

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Ian Lima Barreto

Flambagem de painéis planos

Trabalho de Graduação

2014

Civil - Aeronáutica

Ian Lima Barreto

Flambagem de painéis planos

Orientador
Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)

Divisão de Engenharia Civil

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Barreto, Ian Lima
Flambagem de painéis planos / Ian Lima Barreto
São José dos Campos, 2014.
50f.

Trabalho de Graduação – Divisão de Engenharia Civil – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.
Orientador: Prof. Francisco Alex Correia Monteiro, MSc

1. Placas retangulares. 2. Placas reforçadas. 3. Flambagem. 4. Método de Ritz. 5. Análise estrutural. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BARRETO, Ian Lima. **Flambagem de painéis planos sob bordas reforçadas**. 2014. 50f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ian Lima Barreto
TÍTULO DO TRABALHO: Flambagem de painéis planos
TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação / 2014

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

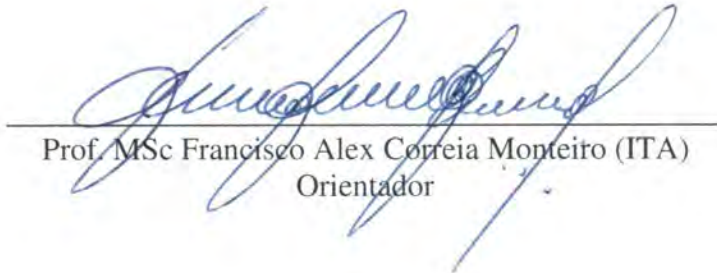
Ian Lima Barreto
Rua Um G, 51 – Parque Tabapuá
Caucaia – CE – Brasil. CEP: 61635-090

FLAMBAGEM DE PAINÉIS PLANOS

Esta publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação



Ian Lima Barreto
Autor



Prof. MSc Francisco Alex Correia Monteiro (ITA)
Orientador



Prof. PhD Eliseu Lucena Neto
Coordenador do Curso de Engenharia Civil-Aeronáutica

São José dos Campos, 20 de novembro de 2014

Resumo

Uma formulação de flambagem de placas é empregada no desenvolvimento de um modelo que considera a influência dos reforços de borda na determinação da carga de flambagem. A placa está sujeita aos carregamentos usuais de membrana. A solução emprega o método de Ritz tendo como base funções de aproximação de natureza hierárquica obtidas dos polinômios de Legendre. Qualquer condição de contorno clássica pode ser simulada por meio de uma seleção adequada das funções de base. Valida-se o procedimento proposto por meio de resultados de modelos de elementos finitos. Uma ferramenta de análise batizada ALS_p (Analysis of Laminated Shells and Plates) é desenvolvida para auxílio na determinação da carga de flambagem para fins de projeto.

Abstract

A formulation for buckling of rectangular plates is presented, where the plate edges can be elastically restrained against rotation by stiffeners. The plate is subjected to usual in-plane loading. The solution is obtained by a Ritz procedure applying hierarchical displacement functions derived from Legendre polynomials. Any classical boundary conditions can be taken into account by a judicious selection of the basis functions. The accuracy of the solution is compared with finite element results. A computer program called ALS_p (Analysis of Laminated Shells and Plates) is developed on the basis of the presented formulation to be used in design routines.

Agradecimentos

Agradeço a Liliane de Negreiros Lima e Paulo Sérgio Barreto da Silva, meus pais, por serem os grandes responsáveis por começo de vida.

Aos meus padrinhos, Dedé e De Jesus, por sempre me acompanharem a vida. Aos meus amigos que moraram comigo no período, Samuel e Diogo, que testaram, de todas as formas possíveis, minha determinação em fazer este TG =].

Ao professor orientador Alex Correia, por toda a ajuda e orientação dadas durante e antes do Trabalho de Graduação e ao relator, Marcelo Bertoni, por acompanhar o progresso do trabalho.

A Iago Lucena, pela ajuda prestada a esse projeto.

Aos professores Nilda e Vertamatti por serem meus conselheiros durante meu período de ITA.

Conteúdo

1	Introdução	9
1.1	Motivação	9
1.2	Revisão Bibliográfica	11
1.3	Objetivos	15
1.4	Contribuições	16
2	Problema de Flambagem	17
2.1	Solução de Ritz	19
2.2	Implementação	25
3	Ferramenta de Análise	29
3.1	Descrição	30
3.2	Exemplo Ilustrativo	36
4	Aplicações Numéricas	39
4.1	Bordas clássicas	40
4.2	Bordas sob reforço	46
5	Conclusões e Comentários Finais	47
	Referências	48

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é fruto do estágio realizado no Laboratório de Modelagem Estrutural (LME) da Divisão de Engenharia Civil (IEI) do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), desenvolvido no contexto do projeto Métodos e Critérios de Análise e Cálculo Estrutural Usando Novas Tecnologias patrocinado pela Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A. (EMBRAER).

Aborda-se aqui a etapa de projeto referente ao desenvolvimento de métodos e ferramentas para a análise de flambagem de painéis planos.

1.1 Motivação

Recentemente, estudos de mercado visando identificar novas tecnologias para manutenção da competitividade global de aeronaves apontam a redução de peso, do ciclo de fabricação, e do custo de manutenção como requisitos para o projeto estrutural.

Nesse contexto, a EMBRAER tem priorizado o desenvolvimento, a curto e médio prazos, da soldagem por fricção (FSW – Friction Stir Welding) e da colagem estrutural como processos âncoras. Ambas resultam em componentes monolíticos em oposição aos componentes convencionais ligados discretamente.

A manutenção da competitividade por meio dessas novas tecnologias demanda estudos diversos, entre os quais se destaca o de elaboração e sistematização de procedimentos de análise e projeto estrutural. A partir da conclusão desses estudos é que será possível decidir, de maneira segura, sobre a incorporação dos novos processos fabris pela empresa. Um estudo importante a ser levado em conta no dimensionamento e na certificação de uma aeronave

é o da estabilidade do equilíbrio de seus painéis. Sabe-se que uma determinação criteriosa da carga crítica de flambagem (flambagem é o nome que se dá ao fenômeno da perda da estabilidade do equilíbrio), bem como da resistência pós-crítica do painel reforçado, são pontos cruciais na busca de sua otimização.

