Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Dezembro de 2010

Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e deixe cristalina a sua argumentação.

Seja SEMPRE o mais técnico possível.

Esta prova tem 6 páginas e 7 questões e o enunciado DEVE ser devolvido caso faça parte de sua resposta.

(duração máxima: 5 h)

A menos de indicação contrária, considere os seguintes dados:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_f = 1,40$.
- Aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C30, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 30$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85\, f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).
- Seção retangular com base $b = 20$ cm e altura total $h = 30$ cm.
- Se precisar transformar unidades de força, use a equivalência de 1 kgf = 10 N.

1ª Questão Considere a seção armada com duas camadas (posicionamento $\beta_2 = 0,05$ e $\beta_1 = 0,90$) submetida aos esforços adimensionais $\nu = 0,1662$ e $\mu = 0,1212$. Dimensione a área de armadura considerando $p_1 = p_2$. Faça um esboço da armadura considerando $\phi 10$.

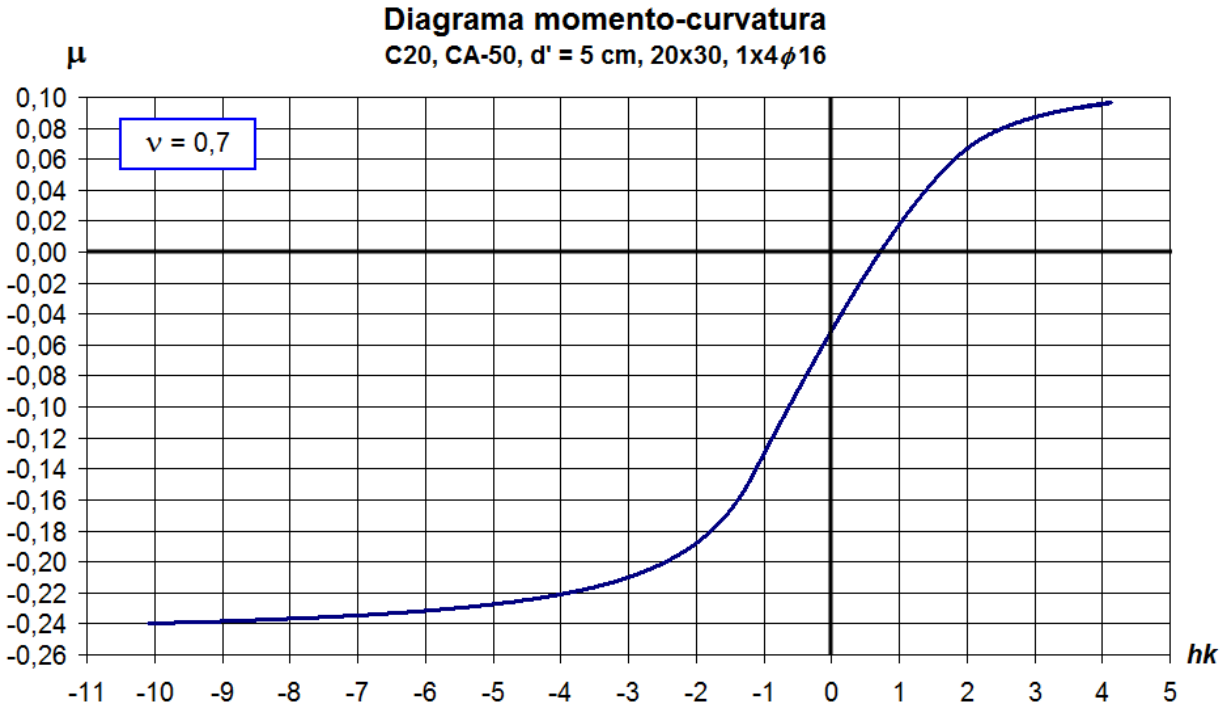
2ª Questão Considere o diagrama momento-normal-curvatura apresentado a seguir (construído para $\nu = 0,7$ e uma única camada de barras). Supondo que um pilar (constante) engastado-livre ($\ell_e/h = 20$) esteja submetido, na extremidade livre, a uma força normal ν e a um momento fletor μ, e considerando a hipótese do "Pilar Padrão", ou seja, que a flecha máxima do pilar seja proporcional à curvatura na base

$$f = \frac{\ell_e^2}{\pi^2}\frac{1}{R},$$

determine o equilíbrio do pilar e sua flecha máxima, quando:

a) Momento de primeira ordem adimensional $\mu = 0,02$.

b) Momento de primeira ordem adimensional $\mu = -0,02$.



