



2ª Prova de EDI-38
Concreto Estrutural I

Prof. Flávio Mendes

Outubro de 2006

Sem consulta

(duração: 2 h)

Considere os seguintes dados numéricos:

- Seção retangular (base = 0,20 m $\times$ altura = 0,50 m) com duas camadas de barras ($nc = 2$).
- Posicionamento simétrico das camadas: $\delta = d'/h = 0,02$.
- Aço CA-25 ($f_{yk} = 250$ MPa; $\gamma_s = 1,15$; $E_s = 210$ GPa).
- Concreto C20, diagrama parabólico-retangular ($f_{ck} = 20$ MPa e lembrar que $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$ e que $\gamma_c = 1,40$).

1ª Questão Considere a seção submetida aos esforços adimensionais $\nu = 0,7663$ e $\mu = 0,1751$. Dimensione a taxa mecânica de armadura (ω) considerando que a armadura seja duplamente simétrica, ou seja, $\omega_1 = \omega_2$. Faça um esboço da armadura considerando $\phi 20$.

2ª Questão Considere a seção submetida aos esforços adimensionais $\nu = 0,3009$ e $\mu = 0,1100$. Dimensione a taxa mecânica de armadura (ω) considerando que não se deseja arbitrar, a priori, a proporção de área de armadura em cada camada, ou seja, considere como incógnitas ω_1 e ω_2 . Considere, ainda, que a profundidade adimensional da linha neutra a ser arbitrada na Zona C seja igual a 0,3 (ou seja, não deve ser arbitrada a profundidade $\beta_{x,\text{lim}}$). Faça um esboço da armadura considerando $\phi 20$.

3ª Questão Considerando, diferentemente das outras questões, o diagrama retangular simplificado (RS)¹, analise, e justifique, se a afirmação seguinte é verdadeira (arranjo de armadura duplamente simétrico):

Quando o somatório $\sum \omega_i \alpha_i$ se anula pelo escoamento simultâneo das camadas das barras, é válido afirmar que o maior momento fletor resistido pela seção é dado por

$$\mu = \frac{1}{8} + \omega \frac{1 - 2\delta}{2}.$$

Questão	1	2	3
Valor	5,0	5,0	1,0

A nota máxima da prova é dez (10,0)

/F_MN/SWP3.5

¹ Lembrar que, neste caso, tem-se $\eta_a = \eta^2/2$.

Adimensionais (FNC)

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} A_c} \quad \mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} A_c h} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad \omega_i = \frac{A_{si} f_{yd}}{A_c \sigma_{cd}} \quad p_i = \frac{A_{si}}{A_s} = \frac{\omega_i}{\omega} \quad \alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{f_{yd}}$$

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{cd} A_c} \quad \eta_a = \eta \frac{a}{h} \quad \beta_x = \frac{x}{h} \quad \beta_i = \frac{d_i}{h} \quad \delta = \frac{d'}{h} \quad \beta_{cg} = \frac{cg}{h}$$

Equações de equilíbrio (FNC)

$$\nu = \eta + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \alpha_i$$

$$\nu \beta_{cg} - \mu = \eta_a + \sum_{i=1}^{nc} \omega_i \beta_i \alpha_i$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama PR: parabólico-retangular)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^2 (3 \beta_1 - 8 \beta_x)}{3 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{16 \beta_x - \beta_1}{15} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{17 \beta_x}{21} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{125 - 882 \beta_x + 1029 \beta_x^2}{21 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Domínio 1} \\ \frac{5 \beta_x^3 (4 \beta_1 - 9 \beta_x)}{12 (\beta_1 - \beta_x)^2} & \text{Domínio 2a} \\ \frac{171 \beta_x^2 - 22 \beta_x \beta_1 + \beta_1^2}{300} & \text{Domínio 2b} \\ \frac{33 \beta_x^2}{98} & \text{Domínios 3, 4 e 4a} \\ \frac{(5 - 49 \beta_x) (37 - 49 \beta_x)}{98 (7 \beta_x - 3)^2} & \text{Domínio 5} \end{array} \right.$$

Funções η e η_a para seção retangular (Diagrama RS: retangular-simplificado)

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \beta_x \leq 0 \\ 0,8 \beta_x & 0 \leq \beta_x \leq 1,25 \\ 1 & \beta_x \geq 1,25 \end{array} \right.$$

$$\eta_a = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \beta_x \leq 0 \\ 0,32 \beta_x^2 & 0 \leq \beta_x \leq 1,25 \\ \frac{1}{2} & \beta_x \geq 1,25 \end{array} \right.$$

