Exame final de EDI-38 Concreto Estrutural I
Prof. Flávio Mendes Neto
Novembro de 2008
Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.
Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.
Esta prova tem 3 páginas e 5 questões.
(duração máxima: 4 h)

Considere os seguintes dados **somente** nas questões numéricas:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_f = 1,40$.
- Aço fictício CA-45 ($f_{yk} = 450$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto fictício C32, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 32$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85\, f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).
- Seção retangular com base $b = 15$ cm e altura total $h = 60$ cm.
- Armadura com duas camadas de barras, $\delta = 0,08$.
- Se precisar transformar unidades de força, use a equivalência de 1 kgf = 10 N.

$\boxed{\text{1}^{\underline{a}} \text{ Questão (teórica)}}$ Explicar, detalhadamente, como determinar o comprimento máximo (L) de um pilar com seção transversal conhecida, considerando sua estabilidade, pelo processo do Pilar Padrão (Coluna Modelo). Lembrar que a hipótese principal do Pilar Padrão é de que a flecha máxima (f) do pilar engastado-livre seja proporcional à curvatura na base engastada ($1/r$), ou seja,

$$f = \Psi\, L\, \frac{1}{r}.$$

Considerar, ainda, que o diagrama momento-normal-curvatura seja completamente conhecido, assim como a distribuição de esforços de primeira ordem no pilar.

$\boxed{\text{2}^{\underline{a}} \text{ Questão (teórica)}}$ Explique, o mais detalhadamente possível, como calcular a deformada de um pilar isostático com o processo das Diferenças Finitas. Seria possível obter a deformada de estruturas hiperestáticas com o mesmo processo?

$\boxed{\text{3}^{\underline{a}} \text{ Questão (teórica)}}$ Observando-se que há um eixo qualquer de simetria em um diagrama de interação para a Flexão Oblíqua Composta (com ângulo ξ, no sentido trigonométrico, com a horizontal), o que se pode dizer sobre a existência, ou não, de um eixo de simetria da seção transversal? Em caso positivo, existe alguma relação entre as direções destes dois supostos eixos de simetria? Ainda, o eventual eixo de simetria da seção transversal deve ser do concreto, da armadura ou de ambos?

$\boxed{\text{4}^{\underline{a}} \text{ Questão (numérica)}}$ Considere que a seção transversal esteja submetida aos esforços $\nu = 1,0248$ e $\mu = 0,0340$. Calcule quantas barras $\phi 20$ (barras com diâmetro de 20 mm) são necessárias quando (compare os dois resultados e FAÇA UM ESBOÇO das seções transversais):
(a) Arranjo de armadura pré-fixado com $p_2 = 0,3$ (camada superior) e $p_1 = 0,70$ (camada inferior).
(b) Arranjo de armadua arbitrário nas duas camadas (ou seja, deixe como incógnitas p_1 e p_2).

$\boxed{\text{5}^{\underline{a}} \text{ Questão (numérica)}}$ Considerando uma taxa mecânica de armadura $\omega = 0,2$ (armadura duplamente simétrica, ou seja, $p_1 = p_2$) e um esforço normal adimensional $\nu = 0,1$, calcule o último ponto da curva momento-normal-curvatura desta seção fornecendo o par (θ, μ).

Questão	1	2	3	4a	4b	5
Valor	1,0	2,5	1,5	2,0	2,0	2,0

Observação: a nota máxima da prova é 10,0 (dez).

$/F_M N/$SWP3.5

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

(1) $$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Alguns adimensionais

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd}\,A_c\,h} \qquad \omega = \frac{A_s\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad \omega_i = \frac{A_{si}\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \qquad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \eta_a = \eta\,\frac{a}{h} \qquad \beta_x = \frac{x}{h} \qquad \beta_i = \frac{d_i}{h} \qquad \delta = \frac{d'}{h} \qquad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \qquad \theta = 1000\,\frac{h}{R}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

(2) $$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\alpha_i$$

(3) $$\nu\,\beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\beta_i\,\alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR - ELU)

(4) $$\eta = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\ \dfrac{5\,\beta_x^2\,(3\,\beta_1 - 8\,\beta_x)}{3\,(\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{16\,\beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{17\,\beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \dfrac{125 - 882\,\beta_x + 1029\,\beta_x^2}{21\,(7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases}$$

(5) $$\eta_a = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\ \dfrac{5\,\beta_x^3\,(4\,\beta_1 - 9\,\beta_x)}{12\,(\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \dfrac{171\,\beta_x^2 - 22\,\beta_x\,\beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \dfrac{33\,\beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \dfrac{(5 - 49\,\beta_x)\,(37 - 49\,\beta_x)}{98\,(7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases}$$

Equações de equilíbrio (nFNC)

(6) $$N_r = \iint \sigma(\varepsilon)\, dx\, dy = N_c + N_s$$

(7) $$M_r = \iint \sigma(\varepsilon)\; y\, dx\, dy = M_c + M_s$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

(8) $$\varepsilon = \varepsilon_o + k\, y$$

(9) $$\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta\, \beta_i$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) $[\kappa \neq 0]$

(10) $$N_c = \frac{b}{\kappa}\, \Delta I_0$$

(11) $$M_c = \frac{b}{\kappa^2}\, (\Delta I_1 - \varepsilon_o\, \Delta I_0)$$

onde

(12) $$\Delta I_n = I_n(\varepsilon_t) - I_n(\varepsilon_b)\,.$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em $^o/_{oo}$, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Matriz de rigidezes do concreto