3ª Questão A tabela seguinte apresenta os resultados numéricos de uma iteração, por diferenças finitas, para o cálculo da deformada do pilar ($\ell_e/h = 20$) submetido, na extremidade livre, a uma força normal $\nu = 0,3$ (a seção transversal tem uma única camada de barras com $\omega = 0,4$ e $\delta = 0,05$).

Seção	μ_i	θ_i	$1000\, y_i/h$
0	0,00111	-0,2138	0,0000
1	0,00115	-0,2135	-0,1069
2	0,00124	-0,2126	-0,4272
3	0,00140	-0,2110	-0,9601
4	0,00163	-0,2088	-1,7038
5	0,00191	-0,2060	-2,6564
6	0,10210	0,9623	-3,2909
7	0,10200	0,9593	-2,9639
8	0,10162	0,9477	-1,6784
9	0,10095	0,9281	0,5542
10	-	-	3,7143

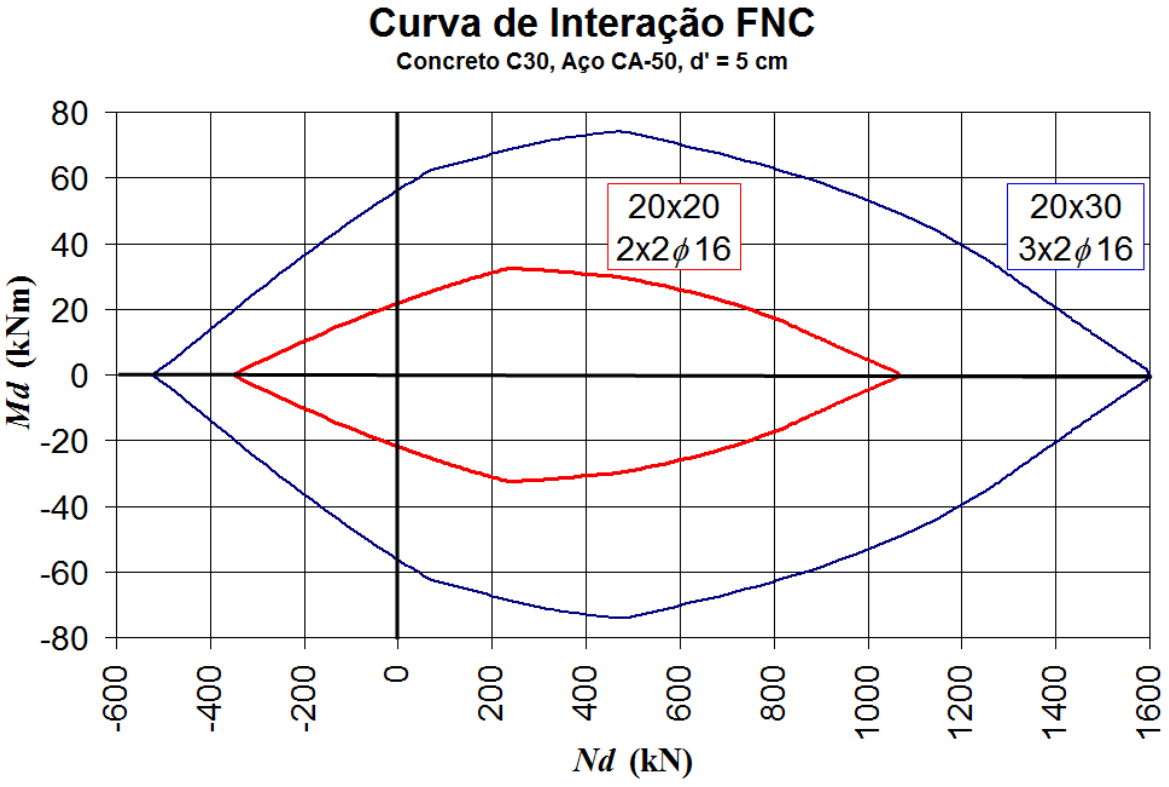
Pede-se:

a) Como são os carregamentos de primeira ordem deste pilar? Faça um esboço!