Alguns resultados numéricos

1ª Questão

Base $b = +20,0000$ cm

Altura $h = +50,0000$ cm

$f_{ck} = +20,0000$ MPa

$\sigma_{cd} = +12,1429$ MPa

Dimensionamento para: $\nu = +0,7663$ e $\mu = +0,1751$

Aço: $f_{yk} = +250,0000$ MPa, Classe='A' $\varepsilon_{yd} = +1,0352$ (por mil)

$f_{yd} = +217,3913$ MPa, $E_s = +210,0000$ GPa

Camada i	p_i	β_i
2	+0,5000	+0,0200
1	+0,5000	+0,9800

Para arranjos simétricos:

$\sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = 0$ quando

$+0,1101 \leq \beta_x \leq +0,7563$

$+0,0549 \leq \nu \leq +0,6122$

Fronteiras entre os domínios e Zona O:

Domínio	β_x	η	$\mu_o = \eta/2 - \eta_a$
1-2	+0,0000	+0,0000	+0,0000
2a-2b	+0,1633	+0,1089	+0,0478
2-3	+0,2541	+0,2057	+0,0811
3-4 (lim)	+0,7563	+0,6122	+0,1135
4-4a	+0,9800	+0,7933	+0,0733
4a-5	+1,0000	+0,8095	+0,0680

Há necessidade teórica de armadura! $\mu_o = +0,0814$ $\beta_x = +0,9466$

Iteração 1: $\beta_x = +0,9466$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(1) \quad \eta = +0,7663$$

$$(2) \quad \eta_a = +0,3017$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4261	+1,0000
1	-0,1235	-0,1193

Os somatórios ficam

$$(3) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,4404$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,0485$$

$$(5) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,1100$$

Equação da reta: $\mu = +0,6100 * \nu - 0,3861$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,9199$

$\nu = +0,9199$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: +20,0400 %

$N_d = +1,1170$ MN $M_d = +10,6311$ MN.cm

$\omega = +0,3487$ $A_s = +19,4800$ cm² $\rho = +1,9480$ %

Iteração 2: $\beta_x = +0,7885$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(6) \quad \eta = +0,6383$$

$$(7) \quad \eta_a = +0,2094$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4112	+1,0000
1	-0,8500	-0,8211

Os somatórios ficam

$$(8) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,0894$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,3924$$

$$(10) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -4,3870$$

Equação da reta: $\mu = +4,8870 * \nu - 3,0097$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,6517$

$\nu = +0,6517$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: -14,9586 %

$N_d = +0,7913\text{MN}$ $M_d = +10,6311\text{MN.cm}$

$\omega = +0,1494$ $A_s = +8,3458 \text{ cm}^2$ $\rho = +0,8346 \%$

Iteração 3: $\beta_x = +0,8561$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(11) \quad \eta = +0,6930$$

$$(12) \quad \eta_a = +0,2468$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4182	+1,0000
1	-0,5065	-0,4893

Os somatórios ficam

$$(13) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,2553$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,2298$$

$$(15) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,8998$$

Equação da reta: $\mu = +1,3998 * \nu - 0,8704$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,7469$

$\nu = +0,7469$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: -2,5341 %

$N_d = +0,9069\text{MN}$ $M_d = +10,6311\text{MN.cm}$

$\omega = +0,2109$ $A_s = +11,7795 \text{ cm}^2$ $\rho = +1,1780 \%$

Iteração 4: $\beta_x = +0,8699$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(16) \quad \eta = +0,7042$$

$$(17) \quad \eta_a = +0,2548$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4195	+1,0000
1	-0,4430	-0,4279

Os somatórios ficam

$$(18) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,2860$$

$$(19) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,1997$$

$$(20) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,6981$$

Equação da reta: $\mu = +1,1981 * \nu - 0,7464$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,7692$

$\nu = +0,7692$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: $+0,3723 \%$

$N_d = +0,9340\text{MN}$ $M_d = +10,6311\text{MN.cm}$

$\omega = +0,2271$ $A_s = +12,6829 \text{ cm}^2$ $\rho = +1,2683 \%$

Iteração 5: $\beta_x = +0,8681$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(21) \quad \eta = +0,7027$$

$$(22) \quad \eta_a = +0,2538$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4194	+1,0000
1	-0,4512	-0,4358

Os somatórios ficam

$$(23) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,2821$$

$$(24) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,2036$$

$$(25) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,7216$$

Equação da reta: $\mu = +1,2216 * \nu - 0,7609$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,7662$

$\nu = +0,7662$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: $-0,0156 \%$

$N_d = +0,9304\text{MN}$ $M_d = +10,6311\text{MN.cm}$

$\omega = +0,2249$ $A_s = +12,5605 \text{ cm}^2$ $\rho = +1,2560 \%$

Iteração 6: $\beta_x = +0,8682$

A resultante de compressão no concreto e sua posição valem

$$(26) \quad \eta = +0,7028$$

$$(27) \quad \eta_a = +0,2538$$

Camada i	ε_{si}	α_i
2	+3,4194	+1,0000
1	-0,4509	-0,4356

Os somatórios ficam

$$(28) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i = +0,2822$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^2 p_i \alpha_i \beta_i = -0,2034$$

$$(30) \quad \kappa = \frac{\sum p_i \alpha_i \beta_i}{\sum p_i \alpha_i} = -0,7208$$