Usualmente, todos os elementos constituintes de um painel reforçado são conectados em pontos discretos por meio de rebites ou prendedores Hi-Lite[®]. Para economia de processo e de material, esse procedimento tende a ser substituído por tecnologias nas quais a natureza das ligações seja monolítica. Além de parecer econômica, a monoliticidade das ligações possibilita que a análise da estabilidade do equilíbrio do painel reforçado seja mais bem avaliada numericamente, por estar menos sujeita a parâmetros oriundos de ensaio. Procedimentos empíricos corriqueiros, como as verificações de flambagem entre rebites se tornam desnecessários.

É de senso comum, atualmente, que o método dos elementos finitos é a ferramenta de análise estrutural por excelência, devido a sua capacidade de simular numericamente domínios complexos, sob condições de contorno e de carregamento também complexos, sem recorrer necessariamente a modelos teóricos simplificados. No que diz respeito à análise de painéis reforçados, é praxe empregar o método dos elementos finitos na determinação da carga crítica de flambagem, bem como na análise do regime pós-crítico. Se o painel é de natureza retangular, é de se esperar que o custo total de confecção do modelo e de processamento computacional faça o método dos elementos finitos uma ferramenta cara face aos métodos analíticos dedicados. Estes últimos ainda têm a vantagem de mostrar mais claramente a sensibilidade do painel reforçado aos parâmetros de análise. Entretanto, as soluções clássicas analíticas encontradas na literatura são restritas a configurações, condições de contorno e carregamentos muito particulares. Além disso, não é raro os resultados analíticos estarem apresentados apenas graficamente, dificultando seu uso no projeto.

Nesse contexto, percebe-se a necessidade de soluções numéricas dedicadas, acompanhada de curvas de projeto e validadas por ensaios computacionais de elementos finitos e experimentais, que tornem a análise de flambagem de painéis reforçados uma tarefa menos onerosa. É de interesse primordial que a solução dedicada seja implementada na forma de uma ferramenta de projeto capaz de auxiliá-lo, principalmente nas suas fases conceitual e preliminar, impactando positivamente nos custos do ciclo de vida-útil do produto.

1.2 Revisão Bibliográfica

Painéis reforçados são os componentes básicos de diversas estruturas: pontes, plataformas oceânicas, navios e aeronaves. São componentes esbeltos, naturalmente sujeitos, portanto, à perda da estabilidade do equilíbrio quando solicitados compressivamente. Devido à sua importância estrutural, a análise da estabilidade é um item relevante no projeto.

Nas aeronaves convencionais, o *painel* é uma fina casca de alumínio que, na asa, se apoia nas longarinas e nervuras e, na fuselagem, se apoia nas cavernas, revestindo-as. A adição de *reforçadores* longitudinais aumenta a sua capacidade portante. O reforçador é geralmente um perfil de alumínio, cuja seção transversal é aberta, composto por elementos de placa ditos enrijecidos (sem borda livre) ou não-enrijecidos (com borda livre). Da união estrutural do painel e de seus reforçadores é que nasce o *painel reforçado*.

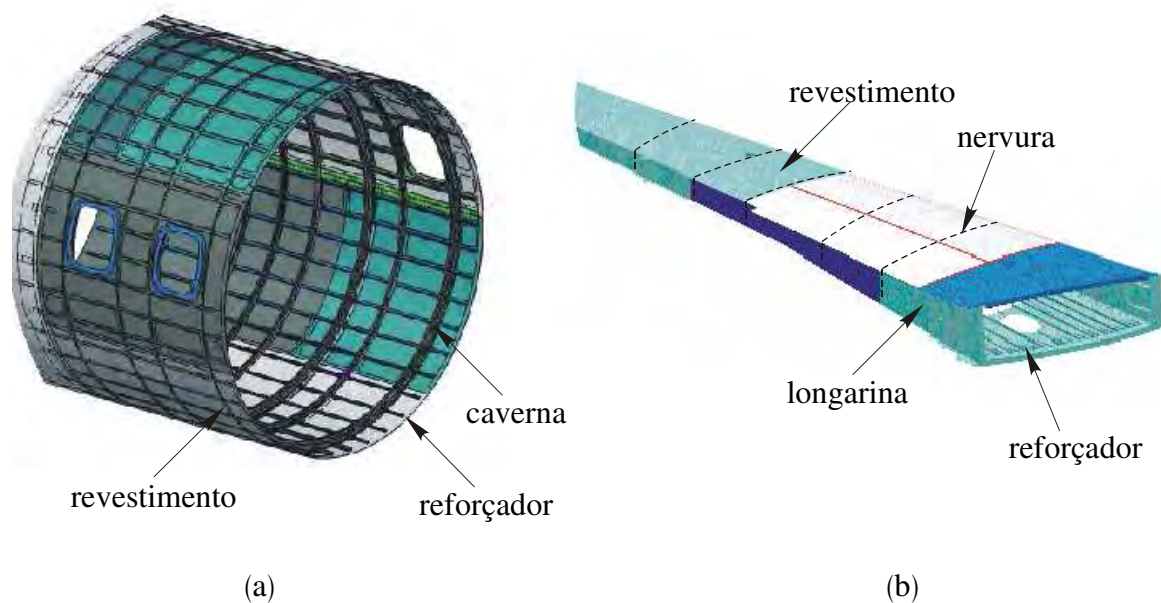


Figura 1.1 Seção típica: (a) fuselagem; (b) asa.

A Figura 1.1 mostra uma seção típica da fuselagem e da asa de uma aeronave. Os componentes estruturais da fuselagem são: cavernas, revestimento e reforçadores. Os componentes estruturais da asa são: longarinas, nervuras, revestimento e reforçadores. Observe que cada uma dessas estruturas (fuselagem e asa) se constitui de uma série de painéis reforçados conectados entre si. Para fins de análise, é geralmente suficiente considerar a seção da fuselagem entre duas cavernas adjacentes e o painel reforçado da asa entre duas longarinas e duas

nervuras adjacentes. A vantagem de se enrijecer um painel é de natureza econômica porque torna a estrutura mais leve (o peso adicionado pelos reforços é relativamente pequeno face ao acréscimo de resistência e de estabilidade por eles proporcionado). Entretanto, a adição do reforço torna a análise estrutural uma tarefa não-trivial e, para viabilizá-la, o projetista lança mão de diversas hipóteses simplificadoras. É comum o uso de fórmulas ou curvas simplificadas para o projeto dessas estruturas (Brush e Almroth, 1975; Reddy, 2004; Szilard, 2004).