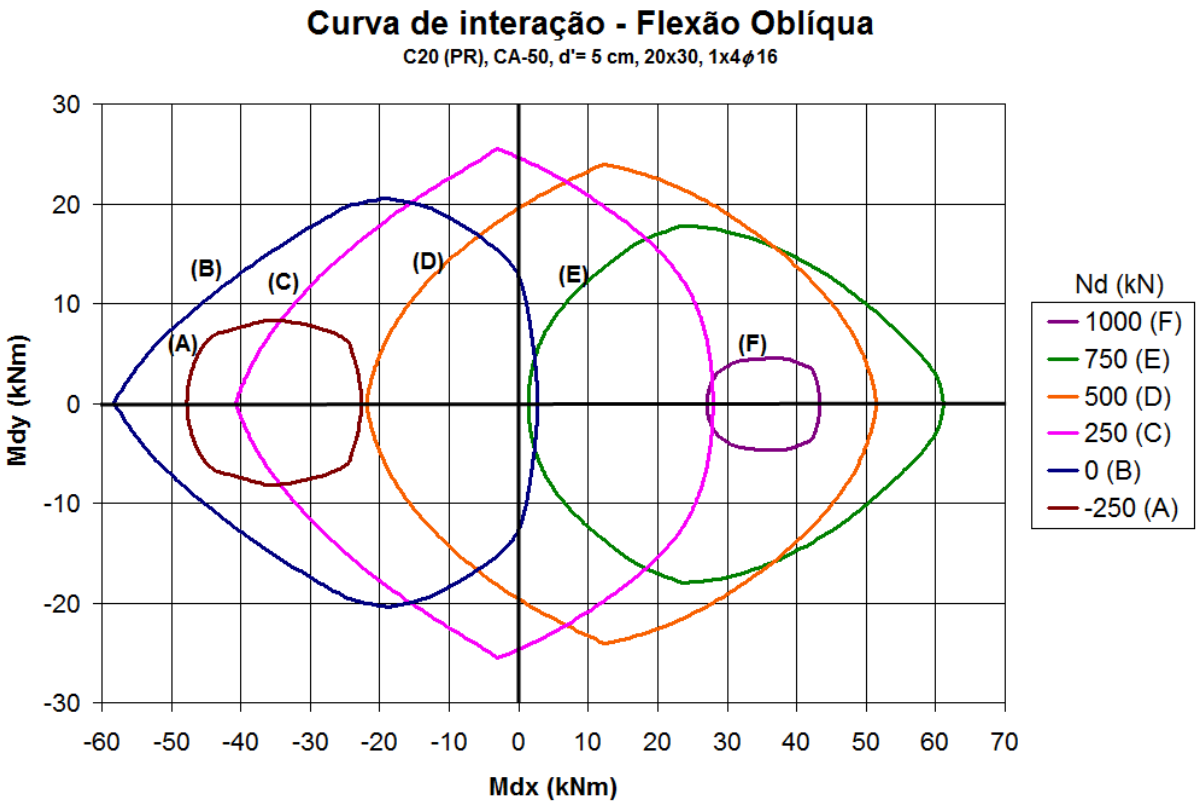
b) Esta é a primeira iteração? Em caso negativo, esta iteração pode ser considerada a última? Por quê?

Observações: As seções estão numeradas do engaste (seção $i = 0$) para a extremidade livre (seção $i = 10$). O momento total (primeira mais segunda ordem) adimensional na seção i é μ_i. A flecha na seção i é dada por y_i e h é a altura da seção transversal. A curvatura majorada adimensional da seção i é dada por θ_i.

4ª Questão Ocorreu um acidente no prédio em que um colega de sua turma mora e 1/3 de uma seção transversal duplamente simétrica foi perdida. A figura seguinte apresenta duas curvas de interação para a seção íntegra (curva externa) e para a seção degradada (curva interna). Sabendo que a estrutura ainda não caiu, quais as suas recomendações para lidar com este problema? Qual a urgência do assunto?



5ª Questão A figura seguinte mostra algumas curvas de interação para a Flexão Oblíqua Composta feitas para uma seção transversal com uma camada de barras submetida a seis valores de força normal (lembrar que a compressão é positiva por convenção).



Pede-se:

a) Descreva como cada uma destas curvas pode ser construída numericamente.

b) Se a área de armadura de uma seção foi dimensionada para um terno (N_d, M_{dx}, M_{dy}), ela resistirá a ternos em que alguns destes esforços sejam zero, ou seja, a seção resiste a $(0, M_{dx}, M_{dy})$, $(N_d, 0, M_{dy})$, $(N_d, M_{dx}, 0)$, $(0, 0, M_{dy})$, $(0, M_{dx}, 0)$, $(N_d, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$?

c) Qual parece ser a convenção de momentos fletores utilizada?

6ª Questão Utilizando como ferramenta de raciocínio o processo de verificação da estabilidade do "Pilar Padrão", faça um esboço justificado de três trajetórias de equilíbrio para pilares idênticos, com exceção de seus comprimentos.

7ª Questão Escreva a equação cinemática para a "nova" Flexão Oblíqua Composta considerando que a seção transversal esteja definida no plano $x - y$, com origem no CG bruto de A_c, que tem deformação ε_o, e com curvaturas k_x e k_y consistentes com a regra da "mão direita".

