

## 3º Laboratório de EDI-31

### Objetivos

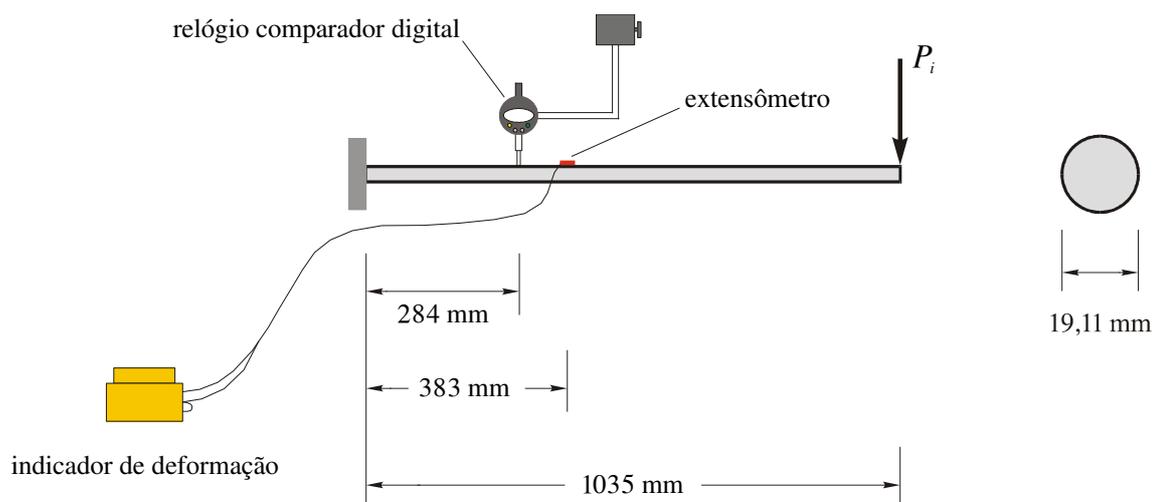
- (a) Conhecer instrumentos para medição de deslocamento, deformação e carga.
- (b) Medir deslocamento, deformação e carga.
- (c) Verificar a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko.
- (d) Verificar o princípio da superposição.
- (e) Medir indiretamente, por meio de um experimento, reações de apoio em estruturas hiperestáticas aplicando o teorema de Betti.

### Equipamentos

- (a) Extensômetro de resistência elétrica (strain gage)  
resistência:  $120 \Omega$   
fator de medição (gage factor): 2,08
- (b) Indicador de deformação
- (c) Relógio comparador digital (ou LVDT)
- (e) Pesos (ou célula de carga)

### Dispositivos

- (a) Viga de alumínio ALCLAD 2024 T3 com uma extremidade engastada e a outra livre.

