Exame Final de EDI-38
Concreto Estrutural I
Prof. Flávio Mendes Neto
Dezembro de 2006
Sem consulta
(duração máxima: 4 horas)

Esta prova tem 4 páginas e 5 questões (divididas em 9 itens).

Considere os seguintes dados, quando pertinentes:

- Seção retangular (base = 0,30 m × altura = 0,55 m) com duas camadas de barras ($nc = 2$) duplamente simétricas.
- Distância do CG da camada à borda mais próxima $d'/h = \delta = 0,06$.
- Aço CA-32 ($f_{yk} = 320$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C20, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 20$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85\, f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).
- Considere os seguintes diâmetros (em mm) das barras: 10,0 12,5 16,0 20,0 25,0 32,0 40,0

$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Admita que a seção transversal esteja submetida a um esforço normal $\nu = 0,1013$ e a um momento fletor $\mu = 0,1645$. Dimensione a taxa mecânica de armadura total (ω), escolha a bitola e faça um esquema da seção armada.

$\boxed{2^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ O processo do "pilar padrão" (coluna modelo) admite que

$$f = \frac{\ell_e^2}{\pi^2}\,\frac{1}{r} \tag{1}$$

onde f é a flecha máxima de um pilar engastado-livre, ℓ_e é o comprimento efetivo do pilar e $1/r$ é a curvatura da seção do engaste (seção crítica). Pede-se:

a) Conhecidos os esforços aplicados (de primeira ordem), como determinar o maior comprimento possível do pilar?

b) Conhecidos o comprimento e o esforço normal, como determinar o máximo momento fletor de primeira ordem?

c) Como calcular a curva de sensibilidade a imperfeições do pilar?

d) De posse de uma coleção de diagramas momento-normal-curvatura, como dimensionar a área de armadura (constante) do pilar, levando em consideração, naturalmente, a estabilidade?

$\boxed{3^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ A tabela seguinte apresenta os resultados numéricos de uma iteração, por diferenças finitas, para o cálculo da deformada do pilar ($\ell_e/h = 30$) submetido, na extremidade livre, a um esforço normal $\nu = 0,1$ com excentricidade $e = h/2$ (a seção transversal está armada com $4\phi 20$).

Seção	μ_i	θ_i	$100\, y_i/h$
0	0,0608	1,0072	0,0000
1	0,0607	1,0043	0,1133
2	0,0604	0,9958	0,4526
3	0,0598	0,9816	?
4	0,0590	0,9619	1,8001
5	0,0580	0,9369	2,8007
6	0,0568	0,9067	4,0121
7	?	0,8716	5,4276
8	0,0538	0,8320	7,0391
9	0,0520	0,7882	8,8378
10	0,0500	-	10,8139

Pede-se:

a) Esta é a primeira iteração? Em caso negativo, esta iteração pode ser considerada a última? Por quê?

b) Calcule os valores de μ_7 e $100\, y_3/h$ com a máxima precisão possível.

Observações: As seções estão numeradas do engaste (seção $i = 0$) para a extremidade livre (seção $i = 10$). O momento total (primeira mais segunda ordem) adimensional na seção i é μ_i. A flecha na seção i é dada por y_i e h é a altura da seção transversal. A curvatura majorada adimensional da seção i é dada por θ_i.

$\boxed{4^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Calcule a distribuição de deformações da seção transversal número 5 da questão anterior.

$\boxed{5^{\underline{a}}\text{ Questão}}$ Considerando, no plano $\varepsilon_c \times \theta$, a Região Viável para o ELU (conforme figura seguinte), existe alguma sub-região onde as duas camadas escoem em tração (lembrar que a equação cinemática pode ser dada por $\varepsilon_i = \varepsilon_c - \theta\, \beta_i$)? Há uma sub-região onde o concreto não "trabalha"? Há intersecção das sub-regiões anteriores? Em caso afirmativo, há algum interesse particular nesta intersecção?

