



2ª Prova de EDI-38 Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes Neto

Outubro de 2008

Sem consulta. A interpretação das questões faz parte da prova.

Justifique cientificamente suas afirmações e comente, criticamente, todos os resultados obtidos.

(duração máxima: 2 h 50 min)

Considere os seguintes dados somente para a questão numérica:

- Coeficiente de ponderação das ações: $\gamma_f = 1,30$.
- Aço fictício CA-47 ($f_{yk} = 470$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto fictício C28, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 28$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,45$).
- Seção retangular com base $b = 20$ cm e altura total $h = 45$ cm.
- Armadura com duas camadas de barras, $\beta_2 = 0,10$ e $\beta_1 = 0,85$.
- Se precisar transformar unidades de força, use a equivalência de $1 \text{ kgf} = 10 \text{ N}$.

1ª Questão (numérica)

Considere a seção transversal dada (admita $p_1 = p_2 = 0,5$) e responda, justificando, aos itens seguintes:

(a) Qual a taxa mecânica de armadura (ω) necessária quando $\nu = -0,03024$ e $\mu = 0,08286$? Faça um esboço da armadura usando $\phi 10$.

(b) Qual o maior momento fletor adimensional (μ) que a seção suporta quando $\nu = 0,1962$ e $\omega = 0,4848$?

2ª Questão (teórica)

Diga se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa e justifique: “O dimensionamento da área de armadura de uma seção duplamente simétrica em compressão ou tração uniforme pode ser feito com o uso das expressões

$$\omega = \nu - 1$$

e

$$\omega = -\nu,$$

respectivamente.”

3ª Questão (teórica)

Explicar, **detalhadamente**, como fazer a verificação da estabilidade de um pilar constante sob flexão normal pelo processo do Pilar Padrão (Coluna Modelo) **sem** utilizar qualquer etapa gráfica. Lembrar que a hipótese principal do Pilar Padrão é de que a flecha máxima (f) do pilar engastado-livre é proporcional à curvatura na base engastada ($1/r$), ou seja,

$$f = \Psi \frac{1}{r}.$$

Questão Extra (teórica)

Como você imagina que seja a armadura de flexão de uma marquise (normalmente entendida como uma laje em balanço)? Como você poderia amenizar a eventual ruína deste tipo de estrutura?

Questão	1.a	1.b	2	3	Extra
Valor	4,0	2,0	2,0	2,0	1,0

A nota máxima da prova é dez (10,0)

Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama PR: parabólico-retangular)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

Alguns resultados numéricos

1ª Questão (numérica)

a) Problema clássico de dimensionamento. A análise do intervalo da linha neutra leva à conclusão de que necessariamente

$$\beta_x \geq -0,08123.$$

A análise de somatório nulo leva à conclusão de que o intervalo de linha neutra para que isso ocorra seja

$$0,2252 \leq \beta_x \leq 0,5462$$

ou, em termos de esforço normal

$$0,1823 \leq \nu \leq 0,4422.$$

Neste item (a) há a necessidade teórica de armadura ($\nu < 0$) e o intervalo onde a solução está é, necessariamente,

$$-0,08123 < \beta_x < 0,2252.$$

Pode-se começar com a média, ou seja, $(-0,08123 + 0,2252) / 2 = 0,071895$ e uma possível sequência de tentativas é mostrada a seguir.

Iteração 1: $\beta_x = +0,07199$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\begin{aligned} (1) \quad & \eta = +0,02817 \\ (2) \quad & \eta_a = +0,00071 \end{aligned}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	-0,36008	-0,18502
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,59251 \\ (4) \quad & \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,43425 \\ (5) \quad & \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,73290 \end{aligned}$$

Equação da reta: $\mu = -0,23290 * \nu + 0,01994$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,27017$

$\nu = -0,27017$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: +793,43301 %

$N_d = -0,39911$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,50352$ $A_s = +18,19983$ cm² $\rho = +2,02220$ %

Iteração 2: $\beta_x = +0,15323$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\begin{aligned} (6) \quad & \eta = +0,10678 \\ (7) \quad & \eta_a = +0,00624 \end{aligned}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+0,76395	+0,39254
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(8) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,30373$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,40537$$

$$(10) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,33465$$

Equação da reta: $\mu = -0,83465 * \nu + 0,13627$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = +0,06399$

$\nu = +0,06399$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: -311,61813 %

$N_d = +0,09453$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,14087$ $A_s = +5,09167$ cm² $\rho = +0,56574$ %