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Valor	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	1,0	1,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

$/F_M N/$SWP3.5

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \tag{1}$$

Alguns adimensionais

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd}\,A_c\,h} \qquad \omega = \frac{A_s\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad \omega_i = \frac{A_{si}\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \qquad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \eta_a = \eta\,\frac{a}{h} \qquad \beta_x = \frac{x}{h} \qquad \beta_i = \frac{d_i}{h} \qquad \delta = \frac{d'}{h} \qquad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \qquad \theta = hk = 1000\,\frac{h}{R}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\alpha_i \tag{2}$$

$$\nu\,\beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\beta_i\,\alpha_i \tag{3}$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR - ELU)

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\ \dfrac{5\,\beta_x^2\ (3\,\beta_1 - 8\,\beta_x)}{3\ (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{16\,\beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{17\,\beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \dfrac{125 - 882\,\beta_x + 1029\,\beta_x^2}{21\ (7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases} \tag{4}$$

$$\eta_a = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\ \dfrac{5\,\beta_x^3\ (4\,\beta_1 - 9\,\beta_x)}{12\ (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{171\,\beta_x^2 - 22\,\beta_x\,\beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{33\,\beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \dfrac{(5 - 49\,\beta_x)\,(37 - 49\,\beta_x)}{98\ (7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases} \tag{5}$$

$/F_M N/$SWP3.5

Equações de equilíbrio (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma\,(\varepsilon)\, dx\, dy = N_c + N_s \tag{6}$$

$$M_r = \iint \sigma\,(\varepsilon)\ y\, dx\, dy = M_c + M_s \tag{7}$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k\, y \tag{8}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta\, \beta_i \tag{9}$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) $[\kappa \neq 0]$

$$N_c = \frac{b}{\kappa}\, \Delta I_0 \tag{10}$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2}\ (\Delta I_1 - \varepsilon_o\, \Delta I_0) \tag{11}$$

onde

$$\Delta I_n = I_n\,(\varepsilon_t) - I_n\,(\varepsilon_b)\,. \tag{12}$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em $^{o}/_{oo}$, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto

$$\overline{R}_c = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{\kappa}\Delta J_0 & \dfrac{b}{\kappa^2}\,(\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \dfrac{b}{\kappa^2}\,(\Delta J_1 - \Delta I_0) & \dfrac{b}{\kappa^3}\,[\Delta J_2 - 2\ (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \tag{13}$$

onde

$$\Delta J_n = J_n\,(\varepsilon_t) - J_n\,(\varepsilon_b) \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

$$J_n\,(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c\,(\varepsilon) \tag{16}$$

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c\,(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\dfrac{\varepsilon\,(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{17}$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n\,(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\,\varepsilon^{n+2}\dfrac{4\,(n+3) - \varepsilon\ (n+2)}{4\,(n+2)\,(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd}\,\dfrac{(n+2)\,(n+3)\ \varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{18}$$

$/F_M N/$SWP3.5

Rotação de eixos

$$\left[\begin{array}{cc} U & V \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} X & Y \end{array}\right] \times \mathbf{R}(\varphi) \text{ onde } \mathbf{R}(\varphi) = \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right] \tag{19}$$

$$\left[\begin{array}{cc} X & Y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} U & V \end{array}\right] \times \mathbf{R}(-\varphi) \tag{20}$$

Cálculo de características de polígonos planos
(Valores com sinais corretos para circuição anti-horária. N: número de vértices.)

$$a_k = X_k\, Y_{k+1} - X_{k+1}\, Y_k \tag{21}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k \tag{22}$$

$$\text{Área } \times X_{cg} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} a_k\ (X_k + X_{k+1}) \tag{23}$$

$$\text{Área } \times Y_{cg} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} a_k\ (Y_k + Y_{k+1}) \tag{24}$$

Equações de equilíbrio (FOC)
(n: número de barras)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \alpha_i \tag{25}$$

$$\mu_x = \eta_{ax} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \alpha_i\, \frac{X_{si}}{b} \tag{26}$$

$$\mu_y = \eta_{ay} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \alpha_i\, \frac{Y_{si}}{h} \tag{27}$$

Alguns comentários e resultados numéricos

1ª Questão Como ν está entre 0 e 1 existe a possibilidade de o equilíbrio ser atingido sem armadura. Forçando $\omega = 0$ e resolvendo a equação de forças $\nu = \eta$ obtem-se a linha neutra $\beta_x = +0,2121$. Utilizando esta linha neutra na equação de momentos $\nu/2 - \mu_o = \eta_a$ obtem-se μ_o =+0,0688, indicando que há necessidade (teórica) de armadura.