Várias pesquisas já foram desenvolvidas acerca do comportamento estrutural de painéis reforçados, mesmo assim a busca por uma clara compreensão do assunto ainda persiste tal sua complexidade e número de variáveis envolvidas (Bedair, 1998). No que diz respeito à análise de painéis reforçados, as principais discussões giram em torno do cálculo da carga na qual se manifesta a perda da estabilidade do equilíbrio (carga crítica) e de como se desenrola o seu colapso (carga última).

A perda da estabilidade do equilíbrio de um painel reforçado pode ocorrer de maneira global ou local, dependendo de sua geometria e do número de reforçadores. Na flambagem global, o revestimento e os reforçadores flambam como uma única entidade conforme, mostra a Figura 1.2a. Na flambagem local, o deslocamento transversal do revestimento ao longo dos reforçadores é nulo formando uma linha nodal, flambando o reforçador ou o revestimento entre eles. Por simplicidade, costuma-se subdividir a flambagem local da seguinte maneira (Bedair, 1998; Hughes et al., 2004; Paik e Lee, 2005):

- flambagem local do revestimento, em que o revestimento ao fletir rotaciona consigo o reforçador (Figura 1.2b);
- flambagem local do reforçador: (a) um ou mais elementos do reforçador flambam isoladamente; (b) flambagem lateral com torção do reforçador (em inglês, *lateral torsional buckling* ou, simplesmente, *tripping*), em que o reforçador torce como um todo e, ao fletir lateralmente, rotaciona consigo o revestimento (Figura 1.2c).

É importante frisar que a flambagem global ou local pode ocorrer em diferentes modos, cujas cargas de flambagem podem diferir consideravelmente ou mesmo coincidirem, dependendo da geometria do painel. Se o painel reforçado é livre de imperfeições, em termos de geometria ou de carregamento, a proximidade das cargas de flambagem é inócua. No entanto, num painel real, a presença de imperfeições dispara interações não lineares dos modos

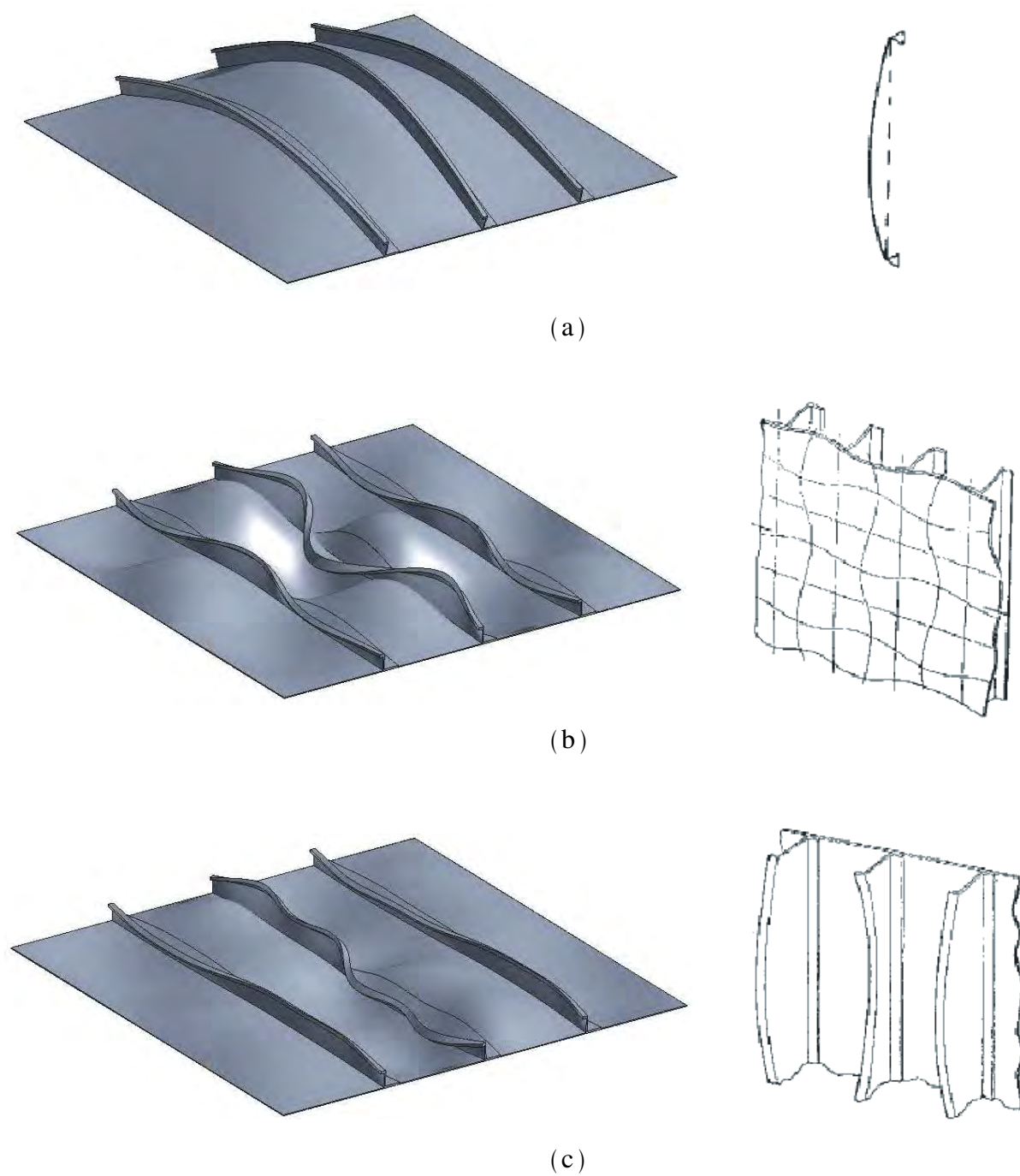


Figura 1.2 Modos de flambagem: (a) global; (b) local do revestimento; (c) lateral com torção do reforçador.

com cargas próximas, podendo torná-lo severamente sensível a imperfeições (Thompson e Hunt, 1973; Bažant e Cedolin, 2003).

No estudo específico da flambagem global, um procedimento tido como conveniente para a determinação da carga crítica é tratar o painel reforçado como uma estrutura não reforçada equivalente de material homogêneo e ortotrópico, após a “diluição da rigidez” dos reforçadores no revestimento (Brush e Almroth, 1975; Reddy, 1999; 2004; Yves, 2009). O procedimento é mais eficiente quando os reforçadores são idênticos, equidistantes e suficientemente próximos (para assegurar que a flambagem seja global). Sua principal desvantagem é desconsiderar a natureza discreta dos reforçadores. Os procedimentos que buscam tratar os reforçadores como entes discretos diferem entre si na maneira como os idealizam: composto por elementos de placa, viga, incorporado ao revestimento. Um reforçador com bulbo, por exemplo, pode ter a alma idealizada como placa e o bulbo como viga.