Iteração 3: $\beta_x = +0,09591$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(11) \quad \eta = +0,04806$$

$$(12) \quad \eta_a = +0,00164$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	-0,05424	-0,02787
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(13) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,51393$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,42639$$

$$(15) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,82967$$

Equação da reta: $\mu = -0,32967 * \nu + 0,03824$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,13536$

$\nu = -0,13536$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: +347,61945 %

$N_d = -0,19996$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,35690$ $A_s = +12,90026$ cm² $\rho = +1,43336$ %

Iteração 4: $\beta_x = +0,12614$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(16) \quad \eta = +0,07799$$

$$(17) \quad \eta_a = +0,00361$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+0,36112	+0,18555
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(18) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,40722$$

$$(19) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,41572$$

$$(20) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +1,02087$$

Equação da reta: $\mu = -0,52087 * \nu + 0,07600$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,01317$

$\nu = -0,01317$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: -56,43893 %

$N_d = -0,01946$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,22385$ $A_s = +8,09125$ cm² $\rho = +0,89903$ %

Iteração 5: $\beta_x = +0,12015$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(21) \quad \eta = +0,07176$$

$$(22) \quad \eta_a = +0,00315$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+0,27608	+0,14186
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(23) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,42907$$

$$(24) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,41791$$

$$(25) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,97398$$

Equação da reta: $\mu = -0,47398 * \nu + 0,06675$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,03399$

$\nu = -0,03399$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: +12,39707 %

$N_d = -0,05021$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,24647$ $A_s = +8,90861$ cm² $\rho = +0,98985$ %

Iteração 6: $\beta_x = +0,12123$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(26) \quad \eta = +0,07288$$

$$(27) \quad \eta_a = +0,00323$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+0,29131	+0,14969
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(28) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,42516$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,41752$$

$$(30) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,98203$$

Equação da reta: $\mu = -0,48203 * \nu + 0,06834$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,03012$

$\nu = -0,03012$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: -0,38414 %

$N_d = -0,04450$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,24226$ $A_s = +8,75672$ cm² $\rho = +0,97297$ %

Iteração 7: $\beta_x = +0,12120$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(31) \quad \eta = +0,07284$$

$$(32) \quad \eta_a = +0,00322$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+0,29085	+0,14945
1	-10,00000	-1,00000

Os somatórios ficam

$$(33) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = -0,42528$$

$$(34) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,41753$$

$$(35) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = +0,98178$$

Equação da reta: $\mu = -0,48178 * \nu + 0,06829$

Para $\mu = +0,08286$ tem-se $\nu = -0,03024$

$\nu = -0,03024$ $\mu = +0,08286$

Diferença para o ν desejado: +0,00394 %

$N_d = -0,04467$ MN $M_d = +5,50819$ MN.cm

$\omega = +0,24239$ $A_s = +8,76133$ cm² $\rho = +0,97348$ %

A área de armadura é, portanto, esta última que corresponde a 6 ϕ 10 em cada camada (6 na superior e 6 na inferior), totalizando 12 barras de 10 mm de diâmetro (que tem área unitária de 0,7845 cm²). Esperava-se um esboço da armadura.

Notar que a 2a iteração fez interpolação com o somatório nulo e a 1a iteração. A 3a iteração interpolou entre o somatório nulo e a 2a (a 1a foi desprezada, por ter erro maior). A 4a usou a 3a e a 2a. A 5a usou a 2a e a 4a. A 6a usou a 4a e a 5a e a 7a usou a 5a e a 6a (sempre os dois melhores resultados anteriores).

1ª Questão (numérica)

b) Problema de verificação. Facilmente observa-se que o esforço normal considerado causa a nulidade do somatório por escoamento simultâneo das camadas (a superior em compressão e a inferior em tração). Sendo assim basta resolver a equação de forças

$$\nu = 0,1962 = \eta = \frac{17 \beta_x}{21},$$

ou seja, $\beta_x = 0,2423$. Utilizando agora a equação de momentos obtém-se $\mu = 0,2601$ que é a resposta do problema. É considerado erro quando faz-se a hipótese de que as camadas estejam escoando e não se verifica a validade posteriormente. Também não faz qualquer sentido querer derivar a equação de momentos fletores para obter a profundidade de linha neutra, o sistema de equações tem que ser resolvido.

2ª Questão (teórica) Expressões falsas. O correto seria

$$\omega = \frac{\nu - 1}{\alpha(2)}$$

$$\omega = -\nu,$$

conforme discutido em sala. É importante mostrar a linha neutra e as deformações para cada situação.

3ª Questão (teórica) Discutida em sala de aula.

Questão Extra (teórica) Discutida em sala de aula.