h)**

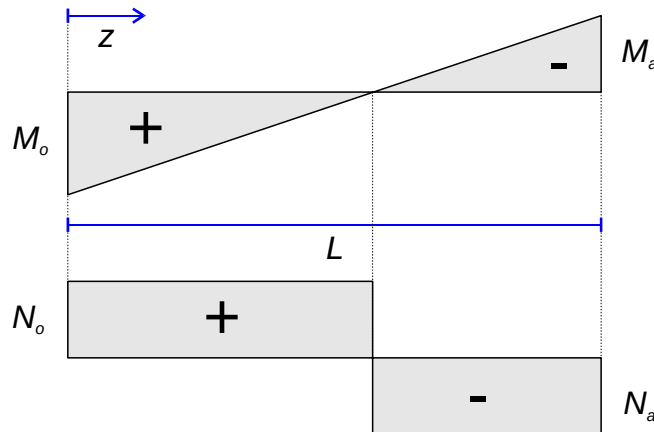
Considere os seguintes dados para a primeira questão:

- Coeficiente de ponderação das ações:  $\gamma_F = 1,40$ .
- Aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $E_s = 210$  GPa).
- Armadura com duas camadas de barras ( $nc = 2$ ) e  $d' = 0,04$  m.
- Concreto C35, diagrama parabólico-retangular ( $f_{ck} = 35$  MPa,  $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$  e  $\gamma_c = 1,40$ ).
- Seção retangular com base  $b = 0,20$  m e altura total  $h = 0,40$  m.
- Diâmetros (em mm) das barras a serem considerados:  $\phi 10$ ;  $\phi 12,5$ ;  $\phi 16$ ;  $\phi 20$ ;  $\phi 22$ ;  $\phi 25$ ;  $\phi 32$  e  $\phi 40$ .

**1ª Questão** A figura seguinte representa, fora de escala, os diagramas do momento fletor  $M_z$  (desenhado do lado tracionado) e da força normal  $N_z$  (positiva quando de compressão) para uma estrutura de comprimento  $L = 10$  m (observar a abscissa  $z$  variando no eixo longitudinal da peça da esquerda para a direita,  $0 \leq z \leq L$ ). Sabendo que os esforços apresentados são, na extremidade esquerda,  $M_o = 39$  kN·m e  $N_o = 1457$  kN e, na extremidade direita,  $M_a = -68$  kN·m e  $N_a = -57$  kN, solicita-se o dimensionamento da área de armadura considerando:

- Arranjo pré-fixado duplamente simétrico ( $\omega_1 = \omega_2$ ).
- Arranjo não pré-fixado (sem pré-fixar qualquer relação entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ).
- Faça um esboço de possíveis condições de apoio e carregamentos desta estrutura.

*Observação:* para os itens (a) e (b) espera-se que a área de armadura seja transformada em barras e seja feito um esboço da(s) seção(ões) transversal(ais) e do perfil longitudinal da armadura da estrutura.



**2ª Questão** Quais os esforços resistentes  $(\nu, \mu)$  de uma seção qualquer com uma única camada de barras inferior ( $nc = 1$ ,  $p_1 = 1$  e  $\beta_{cg} < \beta_1 < 1$ ) quando a profundidade da linha neutra é ilimitada (considere  $\beta_x \rightarrow +\infty$  e  $\beta_x \rightarrow -\infty$ )? Faça, ainda, um esboço de uma curva de interação, no plano  $\nu \times \mu$ , para uma seção deste tipo.

| Questão | 1a  | 1b  | 1c  | 2   |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| Valor   | 5,0 | 4,0 | 1,0 | 2,0 |

A nota máxima da prova é dez (10,0).

### Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h}$$

### Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i$$

Funções  $\eta$  e  $\eta_a$  para seção retangular (Diagrama PR: parabólico-retangular)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

**1ª Questão** Como não foi informado se os esforços apresentados são característicos ou de cálculo, é fundamental, do ponto de vista da segurança, considerar que necessitam, ainda, de ponderação com  $\gamma_F$ . Os esforços de cálculo são, na extremidade esquerda

$$\begin{aligned} N_{do} &= 2040,0 \text{ kN} \quad (\nu_o = 1,2000) \\ M_{do} &= 54,6 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\mu_o = 0,08029) \end{aligned}$$

e, na extremidade direita,

$$\begin{aligned} N_{da} &= -79,8 \text{ kN} \quad (\nu_a = -0,04694) \\ M_{da} &= -95,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\mu_a = -0,1400) . \end{aligned}$$

Não se sabe, a priori, qual extremidade é crítica sob o ponto de vista de necessidade de armadura de forma que deve-se dimensionar ambas. Considerando que  $\nu_o > 1$  e que  $\nu_a < 0$  conclui-se que há necessidade (teórica) de armadura em ambos os casos.

A análise das equações para o caso  $\sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i = 0$  pode ser feita levando ao cálculo dos seguintes intervalos

$$\begin{aligned} 0,2448 &\leq \beta_x \leq 0,5655 \\ 0,1982 &\leq \nu \leq 0,4578 . \end{aligned}$$

Também pode-se calcular que há escoamento simultâneo, em tração, de todas as camadas de barras quando

$$\beta_x \leq \beta_{ET} = -0,1088,$$

que é, na prática, um limite inferior para qualquer profundidade de linha neutra.

a) Armadura duplamente simétrica ( $nc = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 1/2$ )

a.1) Extremidade esquerda ( $\nu_o = 1,2000$  e  $\mu_o = 0,08029$ )

Pode-se utilizar o final do intervalo de nulidade do somatório ( $\beta_x = 0,5655$  e  $\nu = 0,4578$ ) como uma estimativa para estimar a linha neutra da primeira iteração:  $1,2 \times 0,5655 / 0,4578 = 1,4823$ .

**Iteração 1:**  $\beta_x = +1,4823$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,9440 \quad (1)$$

$$\eta_a = +0,4520 \quad (2)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +2,6236            | +1,0000    |
| 1          | +1,1052            | +0,5338    |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,7669 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = +0,2902 \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,3784 \quad (5)$$

Equação da reta:  $\mu = +0,1216 * \nu - 0,0948$

Para  $\mu = +0,0803$  tem-se  $\nu = +1,4399$   
 $\nu = +1,4399$   $\mu = +0,0803$   
Diferença para o  $\nu$  desejado:  $+19,9878$  %

$N_d = +2,4478$  MN  $M_d = +5,4597$  MN.cm  
 $\omega = +0,6466$   $A_s = +25,2813$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +3,1602$  %

Agora pode-se fazer uma interpolação linear com o final do intervalo de nulidade do somatório e esta primeira iteração, obtendo-se  $\beta_x = 1,2584$ .

Iteração 2:  $\beta_x = +1,2584$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,9097 \quad (6)$$

$$\eta_a = +0,4226 \quad (7)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +2,7919            | +1,0000    |
| 1          | +0,8638            | +0,4172    |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,7086 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = +0,2377 \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,3355 \quad (10)$$

Equação da reta:  $\mu = +0,1645 * \nu - 0,1174$

Para  $\mu = +0,0803$  tem-se  $\nu = +1,2017$

$\nu = +1,2017$   $\mu = +0,0803$

Diferença para o  $\nu$  desejado:  $+0,1409$  %

$N_d = +2,0429$  MN  $M_d = +5,4597$  MN.cm

$\omega = +0,4121$   $A_s = +16,1128$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +2,0141$  %

Note que, com duas iterações, já se alcançou um resultado razoável mas, a título de precisão, outras iterações serão realizadas. Utilizando os resultados das iterações 1 e 2 pode-se fazer uma extrapolação linear obtendo-se  $\beta_x = 1,2568$ .