$/F_M N/$SWP3.5

A expressão de diferenças finitas (com espaçamento de malha $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ constante), para a segunda derivada de uma função, pode ser dada por

(2) $$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = y_i'' \simeq \frac{y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd}\,A_c\,h} \qquad \omega = \frac{A_s\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad \omega_i = \frac{A_{si}\ f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \qquad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \qquad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd}\,A_c} \qquad \eta_a = \eta\,\frac{a}{h} \qquad \beta_x = \frac{x}{h} \qquad \beta_i = \frac{d_i}{h} \qquad \delta = \frac{d'}{h} \qquad \beta_{cg} = \frac{cg}{h} \qquad \theta = 1000\,\frac{h}{R}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

(3) $$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\alpha_i$$

(4) $$\nu\,\beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i\,\beta_i\,\alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama parabólico-retangular - PR)

(5) $$\eta = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\[2ex] \dfrac{5\,\beta_x^2\ (3\,\beta_1 - 8\,\beta_x)}{3\ (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\[2ex] \dfrac{16\,\beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\[2ex] \dfrac{17\,\beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\[2ex] \dfrac{125 - 882\,\beta_x + 1029\,\beta_x^2}{21\ (7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases}$$

(6) $$\eta_a = \begin{cases} 0 & \text{Domínio 1} \\[2ex] \dfrac{5\,\beta_x^3\ (4\,\beta_1 - 9\,\beta_x)}{12\ (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\[2ex] \dfrac{171\,\beta_x^2 - 22\,\beta_x\,\beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\[2ex] \dfrac{33\,\beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\[2ex] \dfrac{(5 - 49\,\beta_x)\,(37 - 49\,\beta_x)}{98\ (7\,\beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{cases}$$

Equações de equilíbrio (nFNC)

$$N_r = \iint \sigma\left(\varepsilon\right) dx\, dy = N_c + N_s \tag{7}$$

$$M_r = \iint \sigma\left(\varepsilon\right)\, y\, dx\, dy = M_c + M_s \tag{8}$$

Equação cinemática (seção transversal no plano $x - y$)

$$\varepsilon = \varepsilon_o + k\, y \tag{9}$$

Esforços resistentes do concreto (seção retangular $b \times h$) $[\kappa \neq 0]$

$$N_c = \frac{b}{\kappa} \Delta I_0 \tag{10}$$

$$M_c = \frac{b}{\kappa^2} \left(\Delta I_1 - \varepsilon_o\, \Delta I_0\right) \tag{11}$$

onde

$$\Delta I_n = I_n\left(\varepsilon_t\right) - I_n\left(\varepsilon_b\right). \tag{12}$$

(ε_t e ε_b são as deformações, em $^o/_{oo}$, da fibra superior e da fibra inferior da seção, respectivamente).

Diagrama parabólico-retangular do concreto

$$\sigma_c\left(\varepsilon\right) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \dfrac{\varepsilon\left(4 - \varepsilon\right)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{13}$$

Integrais do diagrama parabólico-retangular

$$I_n\left(\varepsilon\right) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd}\, \varepsilon^{n+2} \dfrac{4\left(n+3\right) - \varepsilon\,\left(n+2\right)}{4\left(n+2\right)\left(n+3\right)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd}\, \dfrac{\left(n+2\right)\left(n+3\right)\, \varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \tag{14}$$

Questão	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4	5
Valor	3,0	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	2,0	2,0

A nota máxima da prova é 10,0 (dez).

$/F_M N/$SWP3.5

Alguns resultados numéricos

$\boxed{1^{\underline{a}} \text{ Questão}}$ Seção transversal retangular

Diagrama tensão-deformação parabólico-retangular

Base $b = +30{,}0000$ cm
Altura $h = +55{,}0000$ cm
$f_{ck} = +20{,}0000$ MPa
$\sigma_{cd} = +12{,}1429$ MPa

Dimensionamento para: ν =+0,1013 e μ =+0,1645
Aço: $f_{yk} = +320{,}0000$ MPa, Classe='A' $\varepsilon_{yd} = +1{,}3251$ (por mil)
$f_{yd} = +278{,}2609$ MPa, E_s =+210,0000 GPa

Camada i	p_i	β_i
2	+0,5000	+0,0600
1	+0,5000	+0,9400

Para arranjos simétricos:
$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = 0$ quando
$+0,1630 \leq \beta_x \leq +0,6819$
$+0,1112 \leq \nu \leq +0,5520$