No estudo específico da flambagem local do revestimento, devido à presença das linhas nodais ao longo dos reforçadores, um procedimento intuitivo para a determinação da carga crítica é extrair um trecho do revestimento entre dois reforçadores adjacentes. Trata-se o trecho como um painel não reforçado no qual o reforçador é um mero apoio a oferecer condições de contorno que variam desde um apoio simples até um engaste (Paik e Thayamballi, 2000; Bisagni e Vescovini, 2009; Camelo, 2009).

Dentre todos os componentes do painel reforçado, é de fácil compreensão por que o revestimento é aquele que melhor tem a resistência pós-crítica a ser explorada, se imaginarmos que se apoia nos demais componentes. Após a flambagem, parte do acréscimo de carga é transferido do revestimento aos reforçadores, cavernas (fuselagem) ou nervuras (asa), até o colapso da estrutura que, tipicamente, se dá por plastificação local ou pela flambagem lateral com torção do reforçador (Galambos, 1998; Buermann et al., 2006). Daí a indústria aeronáutica, naval, civil, etc. empregar painéis reforçados cujo modo crítico de flambagem é o local do revestimento (Fujikubo e Yao, 1999; Buermann et al., 2006; Bisagni e Vescovini, 2009). Projetos desse tipo exploram ao máximo a capacidade de carga do painel reforçado, tornando possível a minimização de seu peso.

Pode-se agrupar os diversos trabalhos encontrados na literatura sobre flambagem de painéis reforçados como sendo de cunho analítico, numérico ou experimental. Embora procedimentos de cálculo e ábacos, oriundos de formulações analíticas, tenham sido a base do

projeto aeronáutico desde sua origem, hoje em dia são as ferramentas de base numérica que predominam (a busca de novas formulações analíticas para projeto é considerada por muitos como sendo *démodé*).

É indiscutível a superioridade do método dos elementos finitos para a análise de estruturas de geometria complexa, com condições de contorno e carregamentos também complexos. Na indústria, é praxe seu emprego na determinação da carga crítica de flambagem de painéis reforçados, bem como na análise do regime pós-crítico. Entretanto, a confecção e o processamento do modelo são computacionalmente caros (Nath e Sandeep, 2000; Byklum e Amdahl, 2002). Além disso, a análise de flambagem deve ser conduzida com certa cautela. A obtenção usual da carga crítica de flambagem por meio de um problema de autovalor (problema linearizado no deslocamento) restringe-se a certas condições de geometria e de carregamento. Por sua vez, a análise não linear, pós-crítica ou não, deve ser conduzida por usuários tecnicamente bem qualificados, visto que saber preprocessar não significa saber interpretar corretamente o comportamento da estrutura nas proximidades de pontos críticos (Arbocz, 1991).

Levando-se em conta a natureza retangular de um número considerável de painéis de uma aeronave, é de se esperar que o custo total de confecção do modelo e de processamento computacional faça o método dos elementos finitos uma ferramenta cara face aos métodos analíticos dedicados. A solução desses últimos é um compromisso entre simplicidade e precisão, e tem a vantagem de mostrar mais claramente a sensibilidade do painel reforçado aos parâmetros de análise.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- apresentar uma formulação de flambagem de placas retangulares com um campo de deslocamento dado pela teoria de Kirchhoff;
- considerar a influência dos reforços de borda na determinação da carga de flambagem;
- implementar funções de natureza hierárquica como bases de Ritz, tirando proveito de tal procedimento na imposição das condições de contorno geométrica;

- adaptar a formulação para carregamentos fixos;
- desenvolver uma ferramenta para auxílio do projeto nas diversas fases;
- verificar a eficiência da formulação por meio de modelos de elementos finitos.

1.4 Contribuições

Citam-se as seguintes contribuições deste trabalho ao estudo de flambagem de placas com bordas reforçadas:

- a apresentação de uma formulação de flambagem para placas retangulares que leva em conta a rigidez de torção dos reforços de borda;
- a confecção de uma ferramenta de análise que agiliza a avaliação precisa da carga de flambagem.

Capítulo 2

Problema de Flambagem

A placa retangular homogênea da Figura 2.1, de comprimento a e largura b , está sujeita aos carregamentos de membrana p_x , p_y e p_{xy} . A superfície média da placa está contida no plano xy do sistema de coordenadas Cartesianas ortogonais xyz . De acordo com a teoria de Kirchhoff, a flambagem da placa é descrita por (Whitney, 1987; Reddy, 2004)

$$\begin{aligned} D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} + 4D_{16}w_{,xxxy} + 4D_{26}w_{,xyyy} \\ + p_x w_{,xx} + 2p_{xy}w_{,xy} + p_y w_{,yy} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde w é o deslocamento na direção z , as quantidades D_{ij} são rigidezes de flexão, uma vírgula seguida por x (ou y) indica diferenciação em relação a x (ou y).

A flambagem de uma placa laminada composta por camadas dispostas de maneira simétrica, sob o ponto de vista do material e geométrico, em relação a superfície média é também descrita por (2.1) em que os coeficientes D_{ij} são agora dependentes do material, da espessura da camada e do esquema de laminação.

A solução de (2.1) deve satisfazer os valores prescritos de

$$\begin{array}{lll} w \text{ ou } V_x & w_{,x} \text{ ou } M_x & \text{em } x = 0, a \\ w \text{ ou } V_y & w_{,y} \text{ ou } M_y & \text{em } y = 0, b \end{array}$$

onde V_x , V_y são os cortantes efetivos, e M_x , M_y são os momentos fletores. Apenas um único elemento de cada um dos seguintes pares (w, V_x) , (w, V_y) , $(w_{,x}, M_x)$, $(w_{,y}, M_y)$ deve ser especificado. Além disso, deve-se também especificar o deslocamento w ou o momento torçor M_{xy} nos cantos da placa. Uma condição de contorno é dita geométrica quando se