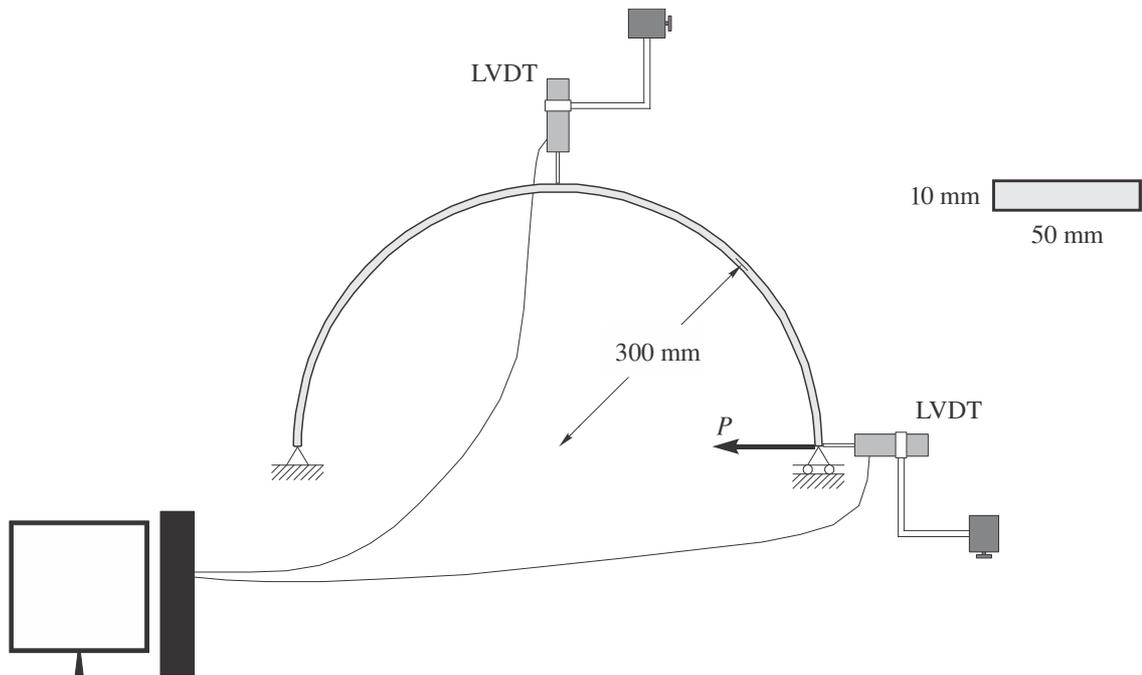


A viga tem seção transversal circular com 19,11 mm (verifique!) de diâmetro, cujo material

apresenta

$$E = 10,5 \times 10^6 \text{ psi} \quad (145 \text{ psi} \approx 1 \text{ MPa}) \quad \nu = 0,3.$$

(b) Arco semicircular de aço simplesmente apoiado.



sistema de aquisição de dados

O arco tem 300 mm (verifique!) de raio e seção transversal retangular 50 mm  $\times$  10 mm (verifique!), cujo material apresenta

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2 \quad G = 77 \text{ kN/mm}^2.$$

## Procedimentos

(a) Viga:

- Aplique as forças

$$P_1 = 310 \text{ gf} \quad P_2 = 334 \text{ gf} \quad P_3 = 310 + 334 = 644 \text{ gf}$$

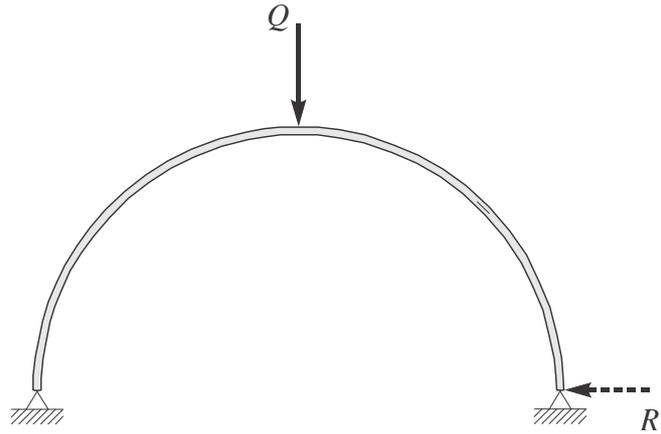
a uma distância de aproximadamente 1035 mm (verifique!) do engaste.

- Meça o deslocamento transversal a uma distância de aproximadamente 284 mm (verifique!) do engaste provocado por cada força.

- Meça a deformação normal, na direção axial, no ponto mais superior da seção transversal a uma distância de aproximadamente 383 mm (verifique!) do engaste provocado por cada força.
- Compare as medições experimentais com os resultados da teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko (Exemplo 2.3 do Capítulo 2 da apostila de EDI-31).
- Verifique o comportamento linear da estrutura por meio do princípio da superposição (os efeitos de diversos carregamentos agindo simultaneamente podem ser obtidos pela superposição dos efeitos de cada um agindo isoladamente).
- Discuta as causas dos possíveis desvios: material mecanicamente bem caracterizado? apoio corretamente idealizado? equipamentos bem aferidos? dificuldades nas medições experimentais? limitação da teoria?