Equação da reta: $\mu = +1,2208 * \nu - 0,7604$

Para $\mu = +0,1751$ tem-se $\nu = +0,7663$

$\nu = +0,7663$ $\mu = +0,1751$

Diferença para o ν desejado: -0,0027 %

$N_d = +0,9305\text{MN}$ $M_d = +10,6311\text{MN.cm}$

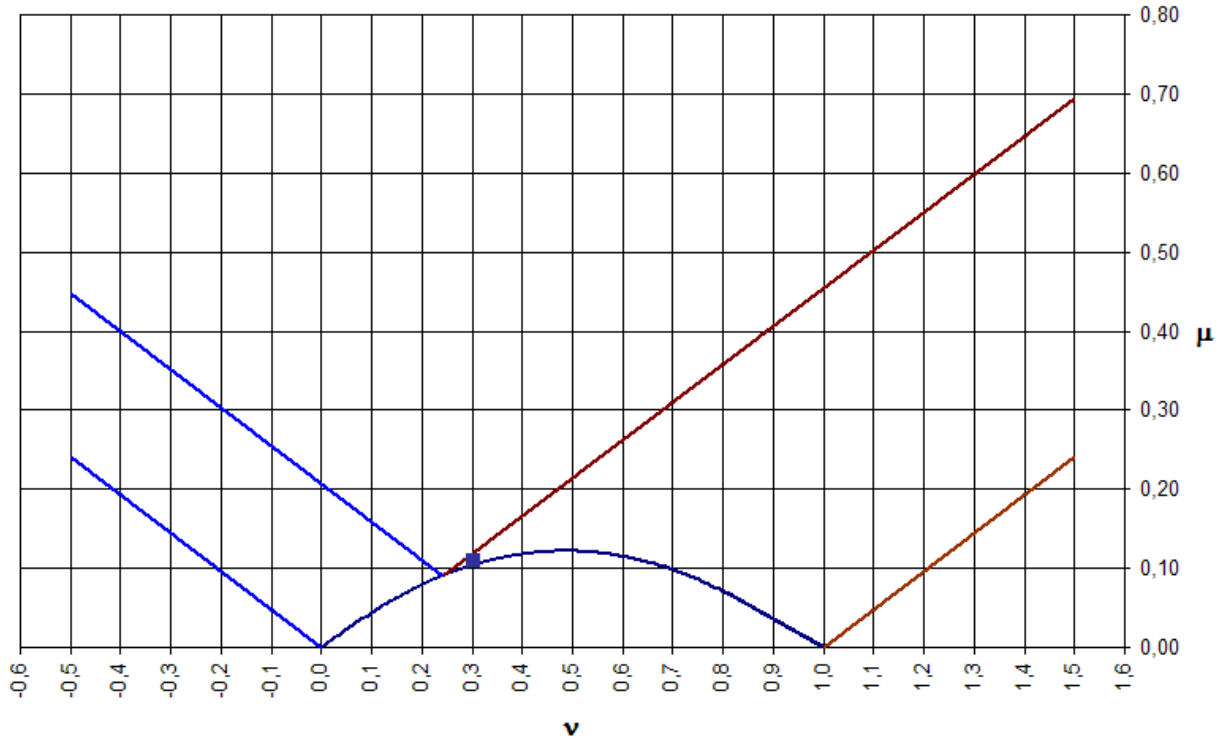
$\omega = +0,2249$ $A_s = +12,5645 \text{ cm}^2$ $\rho = +1,2565 \%$

Resultado final: 2 ϕ 20 em cada camada (2 na superior e 2 na inferior). Este arranjo é meramente didático, há problemas de detalhamento. Críticas neste sentido são bem-vindas na finalização da questão.

Observação: obviamente foram feitas mais iterações do que o estritamente necessário para uma precisão adequada dos resultados.

2ª Questão Lembrar que $0 < \nu < 1$ e, portanto, só poderíamos ter Zonas B, C, D ou O. A análise de Zona O mostra que há a necessidade teórica de armadura ($\mu_o = +0,1039$ $\beta_x = +0,3713$). Como $\nu > \eta$ ($\beta_x = 0,3$) = 0,2429 fica-se com a dúvida entre as zonas B ou C. Calculando a fronteira entre as Zonas B e C obtém-se $\mu_{BC} = 0,1190 > \mu$. O dimensionamento será realizado, portanto, na Zona B ($A_{s1} = 0$ por definição). A figura seguinte ilustra o posicionamento do par de esforços.