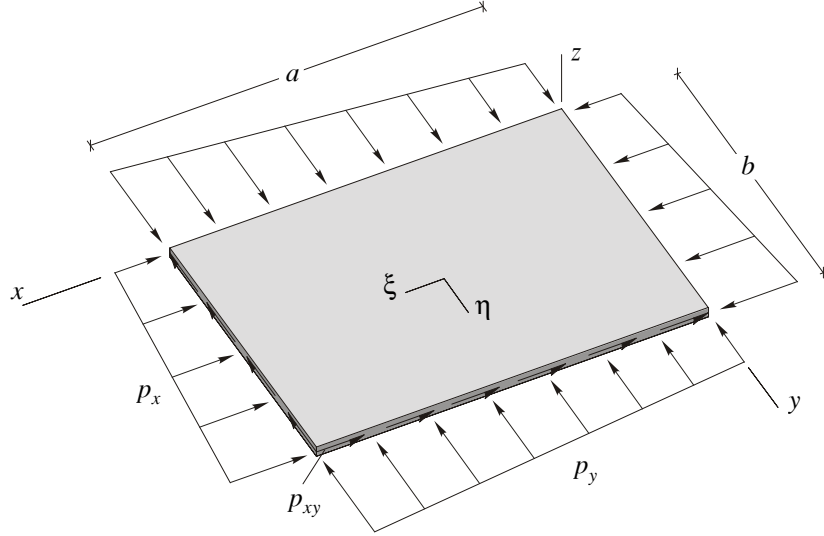


Figura 2.1 Placa retangular sujeita aos carregamentos de membrana p_x , p_y e p_{xy} .

especifica w , w_x ou w_y , a condição de contorno é dita mecânica quando se especificam V_x , V_y , M_x , M_y ou M_{xy} .

Estuda-se aqui a influência dos reforços de borda na carga de flambagem. O reforçadores longitudinais (*stringers*) e transversais (*frames*) são modelados como barras de torção de acordo com a Figura 2.2 e exercem momento nas bordas da placa com a flambagem:

$$\begin{aligned} M_s(x, 0) &= \theta_s^0 w_{,xxy}(x, 0) - \varphi_s^0 w_{,xxxxy}(x, 0) & M_s(x, b) &= -\theta_s^b w_{,xxy}(x, b) + \varphi_s^b w_{,xxxxy}(x, b) \\ M_f(0, y) &= \theta_f^0 w_{,xyy}(0, y) - \varphi_f^0 w_{,xyyyy}(0, y) & M_f(a, y) &= -\theta_f^a w_{,xyy}(a, y) + \varphi_f^a w_{,xyyyy}(a, y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

As quantidades θ_s^0 , θ_s^b dos *stringers* e θ_f^0 , θ_f^a dos *frames* representam rigidezes de torção uniforme:

$$\theta_s^0 = G_s^0 J_s^0 \quad \theta_s^b = G_s^b J_s^b \quad \theta_f^0 = G_f^0 J_f^0 \quad \theta_f^a = G_f^a J_f^a$$

onde G_s^0 , G_s^b , G_f^0 , G_f^a são módulos de cisalhamento e J_s^0 , J_s^b , J_f^0 , J_f^a são constantes de torção.

As quantidades φ_s^0 , φ_s^b dos *stringers* e φ_f^0 , φ_f^a dos *frames* representam rigidezes de torção não-uniforme:

$$\varphi_s^0 = E_s^0 \Gamma_s^0 \quad \varphi_s^b = E_s^b \Gamma_s^b \quad \varphi_f^0 = E_f^0 \Gamma_f^0 \quad \varphi_f^a = E_f^a \Gamma_f^a$$

onde E_s^0 , E_s^b , E_f^0 , E_f^a são módulos de Young e Γ_s^0 , Γ_s^b , Γ_f^0 , Γ_f^a são constantes de empenamento.

Os carregamentos p_x , p_y tem componentes uniformes p_{x0} , p_{y0} e componentes lineares p_{x1} , p_{y1} de acordo com a Figura 2.3.

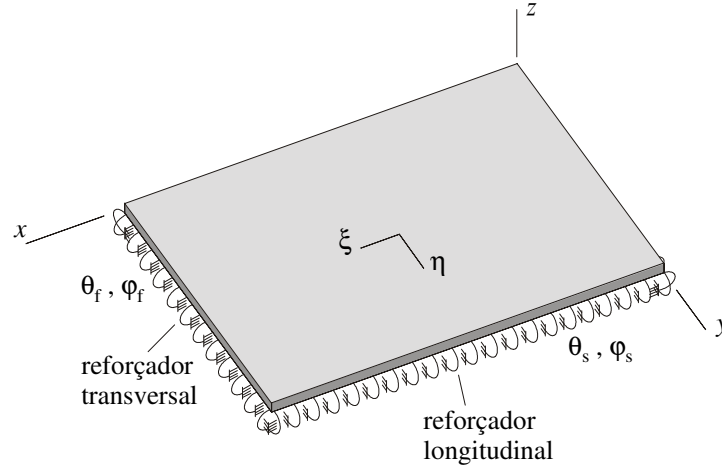


Figura 2.2 Reforços de borda.

A equação (2.1) sujeita às condições de contorno (2.2) pode ser estabelecida a partir da condição

$$\delta W_i + \delta W_e = 0 \quad (2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta W_i = & - \int_0^b \int_0^a [(D_{11}w_{,xx} + 2D_{16}w_{,xy} + D_{12}w_{,yy}) \delta w_{,xx} + (D_{12}w_{,xx} + 2D_{26}w_{,xy} + D_{22}w_{,yy}) \delta w_{,yy} \\ & + 2(D_{16}w_{,xx} + 2D_{66}w_{,xy} + D_{26}w_{,yy}) \delta w_{,xy}] dx dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_0^b \int_0^a [p_x w_{,x} \delta w_{,x} + p_{xy} (w_{,y} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y}) + p_y w_{,y} \delta w_{,y}] dx dy \\ & + \int_0^a [M_s(x, 0) \delta w_{,y}(x, 0) - M_s(x, b) \delta w_{,y}(x, b)] dx \\ & + \int_0^b [M_f(0, y) \delta w_{,x}(0, y) - M_f(a, y) \delta w_{,x}(a, y)] dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1 Solução de Ritz