(b) Arco:

- Aplique uma força horizontal  $P = 5 \text{ kgf}$  no apoio livre de se deslocar horizontalmente.
- Meça o deslocamento horizontal no ponto de aplicação da força e no topo do arco.
- Compare as medições experimentais com os resultados da teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko (Problema 5.16 do Capítulo 5 da apostila de EDI-31).
- Suponha que a estrutura seja hiperestática devido ao apoio, onde é aplicado a carga, impedir
- também o movimento horizontal. Use as medições experimentais e o teorema de Betti para determinar a reação de apoio  $R$ , indicada na figura, provocada por uma carga  $Q$  aplicada no topo do arco.



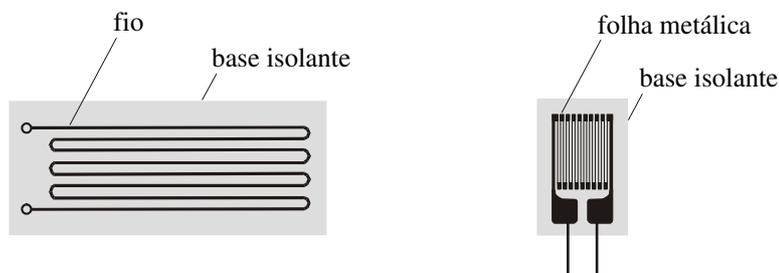
- Compare a expressão de  $R$  com os resultados da teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko (Problema 5.17 do Capítulo 5 da apostila de EDI-31).
- Discuta as causas dos possíveis desvios: material mecanicamente bem caracterizado? apoios corretamente idealizados? equipamentos bem aferidos? dificuldades nas medições experimentais? limitação da teoria?

## Anexo

“Um pouco de extensometria”.

## Um Pouco de Extensometria

Deformações normais na superfície de um sólido podem ser medidas usando um dispositivo conhecido por *extensômetro de resistência elétrica* ou *strain gage*. O dispositivo, como concebido originalmente, consiste de um fio condutor elétrico preso a uma base isolante, como indicado na figura. A base é colada na superfície do sólido, no ponto e direção onde se deseja medir a deformação. Quando o sólido se deforma, o fio do dispositivo também se deforma, variando a sua resistência elétrica. É possível determinar a deformação a partir da variação da resistência elétrica do fio. Hoje o fio é substituído por algo semelhante obtido do corte de uma folha metálica muito fina.



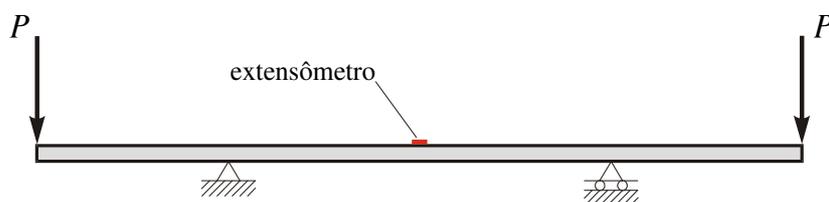
Perceba a preocupação em se reduzir ao máximo as dimensões do extensômetro, dispondo o fio em várias dobras, para aproximar a deformação medida daquela que realmente ocorre no ponto em torno do qual se faz a colagem. O mercado oferece atualmente extensômetros de comprimento que varia desde 100 mm até valores tão pequenos quanto 0,2 mm.

Os fabricantes de extensômetros fornecem uma constante de calibração, conhecida por fator de medição (gage factor)  $S_g$ , para cada lote de extensômetros fabricados. O fator relaciona a variação  $\Delta R_g$  da resistência elétrica  $R_g$  do extensômetro com a deformação normal  $\epsilon_g$  sofrida por meio de

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = S_g \epsilon_g.$$

Ou seja,  $S_g$  é o fator de proporcionalidade entre a variação de resistência e a deformação. Imaginando a expressão acima como sendo a expansão da função  $\Delta R_g(\epsilon_g)$  em série de Taylor, já era de se esperar a ausência do termo constante. É também de se esperar que a presença na expressão de termos não lineares em  $\epsilon_g$  possam ser importantes para deformações, em módulo, acima de um certo valor.