Iteração 3:  $\beta_x = +1,2568$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,9093 \quad (11)$$

$$\eta_a = +0,4223 \quad (12)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +2,7934            | +1,0000    |
| 1          | +0,8616            | +0,4162    |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,7081 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = +0,2373 \quad (14)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,3351 \quad (15)$$

Equação da reta:  $\mu = +0,1649 * \nu - 0,1176$

Para  $\mu = +0,0803$  tem-se  $\nu = +1,1998$   
 $\nu = +1,1998$   $\mu = +0,0803$   
Diferença para o  $\nu$  desejado: -0,0136 %  
 $N_d = +2,0397$  MN  $M_d = +5,4597$  MN.cm  
 $\omega = +0,4103$   $A_s = +16,0418$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +2,0052$  %

Iteração 4:  $\beta_x = +1,2570$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,9094 \quad (16)$$

$$\eta_a = +0,4223 \quad (17)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +2,7932            | +1,0000    |
| 1          | +0,8619            | +0,4163    |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,7081 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = +0,2373 \quad (19)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,3351 \quad (20)$$

Equação da reta:  $\mu = +0,1649 * \nu - 0,1176$   
Para  $\mu = +0,0803$  tem-se  $\nu = +1,2001$   
 $\nu = +1,2001$   $\mu = +0,0803$   
Diferença para o  $\nu$  desejado: +0,0057 %  
 $N_d = +2,0401$  MN  $M_d = +5,4597$  MN.cm  
 $\omega = +0,4105$   $A_s = +16,0507$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +2,0063$  %

Iteração 5:  $\beta_x = +1,2569$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,9094 \quad (21)$$

$$\eta_a = +0,4223 \quad (22)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +2,7933            | +1,0000    |
| 1          | +0,8617            | +0,4162    |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,7081 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = +0,2373 \quad (24)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,3351 \quad (25)$$

Equação da reta:  $\mu = +0,1649 * \nu - 0,1176$   
Para  $\mu = +0,0803$  tem-se  $\nu = +1,2000$   
 $\nu = +1,2000$   $\mu = +0,0803$   
Diferença para o  $\nu$  desejado: -0,0040 %  
 $N_d = +2,0399$  MN  $M_d = +5,4597$  MN.cm  
 $\omega = +0,4104$   $A_s = +16,0462$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +2,0058$  %

Esta pode, finalmente, ser considerada a resposta (notar que a precisão aqui obtida foi bastante rigorosa e que, em um cálculo manual, talvez não houvesse necessidade de tantas iterações):  $\omega = +0,4104 A_s = +16,0462 \text{ cm}^2$ . Posteriormente será escolhida a bitola.

a.2) Extremidade direita ( $\nu_o = -0,04694$  e  $\mu_o = -0,1400$ )

Notar que o sinal do momento fletor é convencional e, por simplicidade, será desconsiderado. O mesmo, entretanto, não pode ser feito com a força normal uma vez que trata-se de flexo-tração e utilizar o seu módulo transformaria, erroneamente, o problema em uma flexo-compressão ( $\nu_o = -0,04694$  e  $\mu_o = 0,1400$ ).

Sabe-se que a menor linha neutra possível é  $-0,1088$  e que o somatório nulo é limitado inferiormente por uma linha neutra  $0,2448$ . Fazendo a média entre estes dois valores pode-se, talvez, obter uma estimativa para a primeira iteração:  $\beta_x = 0,06800$ .

Iteração 1:  $\beta_x = +0,06800$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,02400 \quad (26)$$

$$\eta_a = +0,00057 \quad (27)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | -0,38462           | -0,18577   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,59288 \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,45929 \quad (29)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,77467 \quad (30)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,27467 * \nu + 0,01803$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,44407$

$\nu = -0,44407$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado:  $+846,03308 \%$

$N_d = -0,75492 \text{ MN}$   $M_d = +9,52000 \text{ MN.cm}$

$\omega = +0,78948 A_s = +30,86870 \text{ cm}^2$   $\rho = +3,85859 \%$

Interpolando entre este valor e o início do intervalo onde o somatório se anula obtém-se a profundidade de linha neutra para a iteração seguinte.