Iteração 1: $\beta_x = +0,2121$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1662 \tag{28}$$

$$\eta_a = +0,0143 \tag{29}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	$+2,3564$	$+1,0000$
1	$-10,0000$	$-1,0000$

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i \, \alpha_i = +0,0000 \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i \, \alpha_i \, \beta_i = -0,4250 \tag{31}$$

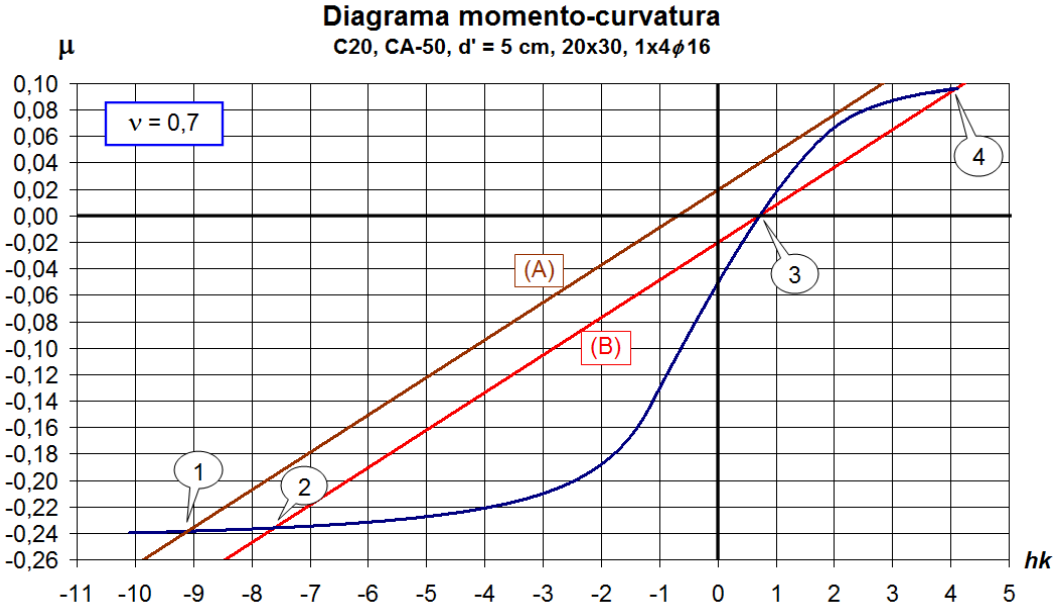
Fornecendo $\nu = +0,1662$ que é, justamente (com maior precisão observa-se uma diferença de +0,0241%), o valor do dimensionamento! Utilizando a equação de momentos com $\mu = +0,1212$ pode-se calcular a taxa mecânica de armadura que é $\omega = +0,1233$ ($A_s = +3,1005$ cm^2 e $\rho = +0,5167\%$).

Considerando barras de 10 mm de diâmetro vê-se que são necessárias 3,94 barras, ou seja, 2 barras em cada camada. Esperava-se, ainda, um esboço da seção **considerando** o posicionamento sem dupla simetria destas barras.

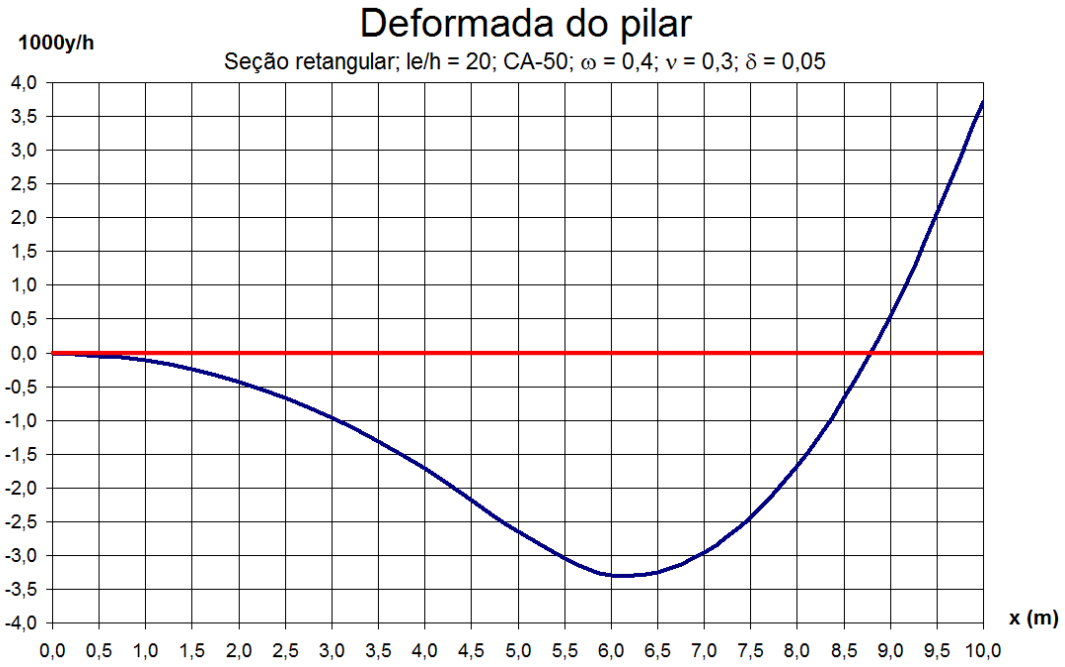
2ª Questão Utilizando o modelo do pilar padrão obtem-se uma reta de momentos externos com coeficiente angular 0,02837. O coeficiente linear depende do momento de primeira ordem e na figura seguinte são mostradas as retas para $\mu = 0,02$ (reta A) e para $\mu = -0,02$ (reta B).