O gage factor é determinado pela montagem de exemplares de extensômetros numa viga de calibração especialmente projetada.



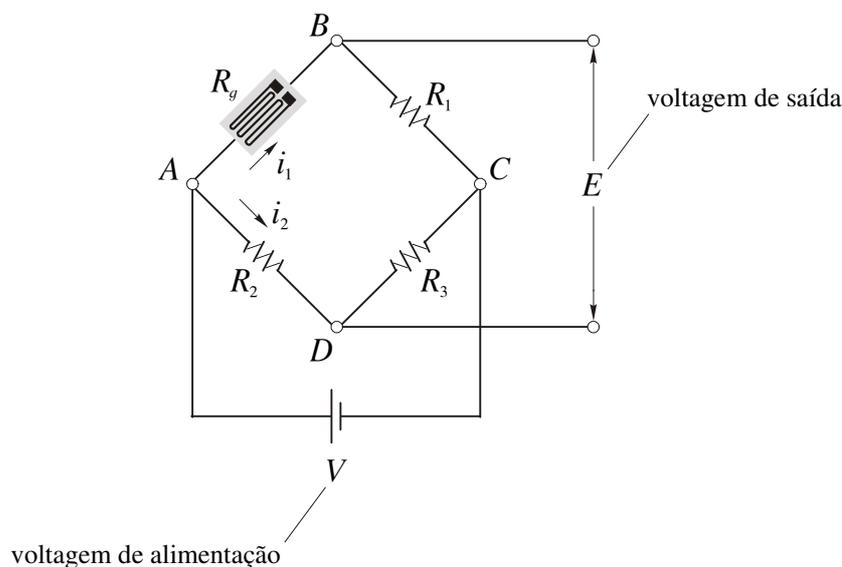
A viga é fletida de maneira a gerar uma deformação normal  $\epsilon_g = \bar{\epsilon}$  predefinida, prevista pela teoria de vigas:

$$\bar{\epsilon} = \bar{y}\kappa = \bar{y} \frac{M}{EI}$$

onde  $\bar{y}$  é a distância entre o centróide da seção transversal ao ponto de colagem do extensômetro. A variação da resistência elétrica é medida e o gage factor é, então, determinado pela equação

$$S_g = \frac{1}{\bar{\epsilon}} \frac{\Delta R_g}{R_g}.$$

A ponte de Wheatstone é o circuito elétrico mais empregado atualmente para se medir a variação  $\Delta R_g$  da resistência elétrica do extensômetro devido à deformação. Considere a ponte a seguir, com voltagem de alimentação  $V$ , voltagem de saída  $E$  e com um dos braços formado pelo extensômetro.



Podemos escrever

$$I_1 = \frac{V}{R_g + R_1} = \frac{V_{AB}}{R_g} \quad \Rightarrow \quad V_{AB} = \frac{R_g}{R_g + R_1} V$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2 + R_3} = \frac{V_{AD}}{R_2} \quad \Rightarrow \quad V_{AD} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} V.$$

A voltagem de saída da ponte é dada por

$$\begin{aligned} E &= V_{DB} = V_{DA} + V_{AB} = V_{AB} - V_{AD} \\ &= \frac{R_g}{R_g + R_1} V - \frac{R_2}{R_2 + R_3} V \quad \Rightarrow \quad E = \frac{R_g R_3 - R_1 R_2}{(R_g + R_1)(R_2 + R_3)} V. \end{aligned}$$

Diz-se que a ponte está em equilíbrio ou balanceada quando a voltagem de saída é nula, ou seja,

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad R_g R_3 = R_1 R_2.$$

O balanceamento é conseguido por meio de um dispositivo que varia a resistência do braço da ponte adjacente ao braço de resistência  $R_g$ , ou seja,  $R_1$  ou  $R_2$ , até que  $R_g R_3 = R_1 R_2$ .