Fronteiras entre os domínios e Zona O:

Domínio	β_x	η	$\mu_o = \eta/2 - \eta_a$
1-2	+0,0000	+0,0000	+0,0000
2a-2b	+0,1567	+0,1044	+0,0461
2-3	+0,2437	+0,1973	+0,0786
3-4 (lim)	+0,6819	+0,5520	+0,1194
4-4a	+0,9400	+0,7610	+0,0829
4a-5	+1,0000	+0,8095	+0,0680

Há necessidade teórica de armadura! μ_o =+0,0448 β_x =+0,1537

$\boxed{\text{Iteração 1: } \beta_x = +0,1537}$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1013 \tag{15}$$

$$\eta_a = +0,0058 \tag{16}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+1,1917	+0,8993
1	-10,0000	-1,0000

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = -0,0503 \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i\,\beta_i = -0,4430 \tag{18}$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i\,\alpha_i\,\beta_i}{\sum p_i\,\alpha_i} = +8,8013 \tag{19}$$

Equação da reta: $\mu = -8,3013 * \nu + 0,8856$
Para $\mu = +0,1645$ tem-se $\nu = +0,0869$
$\nu = +0,0869$ $\mu = +0,1645$
Diferença para o ν desejado: -14,2506 %

$N_d = +0,1740\text{MN}$ $M_d = +18,1273\text{MN.cm}$
$\omega = +0,2864$ $A_s = +20,6222$ cm$^2 \rho = +1,2498$ %

$\boxed{\text{Iteração 2: } \beta_x = +0,1792}$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1285 \tag{20}$$

$$\eta_a = +0,0089 \tag{21}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+1,5668	+1,0000
1	-10,0000	-1,0000

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = +0,0000 \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i\,\beta_i = -0,4400 \tag{23}$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i\,\alpha_i\,\beta_i}{\sum p_i\,\alpha_i} = +\infty \tag{24}$$

$\nu = +0,1285$

Fornecendo μ:

$\nu = +0,1285$ $\mu = +0,1645$
Diferença para o ν desejado: +26,8312 %
$N_d = +0,2574\text{MN}$ $M_d = +18,1273\text{MN.cm}$
$\omega = +0,2481$ $A_s = +17,8628$ cm$^2 \rho = +1,0826$ %

$\boxed{\text{Iteração 3: } \beta_x = +0,1625}$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1107 \tag{25}$$

$$\eta_a = +0,0068 \tag{26}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+1,3183	+0,9949
1	-10,0000	-1,0000

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = -0,0025 \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i\,\beta_i = -0,4402 \tag{28}$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i\,\alpha_i\,\beta_i}{\sum p_i\,\alpha_i} = +173,4810 \tag{29}$$

Equação da reta: $\mu = -172,9810 * \nu + 19,1918$

Para $\mu = +0,1645$ tem-se $\nu = +0,1100$

$\nu = +0,1100$ $\mu = +0,1645$

Diferença para o ν desejado: +8,5847 %
$N_d = +0,2204\text{MN}$ $M_d = +18,1273\text{MN.cm}$
$\omega = +0,2642$ $A_s = +19,0247$ cm$^2 \rho = +1,1530$ %

$\boxed{\text{Iteração 4: } \beta_x = +0,1592}$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1071 \tag{30}$$

$$\eta_a = +0,0064 \tag{31}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+1,2705	+0,9588
1	-10,0000	-1,0000

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = -0,0206 \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i\,\beta_i = -0,4412 \tag{33}$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i\,\alpha_i\,\beta_i}{\sum p_i\,\alpha_i} = +21,4318 \tag{34}$$

Equação da reta: $\mu = -20,9318 * \nu + 2,2899$

Para $\mu = +0,1645$ tem-se $\nu = +0,1015$

$\nu = +0,1015$ $\mu = +0,1645$

Diferença para o ν desejado: +0,2376 %

$N_d = +0,2034$MN $M_d = +18,1273$MN.cm

$\omega = +0,2723$ $A_s = +19,6063$ cm^2$\rho = +1,1883$ %

$\boxed{\text{Iteração 5: } \beta_x = +0,1591}$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$\eta = +0,1070 \tag{35}$$

$$\eta_a = +0,0064 \tag{36}$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+1,2690	+0,9577
1	-10,0000	-1,0000

