



2ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Novembro de 2010

Completamente sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todas as conclusões e eventuais resultados obtidos. Esta prova tem oito (8) questões.

(duração máxima: 4 h)

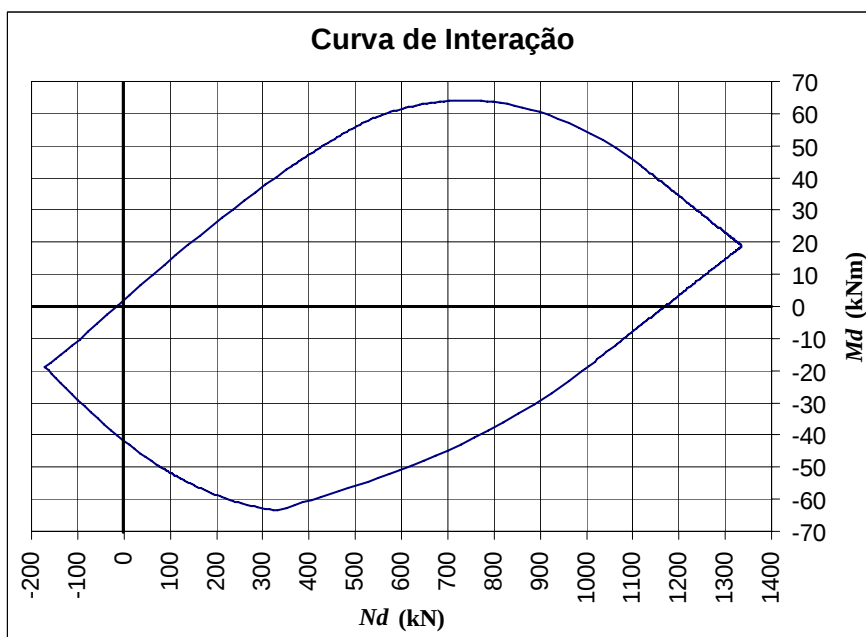
1ª Questão Considerando o Pólo de Ruína -10 aplicado às fibras extremas da seção transversal (e não às barras da armadura), mostre como é a Região Viável do ELU no plano $h k \times \varepsilon_o$ (ou seja, abscissa $h k$ e ordenada ε_o), onde ε_o é a deformação axial, k é a curvatura e h é a altura total da seção transversal.

2ª Questão Explique os passos básicos para o dimensionamento da área de armadura de uma seção transversal de concreto armado submetida a flexão composta **sem** a consideração prévia do ELU no seu equilíbrio.

3ª Questão A figura seguinte apresenta uma curva de interação para uma seção retangular (base $b = 0,20$ m e altura $h = 0,32$ m) de concreto armado. Diga tudo o que sabe sobre a área e o arranjo da armadura (considere barras com 10 mm de diâmetro).

Dados numéricos:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_f = 1,40$.
- Coeficiente de ponderação da resistência do aço $\gamma_s = 1,15$ e módulo $E_s = 210$ GPa.
- Concreto C30, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 30$ MPa e $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ com $\gamma_c = 1,40$).



4ª Questão Utilizando como ferramentas de raciocínio uma curva de interação para a flexão composta (no plano $N_d \times M_d$) e a Região Viável do ELU, faça um esboço de algumas curvas momento-curvatura (no plano $k \times M_d$) para alguns valores distintos de força normal. *Observação:* considere apenas seções e armaduras duplamente simétricas.

5ª Questão É correto afirmar que qualquer curva de interação na flexão composta (no plano $N_d \times M_d$), considerando apenas seções duplamente simétricas, sempre tem um trecho que é perfeitamente parabólico?

6ª Questão Discuta os motivos pelos quais se utiliza o método das secantes, e não o de Newton-Raphson, para o dimensionamento clássico da área de armadura de uma seção transversal de concreto armado sob flexão composta com arranjo monoparamétrico pré-fixado.

7ª Questão Discuta a afirmação: “O dimensionamento clássico da área de armadura, quando se considera armadura assimétrica em duas bordas, é numericamente bastante simples e sempre fornece resultados mais econômicos do que o caso de armadura duplamente simétrica.”