A expansão da função  $E(R_g)$  em série de Taylor, truncada após o termo linear, é dada por

$$E(R_g + \Delta R_g) = E(R_g) + \frac{dE}{dR_g} \Delta R_g$$

ou

$$\Delta E = E(R_g + \Delta R_g) - E(R_g) = \frac{R_3 (R_g + R_1) (R_2 + R_3) - (R_g R_3 - R_1 R_2) (R_2 + R_3)}{(R_g + R_1)^2 (R_2 + R_3)^2} V \Delta R_g.$$

O truncamento é razoável para pequenos valores, em módulo, de  $\Delta R_g$ . Evidências experimentais indicam que o truncamento é aceitável para deformações, em módulo, até a ordem de 5%.

Com a deformação, a resistência elétrica do extensômetro se altera e a ponte inicialmente balanceada, ou seja, com  $E(R_g) = 0$ , perde o equilíbrio. A leitura de saída  $E(R_g + \Delta R_g)$  coincide com a própria variação  $\Delta E$  induzida pela deformação no extensômetro. Da equação acima,

$$\Delta R_g = \frac{(R_g + R_1)^2 (R_2 + R_3)^2}{R_3 (R_g + R_1) (R_2 + R_3) - (R_g R_3 - R_1 R_2) (R_2 + R_3)} \frac{\Delta E}{V}.$$

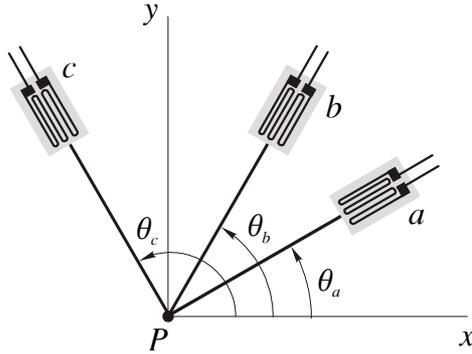
Substituindo a condição  $R_g R_3 - R_1 R_2 = 0$  do equilíbrio,

$$\begin{aligned}
 \Delta R_g &= \frac{(R_g + R_1)(R_2 + R_3)}{R_3} \frac{\Delta E}{V} \\
 &= R_g \left(1 + \frac{R_1}{R_g}\right) \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \frac{\Delta E}{V} \\
 &= R_g \left(1 + \frac{R_1}{R_g}\right) \left(1 + \frac{R_g}{R_1}\right) \frac{\Delta E}{V} \\
 &= R_g \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_g}\right)^2}{\frac{R_1}{R_g}} \frac{\Delta E}{V}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon_g = \frac{1}{S_g} \frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{1}{S_g} \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_g}\right)^2}{\frac{R_1}{R_g}} \frac{\Delta E}{V}.$$

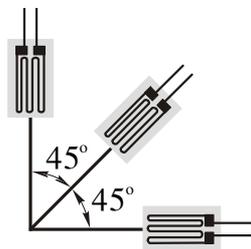
Suponha que o ponto  $P$  na figura esteja na superfície de um sólido e que um sistema cartesiano é escolhido de maneira que o plano  $xy$  seja tangente à superfície no ponto. Se três deformações normais  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_c$  distintas forem medidas no ponto, podemos mostrar que a partir delas qualquer outra deformação, normal ou de cisalhamento, no ponto e contida no plano  $xy$  pode ser determinada.



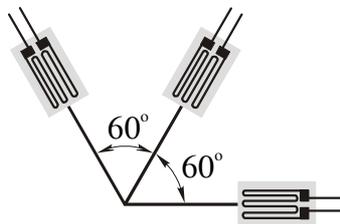
De fato, com as deformações medidas escrevemos

$$\begin{aligned}
 \epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\
 \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\
 \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c
 \end{aligned}$$

para obter o número suficiente de equações para determinar as componentes  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}/2$  do tensor de deformação. O agrupamento dos três extensômetros é chamado de *roseta*. A figura a seguir mostra rosetas de  $45^\circ$  e de  $60^\circ$ .



roseta de  $45^\circ$



roseta de  $60^\circ$