(13) $$\overline{R}_c = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{\kappa}\Delta J_0 & \dfrac{b}{\kappa^2}\,(\Delta J_1 - \Delta I_0) \\ \dfrac{b}{\kappa^2}\,(\Delta J_1 - \Delta I_0) & \dfrac{b}{\kappa^3}\,[\Delta J_2 - 2\,(\Delta I_1 - \varepsilon_o \Delta I_0)] \end{bmatrix}$$

onde

(14) $$\Delta J_n = J_n(\varepsilon_t) - J_n(\varepsilon_b)$$

(15)

(16) $$J_n(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_o)^n \cdot \sigma_c(\varepsilon)$$

Diagrama parabólico-retangular do concreto

(17) $$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\dfrac{\varepsilon\,(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases}$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

(18) $$I_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\, \varepsilon^{n+2}\dfrac{4\,(n+3) - \varepsilon\,(n+2)}{4\,(n+2)\,(n+3)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd}\, \dfrac{(n+2)\,(n+3)\;\varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases}$$

$/F_M N/$SWP3.5

Alguns comentários e resultados numéricos:

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Como a questão pede uma explicação detalhada, esperava-se que o aluno fornecesse uma expressão para cálculo do comprimento L.

$\boxed{2^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Questão discutida em sala de aula.

$\boxed{3^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Questão discutida em sala de aula.

$\boxed{4^{\underline{a}}\text{ Questão - item (a)}}$ Rapidamente percebe-se que a armadura é necessária (não é Zona O).

Se o encaminhamento da solução for iterativo, há que se lembrar que não há provas de que o esforço normal seja monotonicamente crescente com a profundidade da linha neutra no Domínio 5, ainda mais para uma seção sem dupla simetria. O máximo esforço normal resistente, para $\beta_x \to \infty$, é $\nu = 0,7976$ o que leva à falsa impressão de que o problema não admite solução (já que o esforço pedido é $\nu = 1,0248$), o que entra em conflito com a primeira frase desta resolução. Utilizando os métodos do passo, da bissecção e das secantes consegue-se chegar à resposta abaixo.

Pode-se tentar, também, resolver numericamente sem iterações. Após algumas hipóteses (importante: chegue à esta conclusão você também!) percebe-se que a solução deve estar no Domínio 5, com $\beta_x \geq 1$. A consideração do escoamento das camadas de armadura é simples e se resume, neste domínio, com a camada superior escoando em compressão ($\alpha_2 = 1$) e a camada inferior sem escoar enquanto $\beta_x \leq 7,6213$. Resolvendo, numericamente, a equação de terceiro grau assim obtida observam-se duas raízes complexas e $\beta_x = 1,240364274$, que é a solução do problema. A taxa mecânica de armadura é $\omega = 0,1998$ que fornece $A_s = 8,9287$ cm^2 que fornece 3 barras de 20 mm de diâmetro. O arranjo pré-estabelecido deve ser respeitado de forma que, com esta bitola, o mais razoável pareceria ser uma barra na camada de cima e duas na de baixo, só que isto não é viável na prática. O ideal seria mudar o diâmetro das barras para ajustar melhor a distribuição de armadura.

$\boxed{4^{\underline{a}}\text{ Questão - item (b)}}$ A pesquisa da Zona de Solicitação mostra que o dimensionamento pode ocorrer nas Zonas A, B ou C. O limite entre as Zonas A e B fornece $\mu_{AB} = 0,010416$ indicando que não é Zona A. O limite entre as Zonas B e C (com $\beta_{x,\lim} = 0,6003$) fornece $\mu_{BC} = 0,3479$ permitindo a conclusão de que se trata da Zona B (e, portanto, $\omega_1 = 0$). A linha neutra deve ser calculada e, montando-se a equação de segundo grau (tanto com Pólo 3,5, que seria hipótese errada, quanto com Pólo 2) obtem-se $\beta_x = 1,8602$ (a outra, sem significado físico, foi descartada). Observa-se que a camada superior está escoando e que $\omega_2 = 0,055147$, o que resulta em apenas uma barra (superior) com diâmetro 20 mm. Novamente uma solução inviável na prática.

Esperava-se, ainda, uma comparação (crítica) entre os resultados obtidos nos dois itens.

$\boxed{5^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Deve-se perceber que o último ponto da curva corresponde ao ELU e o ferramental da FNC poderia ser utilizado (de forma muito mais simples, aliás, do que o da nFNC). Verifica-se que o somatório é nulo quando $0,2119 \leq \beta_x \leq 0,6003$ e que, portanto, para valores de esforço normal entre $0,1647 \leq \beta_x \leq 0,4860$. Deve-se resolver, iterativamente, a equação de forças e, utilizando o valor inferior anterior, pode-se fazer na seqüência $\beta_x = 0,1287$ ($\nu = 0,0093$ com 90%$\downarrow$). Utilizando as "secantes" pode-se tentar $\beta_x = 0,1773$ ($\nu = 0,0981$ com 2%$\downarrow$) e, finalmente, $\beta_x = 0,1783$ ($\nu = 0,1000$ com 0,02%$\downarrow$). Facilmente calcula-se o momento fletor $\mu = 0,1273$ e a curvatura $\theta = 13,4825$ (com o cálculo de $\varepsilon_c = 2,4039$).