8ª Questão Mostre, no plano $N_d \times M_d$, como é uma trajetória típica representando o equilíbrio de um pilar isostático constante de concreto armado para qualquer caso de flexão composta. Pode-se construir uma peça com equilíbrio **exatamente** na carga crítica?

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor	2,0	2,0	3,0	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0

A nota máxima da prova é dez (10,0)

Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama PR: parabólico-retangular)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

Equações de equilíbrio (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma(\varepsilon) dx dy = N_c + N_s \quad (1)$$

$$M_r = \iint \sigma(\varepsilon) y dx dy = M_c + M_s \quad (2)$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k y \quad (3)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta \beta_i \quad (4)$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) [$\kappa \neq 0$]

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \quad (5)$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0) \quad (6)$$

onde

$$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b) \quad (7)$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em $^{\circ}/_{oo}$, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto

$$\overline{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa} \Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \frac{b}{\kappa^2} (\Delta J_1 - \Delta I_0) & \frac{b}{\kappa^3} [\Delta J_2 - 2 (\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde

$$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b) \quad (9)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (10)$$

$$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (11)$$

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - \varepsilon(n+2)}{4(n+2)(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3) \varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (13)$$

Alguns comentários e resultados:

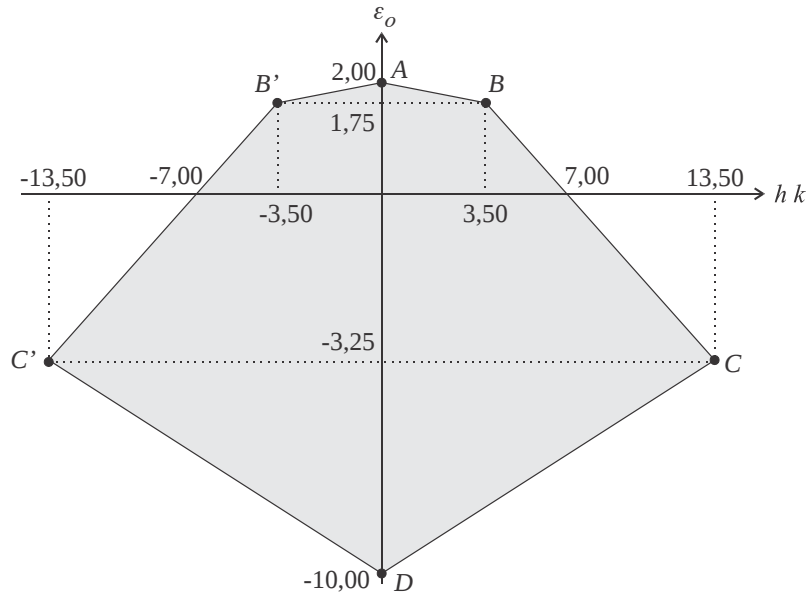
1ª Questão Considerando giros positivos da distribuição de deformação os polos são obedecidos com as imposições:

- $\varepsilon_t \leq 3,5$ ($y = y_t$)
- $\varepsilon_b \geq -10$ critério simplificado ($y = y_b$)
- $\varepsilon_{3h/7} \leq 2$ ($y = y_t - 3h/7$)

A consideração dos polos para giros negativos é análoga:

- $\varepsilon_b \leq 3,5$ ($y = y_b$)
- $\varepsilon_t \geq -10$ critério simplificado ($y = y_t$)
- $\varepsilon_{4h/7} \leq 2$ ($y = y_b + 4h/7$)

A título de ilustração pode-se considerar uma seção duplamente simétrica ($y_t = -y_b = h/2$) e a Região Viável para o ELU é esquematizada na figura seguinte:



Observação: a consideração da simetria dos giros positivos e negativos, neste caso, permite construir só um lado da Região Viável (para $hk > 0$, por exemplo) e usar a simetria do gráfico em relação às ordenadas (ε_o).

2ª Questão Questão amplamente discutida em sala. Esperava-se um comentário sobre o equilíbrio da seção sem a consideração prévia do ELU, o cálculo dos esforços resistentes, o cálculo de verificação com Newton-Raphson (por exemplo) e o dimensionamento ótimo da área de armadura, dentro de intervalos práticos. A resposta seria enriquecida com a consideração de alguns casos distintos de situações de dimensionamento e com uma maior profundidade de detalhes.