a) Para a reta A observa-se que não há equilíbrio estável. O ponto (aparente) de equilíbrio 1 é instável e, por conta da falta de dupla simetria da armadura, nunca seria alcançado, fosse o pilar construído e os carregamentos aplicados na posição indeformada (compare os momentos interno, resistente, e externo, aplicado). Não há, assim, como calcular a flecha máxima do pilar.

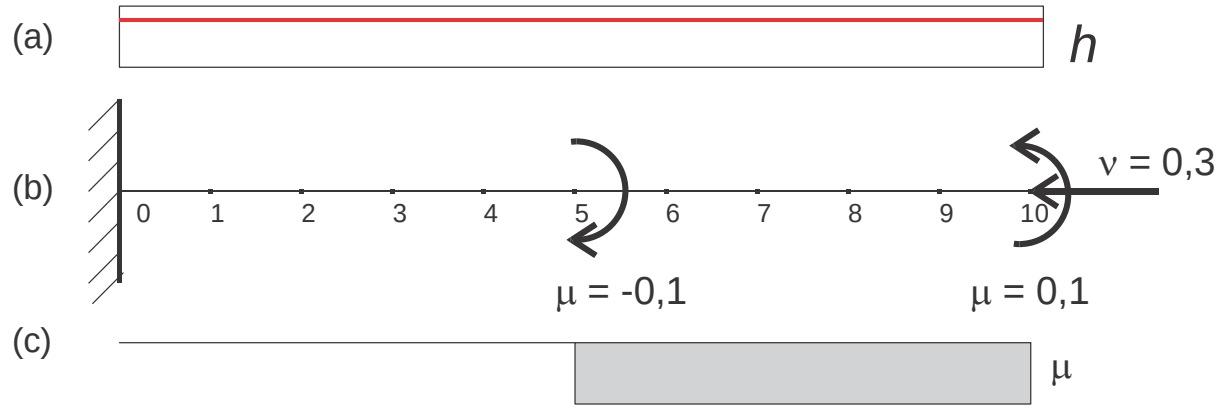
b) Para a reta B observa-se que os pontos de equilíbrio e 3 e 4 são viáveis (o ponto aparente de equilíbrio 2 não é viável pela mesma argumentação anterior). O ponto 3 é estável e o 4 não. O ponto 3 tem abscissa $hk = 0,7264$ e utilizando a expressão do Pilar Padrão ($1/R = 0,002421$ m^{-1}) obtem-se a flecha máxima do pilar $f = 8,8$ mm ($100f/h = 2,933$).



3ª Questão A deformada do pilar é mostrada na figura seguinte, supondo o eixo do pilar horizontal.



a) Observando os momentos fletores, mesmo que em formato adimensional, percebe-se que são praticamente nulos até a seção 5 e depois ficam iguais a 0,1 até a seção 9 (o momento da seção 10 não é mostrado na tabela por não ser necessário ao processo das Diferenças Finitas). Confrontando esta informação com a deformada do pilar, parece ser uma suposição adequada a aplicação de duas cargas momentos, iguais e em sentidos opostos. Como é sabido, a aplicação de uma carga momento gera uma descontinuidade do diagrama de momentos fletores e não está informado, na questão, se o momento da seção i é "à esquerda" ou "à direita" da seção. Supondo que o momento fletor apresentado seja à esquerda, um esquema consistente de carregamentos é apresentado a seguir (note o sentido dos momentos), onde (a) é um esquema do pilar, mostrando o posicionamento da armadura; (b) é um esboço das cargas (adimensionais) e (c) é o diagrama de momentos fletores (adimensionais) citado.



b) O esquema de carregamento permite ver que o momento fletor na seção zero, na posição deformada (supondo uma flecha f) é dado por $\mu_o = \nu\, f/h$. Como $\mu_o = 0,00111$ na tabela apresentada conclui-se que não é a primeira iteração clássica, que começaria com $f = 0$.