Zonas de Solicitação - FNC



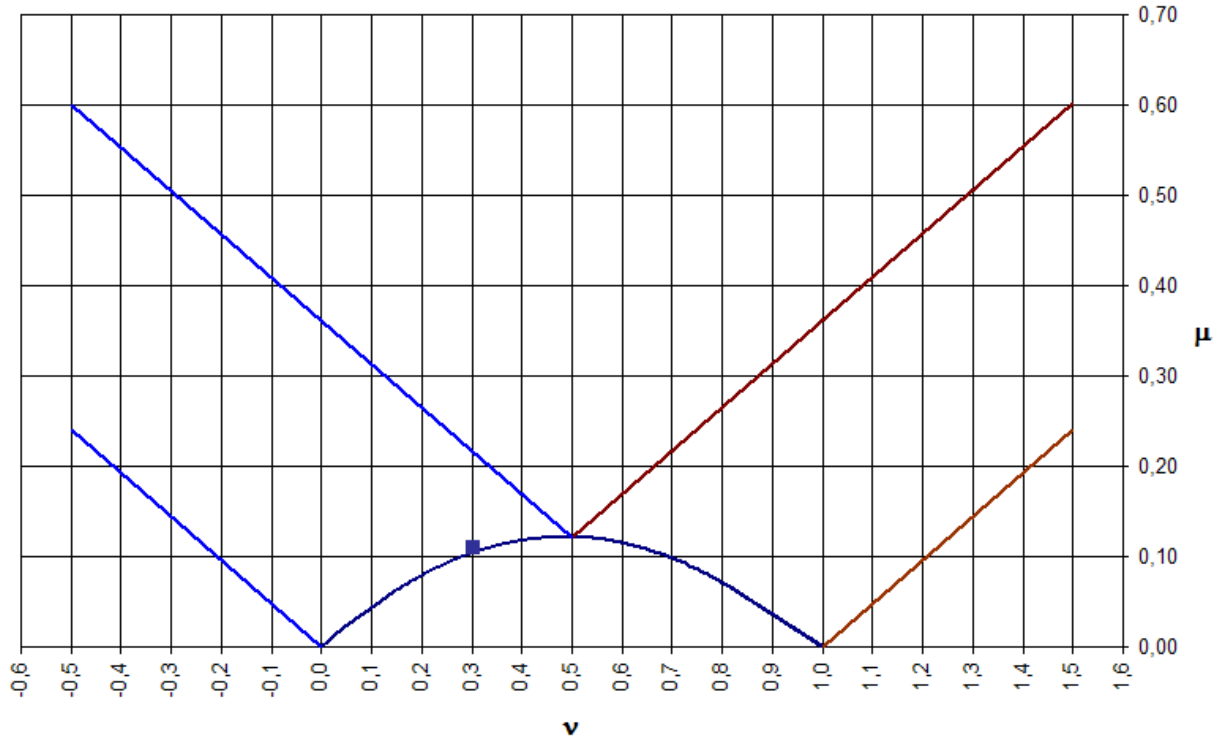
A linha neutra calculada (equação de 2º grau):

$$\beta_x = \begin{cases} -0,29663 \\ 0,34471 \end{cases}$$

O valor positivo é a resposta do problema. A camada superior tem deformação $\varepsilon_{s2} = 3,2969$ e, portanto, $\alpha_2 = 1$. O cálculo da armadura superior resulta em $\omega_2 = 0,02185$. O **resultado final** é $A_{s2} = 1,2204 \text{ cm}^2$, ou seja, 1 ϕ 20. Naturalmente este arranjo também é meramente didático, não sendo possível na prática. Críticas neste sentido são bem-vindas na finalização da questão.

Observação: Notar que o problema não se encontra na Zona D, como seria concluído se a linha neutra arbitrada na Zona C fosse a fronteira entre os Domínios 3 e 4 e não aquele proposto na questão (conforme figura seguinte).

Zonas de Solicitação - FNC



3ª Questão Particularizando para duas camadas, como foi pedido no enunciado, e levando em consideração que as camadas escoam ($-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \nu &= \eta, \\ \mu &= \frac{\nu}{2} (1 - \nu) + \frac{\omega}{2} (1 - 2\delta). \end{aligned}$$

Derivando a segunda equação em relação ao esforço normal e igualando-se a zero obtém-se

$$\frac{d\mu}{d\nu} = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{8} + \frac{\omega}{2} (1 - 2\delta).$$

A expressão está correta desde que $\nu = 0,5$ cause o escoamento simultâneo das camadas de barras, conforme hipótese da questão. Se isto não for verdade o momento máximo será um daqueles calculados com os extremos do intervalo de linha neutra onde o escoamento simultâneo das camadas ocorra.