Iteração 2:  $\beta_x = +0,17732$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,12914 \quad (31)$$

$$\eta_a = +0,00892 \quad (32)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +1,06991           | +0,51676   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,24162 \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,42416 \quad (34)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,75551 \quad (35)$$

Equação da reta:  $\mu = -1,25551 * \nu + 0,21779$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = +0,06196$

$\nu = +0,06196$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado:  $+31,99553$  %

$N_d = +0,10533$  MN  $M_d = +9,52000$  MN.cm

$\omega = +0,27805$   $A_s = +10,87189$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +1,35899$  %

Ainda interpolando entre o início do intervalo de somatório nulo (por ser o melhor valor) e este último obtem-se  $\beta_x = 0,12338$ .

Iteração 3:  $\beta_x = +0,12338$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,07206 \quad (36)$$

$$\eta_a = +0,00323 \quad (37)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,30105           | +0,14541   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,42730 \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,44273 \quad (39)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,03612 \quad (40)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,53612 * \nu + 0,07143$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,12790$

$\nu = -0,12790$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado:  $+172,48605$  %

$N_d = -0,21744$  MN  $M_d = +9,52000$  MN.cm

$\omega = +0,46797$   $A_s = +18,29749$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +2,28719$  %

Interpolando as iterações 2 e 3 obtem-se  $\beta_x = 0,14638$ .

Iteração 4:  $\beta_x = +0,14638$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,09614 \quad (41)$$

$$\eta_a = +0,00525 \quad (42)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,61543           | +0,29725   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,35137 \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43514 \quad (44)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,23839 \quad (45)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,73839 * \nu + 0,11381$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,03547$

$\nu = -0,03547$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado:  $-24,42631$  %

$$N_d = -0,06031 \text{ MN } M_d = +9,52000 \text{ MN.cm}$$

$$\omega = +0,37457 \text{ A}_s = +14,64570 \text{ cm}^2 \rho = +1,83071 \%$$

Interpolando as iterações 2 e 4 obtem-se  $\beta_x = 0,14274$ .

Iteração 5:  $\beta_x = +0,14274$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,09227 \quad (46)$$

$$\eta_a = +0,00489 \quad (47)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,56440           | +0,27261   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,36370 \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43637 \quad (49)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,19982 \quad (50)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,69982 * \nu + 0,10581$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,04886$

$\nu = -0,04886 \mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado: +4,08336 %

$$N_d = -0,08306 \text{ MN } M_d = +9,52000 \text{ MN.cm}$$

$$\omega = +0,38802 \text{ A}_s = +15,17167 \text{ cm}^2 \rho = +1,89646 \%$$

Interpolando as iterações 4 e 5 obtem-se  $\beta_x = 0,14326$ .

Iteração 6:  $\beta_x = +0,14326$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,09282 \quad (51)$$

$$\eta_a = +0,00494 \quad (52)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,57166           | +0,27611   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,36194 \quad (53)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43619 \quad (54)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,20514 \quad (55)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,70514 * \nu + 0,10692$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,04692$

$\nu = -0,04692 \mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado: -0,04807 %

$$N_d = -0,07976 \text{ MN } M_d = +9,52000 \text{ MN.cm}$$

$$\omega = +0,38607 \text{ A}_s = +15,09537 \text{ cm}^2 \rho = +1,88692 \%$$

Interpolando as iterações 5 e 6 obtem-se  $\beta_x = 0,14325$ .

Iteração 7:  $\beta_x = +0,14325$



A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,09281 \quad (56)$$

$$\eta_a = +0,00494 \quad (57)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,57152           | +0,27605   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,36198 \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43620 \quad (59)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,20504 \quad (60)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,70504 * \nu + 0,10690$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,04695$

$\nu = -0,04695$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado: +0,03119 %

$N_d = -0,07982$  MN  $M_d = +9,52000$  MN.cm

$\omega = +0,38611$   $A_s = +15,09683$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +1,88710$  %

Interpolando as iterações 6 e 7 obtém-se  $\beta_x = 0,143253$  (foi necessário aumentar a precisão da exibição dos resultados para não “repetir” iterações).