Faz-se conveniente expressar (2.4) e (2.5) de maneira adimensional. Para tanto, adotam-se as coordenadas $\xi = (2x - a) / a$ e $\eta = (2y - b) / b$, obtendo-se

$$\xi_{,x} = \frac{2}{a} \quad dx = \frac{a}{2} d\xi \quad \eta_{,y} = \frac{2}{b} \quad dy = \frac{b}{2} d\eta$$

e

$$w_{,x} = \frac{2}{a}w_{,\xi} \quad w_{,y} = \frac{2}{b}w_{,\eta} \quad w_{,xx} = \frac{4}{a^2}w_{,\xi\xi} \quad w_{,xy} = \frac{4}{ab}w_{,\xi\eta}$$

$$w_{,yy} = \frac{4}{b^2}w_{,\eta\eta} \quad w_{,xxy} = \frac{8}{a^2b}w_{,\xi\xi\eta} \quad w_{,xyy} = \frac{8}{ab^2}w_{,\xi\eta\eta} \quad w_{,xxxxy} = \frac{32}{a^4b}w_{,\xi\xi\xi\xi\eta} \quad w_{,xyyyy} = \frac{32}{ab^4}w_{,\xi\eta\eta\eta\eta}$$

que resulta

$$\begin{aligned} \delta W_i = & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{4}{ab} \left[\left(\frac{b^2}{a^2} D_{11} w_{,\xi\xi} + \frac{2b}{a} D_{16} w_{,\xi\eta} + D_{12} w_{,\eta\eta} \right) \delta w_{,\xi\xi} \right. \\ & + 2 \left(\frac{b}{a} D_{16} w_{,\xi\xi} + 2 D_{66} w_{,\xi\eta} + \frac{a}{b} D_{26} w_{,\eta\eta} \right) \delta w_{,\xi\eta} \\ & \left. + \left(D_{12} w_{,\xi\xi} + \frac{2a}{b} D_{26} w_{,\xi\eta} + \frac{a^2}{b^2} D_{22} w_{,\eta\eta} \right) \delta w_{,\eta\eta} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[(p_{x0} + p_{x1}\eta) \frac{b}{a} w_{,\xi} \delta w_{,\xi} + p_{xy} (w_{,\eta} \delta w_{,\xi} + w_{,\xi} \delta w_{,\eta}) + (p_{y0} + p_{y1}\xi) \frac{a}{b} w_{,\eta} \delta w_{,\eta} \right] d\xi d\eta \\ & + \int_{-1}^1 \frac{8}{ab^2} \left[\theta_s^0 (w_{,\xi\xi\eta} \delta w_{,\eta})|_{\eta=-1} + \theta_s^b (w_{,\xi\xi\eta} \delta w_{,\eta})|_{\eta=1} \right] d\xi \\ & - \int_{-1}^1 \frac{32}{a^3b^2} \left[\varphi_s^0 (w_{,\xi\xi\xi\eta} \delta w_{,\eta})|_{\eta=-1} + \varphi_s^b (w_{,\xi\xi\xi\eta} \delta w_{,\eta})|_{\eta=1} \right] d\xi \\ & + \int_{-1}^1 \frac{8}{a^2b} \left[\theta_f^0 (w_{,\xi\eta\eta} \delta w_{,\xi})|_{\xi=-1} + \theta_f^a (w_{,\xi\eta\eta} \delta w_{,\xi})|_{\xi=1} \right] d\eta \\ & - \int_{-1}^1 \frac{32}{a^2b^3} \left[\varphi_f^0 (w_{,\xi\eta\eta\eta} \delta w_{,\xi})|_{\xi=-1} + \varphi_f^a (w_{,\xi\eta\eta\eta} \delta w_{,\xi})|_{\xi=1} \right] d\eta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Empregando-se o método de Ritz, busca-se uma solução aproximada do problema de flambagem na forma

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \quad (2.8)$$

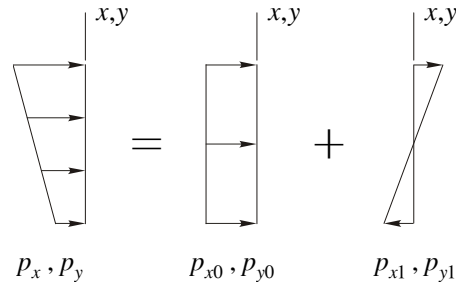


Figura 2.3 Carregamentos p_x, p_y .

cujos coeficientes w_{ij} são determinados de (2.3). A aproximação (2.8) deve satisfazer as condições de contorno geométricas.

Escrevendo

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^m (w_{i1}X_iY_1 + \dots + w_{in}X_iY_n) \\ &= \sum_{i=1}^m [w_{i1} \dots w_{in}] X_i [Y_1 \dots Y_n]^T \\ &= \sum_{i=1}^m \{w_i\}^T X_i \{Y\} = \sum_{i=1}^m \{Y\}^T X_i \{w_i\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

a substituição de (2.9) em δW_i (2.6) fornece

$$\begin{aligned} \delta W_i &= - \sum \int \frac{4}{ab} \left[\left(\frac{b^2}{a^2} D_{11} \{Y\}^T X_i'' + \frac{2b}{a} D_{16} \{Y'\}^T X_i' + D_{12} \{Y''\}^T X_i \right) \{w_i\} \{ \delta w_k \}^T X_k'' \{Y\} \right. \\ &\quad + 2 \left(\frac{b}{a} D_{16} \{Y\}^T X_i'' + 2D_{66} \{Y'\}^T X_i' + \frac{a}{b} D_{26} \{Y''\}^T X_i \right) \{w_i\} \{ \delta w_k \}^T X_k' \{Y'\} \\ &\quad \left. + \left(D_{12} \{Y\}^T X_i'' + \frac{2a}{b} D_{26} \{Y'\}^T X_i' + \frac{a^2}{b^2} D_{22} \{Y''\}^T X_i \right) \{w_i\} \{ \delta w_k \}^T X_k \{Y''\} \right] \\ &= - \sum \int \{ \delta w_k \}^T \frac{4}{ab} \left[X_k'' \{Y\} \left(\frac{b^2}{a^2} D_{11} \{Y\}^T X_i'' + \frac{2b}{a} D_{16} \{Y'\}^T X_i' + D_{12} \{Y''\}^T X_i \right) \right. \\ &\quad + X_k' \{Y'\} \left(\frac{2b}{a} D_{16} \{Y\}^T X_i'' + 4D_{66} \{Y'\}^T X_i' + \frac{2a}{b} D_{26} \{Y''\}^T X_i \right) \\ &\quad \left. + X_k \{Y''\} \left(D_{12} \{Y\}^T X_i'' + \frac{2a}{b} D_{26} \{Y'\}^T X_i' + \frac{a^2}{b^2} D_{22} \{Y''\}^T X_i \right) \right] \{w_i\} \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \{ \delta w_k \}^T [R_w]_{ki} \{w_i\} \end{aligned}$$

onde

$$\sum \int (\cdot) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\cdot) d\xi d\eta$$