Usando este momento na base pode-se calcular a flecha arbitrada para o início da iteração, ou seja, $0,00111 = 0,3\, f/h$ que fornece $1000 f/h \simeq 3,7$. Comparando este valor com o final y_{10} vê-se que há uma diferença de $0,4\%$ que permite concluir, para um cálculo manual e considerando as imprecisões envolvidas nos valores apresentados com poucas casas decimais, que seja a última iteração, ou seja, foi encontrado o equilíbrio do pilar.

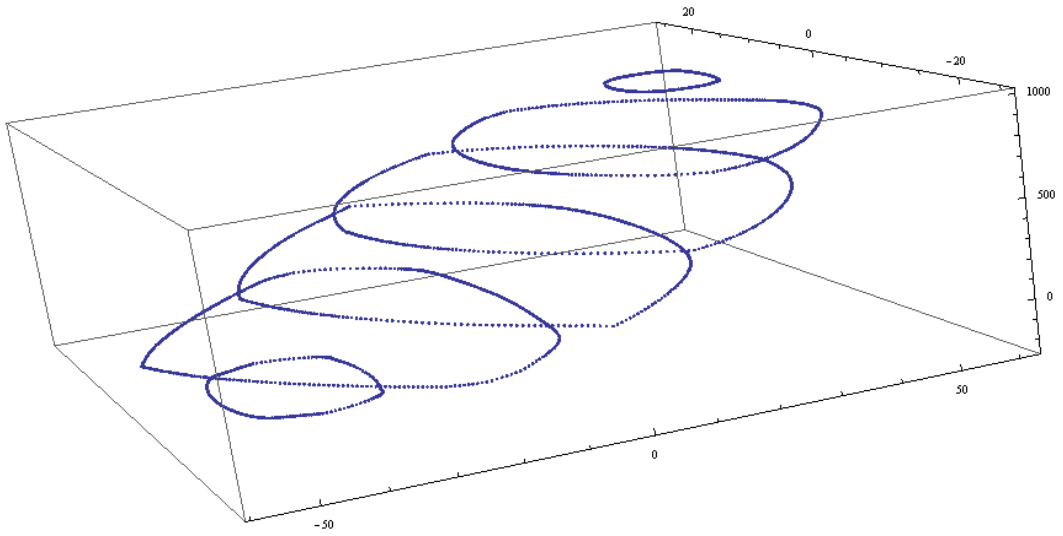
4ª Questão Questão (bastante) discursiva: eram esperadas considerações de como a estrutura ainda não teria entrado em colapso (dimensionamento anti-econômico, diminuição da margem de segurança, esforços atuantes inferiores aos previstos...) e quais consequências poderiam ser enfrentadas por conta do acidente (fluência, corrosão, instabilidade, ruptura com/sem aviso...). Difícil acreditar, entretanto, que alguém pudesse concluir que o caso poderia não ser tratado com a máxima urgência possível.

5ª Questão

a) A obtenção das curvas de interação é assunto amplamente discutido em sala e apresentado na apostila.

A solução seria enriquecida se fosse observado que as curvas apresentadas utilizaram o diagrama parabólico-retangular (PR) e esta discussão não foi abordada com a metodologia clássica de FOC.