Iteração 8:  $\beta_x = +0,143253$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,09281 \quad (61)$$

$$\eta_a = +0,00494 \quad (62)$$

| Camada $i$ | $\varepsilon_{si}$ | $\alpha_i$ |
|------------|--------------------|------------|
| 2          | +0,57156           | +0,27607   |
| 1          | -10,00000          | -1,00000   |

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,36197 \quad (63)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43620 \quad (64)$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,20507 \quad (65)$$

Equação da reta:  $\mu = -0,70507 * \nu + 0,10690$

Para  $\mu = +0,14000$  tem-se  $\nu = -0,04694$

$\nu = -0,04694$   $\mu = +0,14000$

Diferença para o  $\nu$  desejado: +0,00741 %

$N_d = -0,07980$  MN  $M_d = +9,52000$  MN.cm

$\omega = +0,38610$   $A_s = +15,09639$  cm<sup>2</sup>  $\rho = +1,88705$  %

Esta pode, finalmente, ser considerada a resposta (notar que a precisão aqui obtida foi bastante rigorosa e que, novamente, talvez não houvesse necessidade de tantas iterações):  $\omega = +0,38610$   $A_s = +15,09639$  cm<sup>2</sup>.

**Escolha das barras:** há alguns fatores básicos para a escolha das barras:

Em termos práticos deve-se ter, pelo menos, duas barras em cada camada.

Há que se escolher as bitolas que levam, em tese, à menor diferença entre a área necessária e a fornecida por um número inteiro de barras.

Deve-se escolher barras que fiquem com um espaçamento interno adequado, propiciando uma concretagem adequada (2 cm?).

Para facilitar o controle de execução opta-se, aqui, pela utilização de um único diâmetro das barras para toda a peça.

As duas extremidades poderiam ter as mesmas armaduras, ou seja, pode-se armar toda a peça com duas camadas com quatro barras de 16 mm de diâmetro cada ( $2 \times 4\phi 16$ ). Eram esperados esboços da seção e do perfil longitudinal da armadura.

b) Armadura em duas bordas assimétrica ( $nc = 2$ ,  $p_1$  e  $p_2$  “livres”)

b.1) Extremidade esquerda ( $\nu_o = 1,2000$  e  $\mu_o = 0,08029$ )

A pesquisa de Zona leva à Zona B com a armadura inferior nula ( $A_{s1} = 0$ ), por definição, e a superior calculada. Fazendo a hipótese de Domínio 5 ( $\beta_x \geq 1$ ) pode-se resolver a equação para a linha neutra obtendo-se

$$\beta_x = \begin{cases} -12,314 \\ 13,172 \end{cases}$$

onde, naturalmente, a resposta negativa não tem significado físico e a positiva confirma a hipótese. Pode-se utilizar a equação de forças para o cálculo da armadura ( $\eta = 0,9996$ ;  $\varepsilon_{s2} = 2,0516$  e  $\alpha_2 = 0,99091$ ) obtendo-se  $\omega_2 = 0,2022$  ( $A_{s2} = 7,9060 \text{ cm}^2$ ). A camada superior com  $4\phi 16$  fica adequadamente armada.

b.2) Extremidade direita ( $\nu_o = -0,04694$  e  $\mu_o = 0,1400$ )