3ª Questão A curva de iteração mostrada identifica, claramente, uma seção com arranjo assimétrico no eixo horizontal (deve haver simetria vertical).

Os pontos extremos das curvas são, aproximadamente: A (1335; 19) e B (-170; -19) e são caracterizados pelas linhas neutras ilimitadas, ∞ e $-\infty$, respectivamente, ou seja, tração uniforme com $\varepsilon = -10$ e compressão uniforme com $\varepsilon = 2$.

Observe que em toda esta resolução haverá tolerância aos valores calculados em função da baixa precisão da leitura do gráfico.

Para o ponto A pode-se escrever

$$N_d = A_c \sigma_{cd} + A_s \sigma_s (2^\circ / \sigma_o). \quad (14)$$

Supondo um aço com $\varepsilon_{yd} > 2$ (hipótese ainda a ser confirmada) pode-se calcular a tensão $\sigma_s (2^\circ/oo) = 2 \times 10^{-3} E_s = 420\,000 \text{ kN/m}^2$, o que permite avaliar numericamente a área

$$A_s \simeq 4,03 \text{ cm}^2$$

que é equivalente a 5 barras de 10 mm de diâmetro (de fato 5 ϕ 10 fornecem $A_s = 3,9270 \text{ cm}^2$).

Supondo um aço com $\varepsilon_{yd} < 2$ tem-se o ponto A sendo descrito por $N_d = A_c \sigma_{cd} + A_s f_{yd}$ e, portanto, $A_s f_{yd} \simeq 169 \text{ kN}$. Para o ponto B tem-se

$$N_d = -A_s f_{yd} \quad (15)$$

e esta informação é consistente com a do ponto A e ainda leva à conclusão de que o aço deve ter $\varepsilon_{yd} \simeq 2$ indicando, provavelmente, o aço CA-50. A utilização das 5 ϕ 10 na equação anterior fornece

$$f_{yd} \simeq 433 \text{ MPa}$$

e, portanto, $f_{yk} \simeq 498 \text{ MPa}$ que, definitivamente, é consistente com aço CA-50.

Até o momento, portanto, concluiu-se pela armadura assimétrica, com 5 ϕ 10 de aço CA-50. Para a força normal nula ($N_d = 0$) vê-se que a seção só tem resistência para momentos negativos e isso é consistente com a armadura assimétrica, com mais aço acima do CG da seção. O maior grau de assimetria seria obtido com toda a armadura em uma camada superior, ou seja, $nc = 1$ e $p_1 = 1$ ($d_1 \ll h/2$). Outros arranjos assimétricos de duas camadas (4 ϕ 10 na parte de cima e 1 ϕ 10 na parte de baixo ou 3 ϕ 10 na parte de cima e 2 ϕ 10 na parte de baixo) provavelmente não terão tanta diferença de capacidade resistente aos momentos fletores positivos e negativos.

Será feita a hipótese de única camada superior. As ordenadas dos pontos A e B também podem ser utilizadas para avaliar, numericamente, o posicionamento da camada de barras. A equação genérica de momentos pode ser colocada na forma

$$M_d = N_d \frac{h}{2} - R_{cc} a - A_{s1} \sigma_{s1} d_1$$

que, aplicada ao ponto B, leva a

$$-19 = -170 \frac{0,32}{2} - 0 - 3,9270 \times 10^{-4} (-434,7826 \times 10^{-3}) d_1$$

que fornece $d_1 \simeq 0,048 \text{ m} \simeq 0,05 \text{ m}$. Também pode-se utilizar a ordenada do ponto A e confirmar o valor de $d_1 \simeq 5 \text{ cm}$.

A título de confirmação final pode-se fazer a verificação da seção transversal sob flexão simples ($N_d = 0$) obtendo-se os valores apresentados na tabela seguinte (onde $\beta_x (*)$ é sempre marcado a partir da fibra mais comprimida).