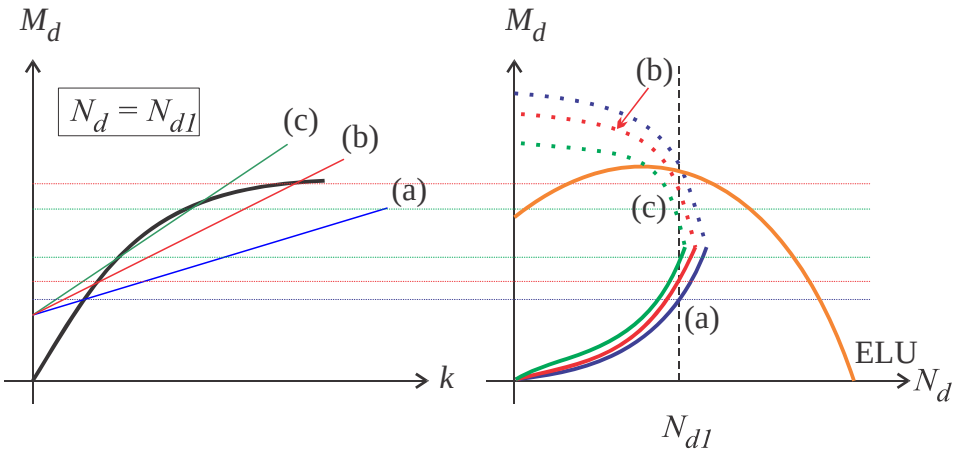
b) A figura seguinte é um esboço, em três dimensões, das várias curvas apresentadas, com o esforço normal na "vertical". A união das várias curvas gera a "superfície" de interação (N_d, M_{dx}, M_{dy}) que, neste caso, tem forte assimetria. Retirar um dos esforços é equivalente a projetar um ponto desta superfície de interação em um dos planos básicos: "horizontal" (M_{dx}, M_{dy}) ou "vertical frontal" (N_d, M_{dx}) ou "vertical lateral" (N_d, M_{dy}). Retirar dois esforços é equivalente a projetar um ponto da superfície em um dos eixos e, por fim, retirar os três esforços é questionar se a origem do sistema é interna à esta superfície. É fácil perceber que, com a devida generalidade e por conta da assimetria, não se pode garantir a segurança da retirada de quaisquer esforços aplicados, ou seja, não há garantias de que a seção resista aos esforços modificados. Naturalmente existem casos particulares em que a retirada de um ou mais esforços seria a favor da segurança mas, genericamente, isto não é verdade.

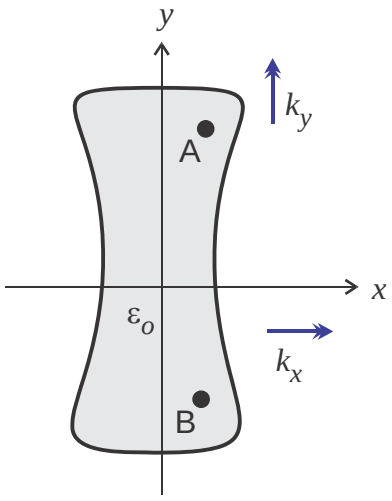


c) Supondo o posicionamento corriqueiro da seção transversal, infere-se que há a simetria vertical tanto do concreto quanto da armadura $(1 \times 4\phi 16)$. Nitidamente as curvas apresentadas têm simetria em relação a M_{dy}, e, assim, estas duas simetrias devem estar relacionadas. Variando o ângulo da linha neutra de 90^o até 180^o serão obtidos esforços resistentes simétricos à variação da linha neutra entre 180^o e 90^o. Este vetor momento M_{dy}, portanto, deve ter a mesma direção do eixo de simetria, ou seja, a direção dos vetores momentos parecem concordar com a dos eixos onde define-se a seção.

Olhando a curva B (sem força normal) vê-se simetria em M_{dy} e muita assimetria em M_{dx}, permitindo concluir que o maior módulo de M_{dx} deve estar tracionando a armadura. Supondo a seção vista da forma convencional pode-se ver que a convenção dos momentos parece estar de acordo com a "regra da mão direita".

6ª Questão Na figura seguinte são esboçadas três retas de momentos aplicados, consistentes com o "Pilar Padrão" e a correspondência entre os pontos de equilíbrio no diagrama Momento-Curvatura ($k \times M_d$) e três trajetórias de equilíbrio no plano $N_d \times M_d$. São supostos três comprimentos de pilar com $L_c > L_b > L_a$. Notar que o diagrama da esquerda é feito para somente um valor de força normal e que isto corresponde a uma reta vertical no diagrama da direita. Observe, ainda, que os ramos instáveis das trajetórias de equilíbrio não coincidem.



7ª Questão Considere que os encurtamentos sejam positivos "entrando" na seção transversal (ou seja, contrários ao eixo z, conforme a "regra da mão direita" indo de x para y). Sob a ação exclusiva de curvaturas k_y positivas, cujo vetor momento está no sentido e na direção do eixo y, pontos da seção com $x > 0$ correspondem à encurtamentos (ponto A), ou seja, aumenta-se a deformação com a soma de $x\,k_y$. Analogamente para a outra curvatura nota-se que o aumento de encurtamentos dá-se com a soma de $-y\,k_x$ já que pontos com $y < 0$ "entram" na seção sob ação exclusiva de k_x positivos. Considerando a deformação ε_o na origem do sistema de coordenadas é fácil ver que a equação cinemática pode ser dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_o + x\,k_y - y\,k_x$$