e

$$\begin{aligned} [R_w]_{ki} &= \frac{4}{ab} \left(\frac{b^2}{a^2} D_{11} [\Delta^{2200}]_{ki} + \frac{a^2}{b^2} D_{22} [\Delta^{0022}]_{ki} + 4D_{66} [\Delta^{1111}]_{ki} + D_{12} ([\Delta^{2002}]_{ki} + [\Delta^{0220}]_{ki}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a}{b} D_{26} ([\Delta^{1012}]_{ki} + [\Delta^{0121}]_{ki}) + \frac{2b}{a} D_{16} ([\Delta^{2101}]_{ki} + [\Delta^{1210}]_{ki}) \right) \end{aligned}$$

com

$$[\Delta^{pqrs}]_{ki} = \int_{-1}^1 \frac{d^p X_k}{d\xi^p} \frac{d^q X_i}{d\xi^q} d\xi \int_{-1}^1 \frac{d^r \{Y\}}{d\eta^r} \frac{d^s \{Y\}^T}{d\eta^s} d\eta. \quad (2.10)$$

Por sua vez, a substituição de (2.9) nas parcelas de δW_e (2.7) fornece

$$\begin{aligned}
 & \sum \int \left[(p_{x0} + p_{x1}\eta) \frac{b}{a} \{Y\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} \right. \\
 & + p_{xy} \left(\{Y'\}^T X_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} + \{Y\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right) \\
 & \left. + (p_{y0} + p_{y1}\xi) \frac{a}{b} \{Y'\}^T X_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right] \\
 & = \sum \int \{\delta w_k\}^T \left[(p_{x0} + p_{x1}\eta) \frac{b}{a} X'_k \{Y\} \{Y\}^T X'_i + p_{xy} \left(X'_k \{Y\} \{Y'\}^T X_i + X_k \{Y'\} \{Y\}^T X'_i \right) \right. \\
 & \left. + (p_{y0} + p_{y1}\xi) \frac{a}{b} X_k \{Y'\} \{Y'\}^T X_i \right] \{w_i\} \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum \int_{\xi} \left|_{-1} \frac{8}{ab^2} \theta_s^0 \{Y'\}^T X''_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right. \\
 & + \sum \int_{\xi} \left|_1 \frac{8}{ab^2} \theta_s^b \{Y'\}^T X''_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right. \\
 & + \sum \int_{\eta} \left|_{-1} \frac{8}{a^2b} \theta_f^0 \{Y''\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} \right. \\
 & \left. + \sum \int_{\eta} \left|_1 \frac{8}{a^2b} \theta_f^a \{Y''\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} \right. \right. \\
 & = \sum \{\delta w_k\}^T \left[\frac{8}{ab^2} \left(\int_{\xi} \left|_{-1} \theta_s^0 X_k \{Y'\} \{Y'\}^T X''_i + \int_{\xi} \left|_1 \theta_s^b X_k \{Y'\} \{Y'\}^T X''_i \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{8}{a^2b} \left(\int_{\eta} \left|_{-1} \theta_f^0 X'_k \{Y\} \{Y''\}^T X'_i + \int_{\eta} \left|_1 \theta_f^a X'_k \{Y\} \{Y''\}^T X'_i \right) \right) \right] \{w_i\} \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum \int_{\xi} \left|_{-1} \frac{32}{a^3b^2} \varphi_s^0 \{Y'\}^T X'''_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right. \\
 & + \sum \int_{\xi} \left|_1 \frac{32}{a^3b^2} \varphi_s^b \{Y'\}^T X'''_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X_k \{Y'\} \right. \\
 & + \sum \int_{\eta} \left|_{-1} \frac{32}{a^2b^3} \varphi_f^0 \{Y'''\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} \right. \\
 & \left. + \sum \int_{\eta} \left|_1 \frac{32}{a^2b^3} \varphi_f^a \{Y'''\}^T X'_i \{w_i\} \{\delta w_k\}^T X'_k \{Y\} \right. \right. \\
 & = \sum \{\delta w_k\}^T \left[\frac{32}{a^3b^2} \left(\int_{\xi} \left|_{-1} \varphi_s^0 X_k \{Y'\} \{Y'\}^T X'''_i + \int_{\xi} \left|_1 \varphi_s^b X_k \{Y'\} \{Y'\}^T X'''_i \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{32}{a^2b^3} \left(\int_{\eta} \left|_{-1} \varphi_f^0 X'_k \{Y\} \{Y'''\}^T X'_i + \int_{\eta} \left|_1 \varphi_f^a X'_k \{Y\} \{Y'''\}^T X'_i \right) \right) \right] \{w_i\} \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

onde

$$\sum \int_r \Big|_{\alpha} (\cdot) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 (\cdot) \Big|_{\alpha} dr.$$

Agrupando-se as relações (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.7), resulta

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \{\delta w_k\}^T ([R_p]_{ki} + [R_{\theta}]_{ki} - [R_{\varphi}]_{ki}) \{w_i\}$$

onde

$$[R_p]_{ki} = p_{x0} \frac{b}{a} [\Delta^{1100}]_{ki} + p_{x1} \frac{b}{a} [\bar{\Delta}^{1100}]_{ki} + p_{xy} ([\Delta^{1001}]_{ki} + [\Delta^{0110}]_{ki}) + p_{y0} \frac{a}{b} [\Delta^{0011}]_{ki} + p_{y1} \frac{a}{b} [\bar{\Delta}^{0011}]_{ki}$$

$$[R_{\theta}]_{ki} = \frac{8}{ab^2} (\theta_s^0 [\Theta_s(-1)]_{ki} + \theta_s^b [\Theta_s(1)]_{ki}) + \frac{8}{a^2b} (\theta_f^0 [\Theta_f(-1)]_{ki} + \theta_f^a [\Theta_f(1)]_{ki})$$

$$[R_{\varphi}]_{ki} = \frac{32}{a^3b^2} (\varphi_s^0 [\Phi_s(-1)]_{ki} + \varphi_s^b [\Phi_s(1)]_{ki}) + \frac{32}{a^2b^3} (\varphi_f^0 [\Phi_f(-1)]_{ki} + \varphi_f^a [\Phi_f(1)]_{ki})$$

com

$$[\bar{\Delta}^{1100}]_{ki} = \int_{-1}^1 X'_k X'_i d\xi \int_{-1}^1 \{Y\} \{Y\}^T \eta d\eta$$