A pesquisa de Zona leva à Zona D com a armadura superior nula ( $A_{s2} = 0$ ), por definição, e a inferior calculada. Fazendo a hipótese de Domínio 2a ( $0 \leq \beta_x \leq 1$ ) pode-se resolver a equação para a linha neutra obtendo-se 4 valores que não pertencem ao Domínio 2a (o mais próximo seria  $\beta_x = 0,19797$  que sugere a próxima hipótese). Fazendo a hipótese de Domínio 2b obtém-se

$$\beta_x = \begin{cases} 0,19441 \\ 1,6056 \end{cases}$$

onde, naturalmente, a resposta maior que um não tem significado físico e a outra confirma a hipótese. Pode-se utilizar a equação de forças para o cálculo da armadura ( $\eta = 0,14737$ ;  $\varepsilon_{s1} = -10$  e  $\alpha_1 = -1$ ) obtendo-se  $\omega_1 = 0,1943$  ( $A_{s1} = 7,5975 \text{ cm}^2$ ). Lembrando que o momento é negativo conclui-se que a camada **superior** também com  $4\phi 16$  fica adequadamente armada.

As duas extremidades poderiam, portanto, ter as mesmas armaduras, ou seja, pode-se armar toda a peça com uma camada **superior** com quatro barras de 16 mm de diâmetro ( $1 \times 4\phi 16$ ). Eram esperados esboços da seção e do perfil longitudinal da armadura.

c) Possível esboço de uma estrutura (há diversas soluções): uma barra engastada ( $z = 0$ ) e livre ( $z = 10$  m) com

- 1) Uma força horizontal apontando para a esquerda aplicada em  $z = 3,6$  m de 1514 kN.
- 2) Uma força horizontal apontando para a direita aplicada em  $z = 10$  m de 57 kN.
- 3) Uma força vertical apontando para cima aplicada em  $z = 10$  m de 2,9 kN.
- 4) Uma carga momento no sentido horário aplicada em  $z = 10$  m de 68 kN-m.

$$\begin{aligned}\nu &= \eta + \omega \alpha \\ \nu \beta_{cg} - \mu &= \eta_a + \omega \beta \alpha.\end{aligned}$$

A equação de momentos pode ficar independente da força normal com

$$\mu = \eta \beta_{cg} - \eta_a + \omega \alpha (\beta_{cg} - \beta)$$

e a relação entre o momento e a normal pode ficar independente da armadura com

$$\mu = \nu (\beta_{cg} - \beta) - \eta_a + \eta \beta.$$

Os esforços resistentes são facilmente calculados lembrando dos pólos de ruína. Para  $\beta_x \rightarrow \infty$  tem-se o Pólo 2 que implica em um encurtamento uniforme da seção de  $2^\circ/_{oo}$  que faz com que a camada fique com uma tensão genérica  $\alpha(2)$ . É fácil mostrar que para esta linha neutra tem-se  $\eta \rightarrow 1$  e  $\eta_a \rightarrow \beta_{cg}$  o que leva aos esforços resistentes

$$\begin{aligned}\nu &= 1 + \alpha(2) \omega \geq 0 \\ \mu &= -\alpha(2) \omega (\beta - \beta_{cg}) \leq 0.\end{aligned}$$

Para a linha neutra  $\beta_x \rightarrow -\infty$  tem-se o Pólo -10 que implica em um encurtamento uniforme da seção de  $-10^\circ/_{oo}$  que faz com que a camada fique com uma tensão  $\alpha = -1$ . É fácil mostrar que para esta linha neutra tem-se  $\eta = \eta_a = 0$  o que leva aos esforços resistentes

$$\begin{aligned}\nu &= -\omega \leq 0 \\ \mu &= \omega (\beta - \beta_{cg}) \geq 0.\end{aligned}$$

Para esboço da curva de interação pode-se utilizar os valores genéricos anteriores considerando  $\omega \neq 0$  e, ainda, as retas genéricas (ambas com coeficiente angular negativo) para as mesmas linhas neutras, ou seja,

$$\begin{aligned}\mu &= -\nu (\beta - \beta_{cg}) \\ \mu &= -(\nu - 1) (\beta - \beta_{cg}).\end{aligned}$$

Esperava-se um esboço de uma curva de interação, com os pontos anteriores (ver página 173 do livro Concreto Estrutural Avançado <http://www.civil.ita.br/~flavio/?q=node/37>).