Arranjo	A _s superior	A _s inferior	M _d (kNm)	$\beta_x (*)$
1	5 ϕ 10	—	—42	0,1831
2	4 ϕ 10	1 ϕ 10	—34	0,1432
3	3 ϕ 10	2 ϕ 10	—25	0,0708

Os valores da tabela anterior confirmam todos as descobertas feitas sobre o arranjo de armadura, ou seja,

- Aço CA-50
- Uma única camada de barras ($nc = 1$ e $p_1 = 1$) posicionada a 5 cm da borda superior ($d_1 = 5 \text{ cm}$)
- Camada com 5 ϕ 10

4ª Questão A consideração cuidadosa da curva de interação (esboço!) permite concluir que a ordenada última de uma curva momento-curvatura (que corresponde ao ELU) pode aumentar ou diminuir (ou ambos) quando se consideram aumentos de força normal.

A mesma consideração cuidadosa (esboço!) da Região Viável do ELU (por exemplo no formato da 2ª Questão) permite concluir que a abscissa última de uma curva momento-curvatura (que corresponde ao ELU) pode aumentar ou diminuir (ou ambos) quando se consideram aumentos de força normal.

Esperava-se um esboço de algumas curvas para várias forças normais, no mesmo gráfico, mostrando estas variações possíveis dos últimos pontos da curva e eventuais “cruzamentos” entre as curvas.

5ª Questão A equação de forças da FNC implica, para uma seção e armadura conhecida, uma relação entre força normal resistida (ν) e profundidade de linha neutra (β_x). Quando o somatório $\sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$ é nulo esta relação pode ser, em alguns casos, linear (diagrama RS ou PR nos Domínios 2b, 3, 4 e 4a). Se o somatório anterior se anula por conta do escoamento simultâneo (em tração e compressão) das várias camadas e a função η_a é quadrática em β_x (mesmos casos anteriores), tem-se uma relação parabólica entre o momento e a normal resistente, válida enquanto as hipóteses anteriores valerem.

Para casos mais gerais a análise é por demasiado complexa para se estabelecer a relação $\nu(\beta_x)$ e, consequentemente, $\mu(\nu)$, havendo a tendência de não ser parabólica já que a relação geral entre a deformação e a profundidade da linha neutra é hiperbólica.

6ª Questão Os motivos pelos quais se utiliza o método das secantes foram discutidos em sala. O método de N-R exige a avaliação da derivada da função a ser resolvida, por exemplo,

$$f(\beta_x) = \nu - \frac{\mu - \eta \kappa + \eta_a}{\beta_{cg} - \kappa} = 0.$$

A avaliação desta derivada $df/d\beta_x$ implica na derivação das funções definidas por partes (R_{cc} e somatórios) que, fatalmente, trarão descontinuidade para a fórmula de recorrência de N-R, inviabilizando seu uso. Lembrar que a derivada da função “aponta” para o zero da função e, havendo descontinuidade desta derivada, há enorme probabilidade de o método de N-R não funcionar. Veja, a título de ilustração, a descontinuidade existente entre os Domínios só para a derivada da função $d\eta/d\beta_x$.

7ª Questão O dimensionamento pode ser considerado mais “simples” pelo fato de não haver necessidade de iterações numéricas nos casos das Zonas A, C e E, onde normalmente é arbitrada a profundidade da linha neutra e resolve-se um sistema linear de duas equações a duas incógnitas. Nas Zonas B e D, entretanto, o dimensionamento pode ser iterativo, dependendo das funções η e η_a (em casos mais simples a equação a ser resolvida pode ser de segundo grau eliminando por completo a necessidade de cálculo iterativo).

A regra geral é que imposições no arranjo de armadura causam maior desperdício de armadura e, portanto, menor economia. Seria natural, sim, esperar que dimensionamentos com armadura duplamente simétrica fossem antieconômicos quando comparados aos com arranjo assimétrico em duas bordas.

Observação: ainda que a informação de que as linhas neutras escolhidas nas Zonas A, C e E não garantem o dimensionamento econômico da armadura assimétrica fosse verdadeira, ela não é argumento conclusivo para a comparação do dimensionamento realizado com armadura duplamente simétrica.

8ª Questão Assunto amplamente discutido em sala. A questão seria enriquecida se a trajetória de compressão uniforme fosse, também, esboçada.