Os somatórios ficam

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i = -0,0211 \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i\,\alpha_i\,\beta_i = -0,4413 \tag{38}$$

$$\kappa = \frac{\sum p_i\,\alpha_i\,\beta_i}{\sum p_i\,\alpha_i} = +20,8810 \tag{39}$$

Equação da reta: $\mu = -20,3810 * \nu + 2,2287$

Para $\mu = +0,1645$ tem-se $\nu = +0,1013$

$\nu = +0,1013$ $\mu = +0,1645$

Diferença para o ν desejado: -0,0193 %

$N_d = +0,2029$MN $M_d = +18,1273$MN.cm

$\omega = +0,2725$ $A_s = +19,6243$ cm^2$\rho = +1,1894$ %

Objetivando exclusivamente a economia de área de armadura há duas opções de bitola equivalentes (armadura total, devendo ser dividida em duas camadas): $16\phi12,5$ e $4\phi25$.

$\boxed{\text{2ª Questão}}$ Questão teórica que deveria ser comentada utilizando-se exclusivamente o processo do pilar padrão.

$\boxed{\text{3ª Questão}}$

a) Não deve ser a primeira iteração pois recomenda-se partir com flecha nula e esta iteração iniciou com $100f/h = 10,8$. A flecha final obtida ($100f/h = 10,8139$) tem uma diferença de $0,13\%$ que, dependendo do cálulo (manual, por exemplo), pode ser considerada satisfatória.

b) A estática leva a $\mu_7 = 0,0553724$. A equação de diferenças finitas ($i = 2$) leva a $100y_3/h = 1,015955$.

$\boxed{\text{4ª Questão}}$ Observando a região viável e que o esforço normal é positivo ($\nu = 0,1$) obtem-se que $0 < \varepsilon_c \leq 2,4015$. Serão feitas iterações com o esforço normal até a convergência (e posterior cálculo do momento fletor), tudo com a teoria da nFNC. Procedendo normalmente ("regra de três" e interpolações lineares):

$\boxed{\text{Iteração 1: } \varepsilon_c = 1,2000}$
ε_t =1,2000 ε_b = 0,2631
ε_o = 0,7316 κ = 0,0170
ε_c = 1,2000 θ = 0,9369
ν = 0,6758 μ = 0,0734

$\boxed{\text{Iteração 2: } \varepsilon_c = 0,1776}$
ε_t =0,1776 ε_b = -0,7593
ε_o = -0,2909 κ = 0,0170
ε_c = 0,1776 θ = 0,9369
ν = -0,0220 μ = 0,0310

$\boxed{\text{Iteração 3: } \varepsilon_c = 0,3564}$
ε_t =0,3564 ε_b = -0,5805
ε_o = -0,1121 κ = 0,0170
ε_c = 0,3564 θ = 0,9369
ν = 0,0490 μ = 0,0476

$\boxed{\text{Iteração 4: } \varepsilon_c = 0,4848}$
ε_t =0,4848 ε_b = -0,4521
ε_o = 0,0164 κ = 0,0170
ε_c = 0,4848 θ = 0,9369
ν = 0,1174 μ = 0,0612

$\boxed{\text{Iteração 5: } \varepsilon_c = 0,4521}$
ε_t =0,4521 ε_b = -0,4848
ε_o = -0,0164 κ = 0,0170
ε_c = 0,4521 θ = 0,9369
ν = 0,0987 μ = 0,0578

$\boxed{\text{Iteração 6: } \varepsilon_c = 0,4544}$
ε_t =0,4544 ε_b = -0,4825
ε_o = -0,0141 κ = 0,0170
ε_c = 0,4544 θ = 0,9369
ν = 0,1000 μ = 0,0580

Que é a distribuição de deformações procurada (e está fora, naturalmente, do ELU):
$\varepsilon_{s2} = 0,3982$
$\varepsilon_{s1} = -0,4263$
$\varepsilon_c/\theta = 0,4850$

$\boxed{5^{\text{a}} \text{ Questão}}$ Ver figura seguinte.