$3^{\underline{a}}$ Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I
Prof. Flávio Mendes Neto
Novembro de 2009
Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.
Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.
(duração máxima: 2 h 50 min)

Considere os seguintes dados somente para a questão numérica:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_f = 1,40$.
- Aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C20, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 20$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85\, f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).
- Seção retangular com base $b = 20$ cm e altura total $h = 40$ cm.
- Armadura com três camadas de barras duplamente simétricas com $\delta = 0,1$ e $p_1 = p_3 = 3/8$ e $p_2 = 1/4$.
- Se precisar transformar unidades de força, utilize a equivalência de 1 kgf = 10 N.

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão (numérica)}}$ A tabela seguinte apresenta os resultados numéricos de uma iteração, por Diferenças Finitas, para o cálculo da deformada do pilar isostático ($\ell_e/h = 25$) submetido, na extremidade livre, a um esforço normal $\nu = 0,4$ com excentricidade $e = h/4$ (a armadura total da seção transversal é de $8\phi 12,5$).

Seção i	μ_i	θ_i	$100\, y_i/h$
0	0,1866	3,2365	0,0000
1	0,1851	3,1904	0,3951
2	0,1804	3,0550	?
3	0,1727	2,8389	3,4889
4	0,1622	2,5556	6,1018
5	?	2,2220	9,3387
6	0,1342	1,8590	13,1180
7	0,1172	1,4919	17,3512
8	0,1000	-	21,9487

Pede-se:
a) Esta é a primeira iteração? Em caso negativo, esta iteração pode ser considerada a última? Justifique.
b) Por que não foi calculada a curvatura da última seção (θ_8)?
c) Calcule os valores de μ_5 e $100\, y_2/h$ com a maior precisão possível.
d) Calcule a distribuição de deformações para a seção $i = 3$.

Observações: As seções estão numeradas do engaste (seção $i = 0$) para a extremidade livre (seção $i = 8$). O momento total (primeira mais segunda ordem) adimensional na seção i é μ_i. A flecha na seção i é dada por y_i e h é a altura da seção transversal. A curvatura majorada adimensional da seção i é dada por θ_i.

$\boxed{2^{\underline{a}}\text{ Questão (teórica)}}$ Utilizando somente as expressões da nFNC fornecidas nesta prova, prove que

$$\eta = \frac{5\,\beta_x^2\,(3\,\beta_1 - 8\,\beta_x)}{3\,(\beta_1 - \beta_x)^2}$$

para uma seção retangular no ELU quando a linha neutra estiver no Domínio 2a (Pólo 10 e concreto com deformação máxima $\varepsilon_c \leq 2$).

Questão	1.a	1.b	1.c	1.d	2
Valor	2,0	1,0	3,0	3,0	3,0

A nota máxima da prova é dez (10,0)

Alguns adimensionais

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd}\,A_c\,h} \qquad \omega = \frac{A_s\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad \omega_i = \frac{A_{si}\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \qquad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \eta_a = \eta\,\frac{a}{h} \qquad \beta_x = \frac{x}{h} \qquad \beta_i = \frac{d_i}{h} \qquad \delta = \frac{d'}{h} \qquad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \qquad \theta = 1000\,\frac{h}{R}$$

Diferenças Finitas

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \tag{1}$$

Equações de equilíbrio (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma\left(\varepsilon\right) dx\,dy = N_c + N_s \tag{2}$$

$$M_r = \iint \sigma\left(\varepsilon\right)\ y\,dx\,dy = M_c + M_s \tag{3}$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k\,y \tag{4}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta\,\beta_i \tag{5}$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) $[\kappa \neq 0]$

$$N_c = \frac{b}{\kappa}\,\Delta I_0 \tag{6}$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2}\ \left(\Delta I_1 - \varepsilon_o\,\Delta I_0\right) \tag{7}$$

onde

$$\Delta I_n = I_n\left(\varepsilon_t\right) - I_n\left(\varepsilon_b\right). \tag{8}$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em ${}^o/_{oo}$, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto

$$\overline{R}_c = \begin{bmatrix} \frac{b}{\kappa}\Delta J_0 & \frac{b}{\kappa^2}\left(\Delta J_1 - \Delta I_0\right) \\ \frac{b}{\kappa^2}\left(\Delta J_1 - \Delta I_0\right) & \frac{b}{\kappa^3}\left[\Delta J_2 - 2\ \left(\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0\right)\right] \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde

$$\Delta J_n = J_n\left(\varepsilon_t\right) - J_n\left(\varepsilon_b\right) \tag{10}$$

(11)

$$J_n\left(\varepsilon\right) = \left(\varepsilon - \varepsilon_o\right)^n \cdot \sigma_c\left(\varepsilon\right) \tag{12}$$

$/F_M N/$SWP3.5

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \dfrac{\varepsilon\,(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{13}$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\, \varepsilon^{n+2} \dfrac{4\,(n+3) - \varepsilon\,(n+2)}{4\,(n+2)\,(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd}\, \dfrac{(n+2)\,(n+3)\,\varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{14}$$

$/F_M N/$SWP3.5

Alguns resultados:

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão (a)}}$ A aplicação clássica das Diferenças Finitas (DF) recomenda começar o processo iterativo com flecha máxima nula. Da estática na seção da base obtem-se

$$100\frac{f}{h} = 21,65$$

que indica que não se iniciou esta iteração com flecha nula e, portanto, parece não ser a 1a iteração.

Comparando a flecha anterior com $100\,y_8/h$ percebe-se que há uma diferença de 1,38% entre as duas (estimativa e cálculo) o que indica que esta não deveria ser a última iteração, dada a baixa precisão.

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão (b)}}$ O processo das DF estima a flecha y_m utilizando a curvatura θ_{m-1}, ou seja, utiliza-se até θ_7 para fazer uma iteração, sendo θ_8 desnecessário. A título de comentário o valor de θ_8 é, de fato, calculado na 1a iteração na seção da base (θ_0).

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão (c)}}$ Da estática na seção 5 obtem-se

$$\mu_5 = 0,1492$$

e utilizando a equação de DF na seção 1 obtem-se

$$100\,\frac{y_2}{h} = 1,5691$$

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão (d)}}$ Processo iterativo. Com a curvatura dada e o ELU percebe-se que $\varepsilon_c \leq 3,2166$. Como a força normal é positiva sabe-se que $\varepsilon_c > 0$. Pode-se efetuar iterações em ε_c (1,6083; 1,7148; 1,6560 e 1,6562) obtendo, para $\varepsilon_c = 1,6562$ os esforços resistentes

$$\begin{aligned} \nu &= 0,4000 \\ \mu &= 0,1727 \end{aligned}$$

que ratificam a solução encontrada. A distribuição de deformações pode ser caracterizada com

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= 1,6562 \\ \varepsilon_b &= -1,1827 \end{aligned}$$

ou com

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= 0,23675 \\ k &= 7,09725\ \mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

e as deformações nas barras são

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s3} &= 1,37231 \\ \varepsilon_{s2} &= 0,23675 \\ \varepsilon_{s1} &= -0,89881. \end{aligned}$$

Ainda convém observar que esta distribuição de deformações não ultrapassa o ELU, como seria de se esperar.

$\boxed{2^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Sabendo que o Polo é o 10 e que $0 \leq \varepsilon_c \leq 2$ é fácil ver que

$$k = \frac{1}{h}\frac{10}{\beta_1 - \beta_x}$$

e que

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{10\,\beta_x}{\beta_1 - \beta_x} \\ \varepsilon_b &< 0. \end{aligned}$$

Assim prova-se, com facilidade, que a expressão de N_c fornecida na folha de questões se transforma na expressão do enunciado.