$$[\bar{\Delta}^{0011}]_{ki} = \int_{-1}^1 X_k X_i \xi d\xi \int_{-1}^1 \{Y'\} \{Y'\}^T d\eta$$

e

$$[\Theta_s(\bar{\eta})]_{ki} = \int_{-1}^1 X_k X_i'' d\xi \{Y'(\bar{\eta})\} \{Y'(\bar{\eta})\}^T \quad [\Theta_f(\bar{\xi})]_{ki} = X'_k(\bar{\xi}) X'_i(\bar{\xi}) \int_{-1}^1 \{Y\} \{Y''\}^T d\eta$$

$$[\Phi_s(\bar{\eta})]_{ki} = \int_{-1}^1 X_k X_i''' d\xi \{Y'(\bar{\eta})\} \{Y'(\bar{\eta})\}^T \quad [\Phi_f(\bar{\xi})]_{ki} = X'_k(\bar{\xi}) X'_i(\bar{\xi}) \int_{-1}^1 \{Y\} \{Y''''\}^T d\eta.$$

No equilíbrio $\delta W_i + \delta W_e = 0$, isto é

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \{\delta w_k\}^T ([-R_w]_{ki} + [R_p]_{ki} + [R_{\theta}]_{ki} - [R_{\varphi}]_{ki}) \{w_i\} = 0.$$

Considerando que as componentes de $\{\delta w_k\}$ são arbitrárias e independentes, então

$$(-[R_w]_{ki} + [R_p]_{ki} + [R_{\theta}]_{ki} - [R_{\varphi}]_{ki}) \{w_i\} = \{0\},$$

de onde se obtém o sistema linear homogêneo

$$([R_w] - [R_{\theta}] + [R_{\varphi}] - [R_p]) \{w\} = \{0\}$$

com

$$[R_w] = \frac{4}{ab} \left(\frac{b^2}{a^2} D_{11} [\Delta^{2200}] + \frac{a^2}{b^2} D_{22} [\Delta^{0022}] + 4D_{66} [\Delta^{1111}] + D_{12} ([\Delta^{2002}] + [\Delta^{0220}]) \right. \\ \left. + \frac{2a}{b} D_{26} ([\Delta^{1012}] + [\Delta^{0121}]) + \frac{2b}{a} D_{16} ([\Delta^{2101}] + [\Delta^{1210}]) \right)$$

$$[R_\theta] = \frac{8}{ab^2} (\theta_s^0 [\Theta_s(-1)] + \theta_s^b [\Theta_s(1)]) + \frac{8}{a^2b} (\theta_f^0 [\Theta_f(-1)] + \theta_f^a [\Theta_f(1)])$$

$$[R_\varphi] = \frac{32}{a^3b^2} (\varphi_s^0 [\Phi_s(-1)] + \varphi_s^b [\Phi_s(1)]) + \frac{32}{a^2b^3} (\varphi_f^0 [\Phi_f(-1)] + \varphi_f^a [\Phi_f(1)])$$

$$[R_p] = p_{x0} \frac{b}{a} [\Delta^{1100}] + p_{x1} \frac{b}{a} [\bar{\Delta}^{1100}] + p_{xy} ([\Delta^{1001}] + [\Delta^{0110}]) + p_{y0} \frac{a}{b} [\Delta^{0011}] + p_{y1} \frac{a}{b} [\bar{\Delta}^{0011}]$$

$$\{w\} = [[w_1] \quad [w_2] \quad \dots \quad [w_m]]^T$$

e

$$\begin{aligned} [\Delta^{pqrs}] &= \begin{bmatrix} [\Delta^{pqrs}]_{11} & \dots & [\Delta^{pqrs}]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\Delta^{pqrs}]_{m1} & \dots & [\Delta^{pqrs}]_{mm} \end{bmatrix} \\ [\Theta_s(\bar{\eta})] &= \begin{bmatrix} [\Theta_s(\bar{\eta})]_{11} & \dots & [\Theta_s(\bar{\eta})]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\Theta_s(\bar{\eta})]_{m1} & \dots & [\Theta_s(\bar{\eta})]_{mm} \end{bmatrix} & [\Theta_f(\bar{\eta})] &= \begin{bmatrix} [\Theta_f(\bar{\eta})]_{11} & \dots & [\Theta_s(\bar{\eta})]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\Theta_f(\bar{\eta})]_{m1} & \dots & [\Theta_s(\bar{\eta})]_{mm} \end{bmatrix} \\ [\Phi_s(\bar{\eta})] &= \begin{bmatrix} [\Phi_s(\bar{\eta})]_{11} & \dots & [\Phi_s(\bar{\eta})]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_s(\bar{\eta})]_{m1} & \dots & [\Phi_s(\bar{\eta})]_{mm} \end{bmatrix} & [\Phi_f(\bar{\xi})] &= \begin{bmatrix} [\Phi_f(\bar{\xi})]_{11} & \dots & [\Phi_f(\bar{\xi})]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_f(\bar{\xi})]_{m1} & \dots & [\Phi_f(\bar{\xi})]_{mm} \end{bmatrix} \\ [\bar{\Delta}^{1100}] &= \begin{bmatrix} [\bar{\Delta}^{1100}]_{11} & \dots & [\bar{\Delta}^{1100}]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\bar{\Delta}^{1100}]_{m1} & \dots & [\bar{\Delta}^{1100}]_{mm} \end{bmatrix} & [\bar{\Delta}^{0011}] &= \begin{bmatrix} [\bar{\Delta}^{0011}]_{11} & \dots & [\bar{\Delta}^{0011}]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [\bar{\Delta}^{0011}]_{m1} & \dots & [\bar{\Delta}^{0011}]_{mm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando

$$[R_c] = [R_w] - [R_\theta] + [R_\varphi] \quad (2.14)$$

resulta o problema de autovalor

$$([R_c] - \lambda [R_p]) \{w\} = \{0\} \quad (2.15)$$

cujo autopar $(\lambda, \{w\})$ é que define a carga e o modo de flambagem da placa com bordas sob reforço. O fator λ é o parâmetro de carga utilizado na análise, cujo valor é proporcional ao valor dos carregamentos $p_{x0}, p_{x1}, p_{xy}, p_{y0}, p_{y1}$ conhecidos à priori.

2.2 Implementação

As funções de interpolação $X_i(\xi)$ e $Y_j(\eta)$ em (2.8) têm a mesma lei de formação e são obtidas de um conjunto de funções polinomiais $\{F_i\}_{i=1}^m$ empregado por Bardell (1991). As primeiras quatro funções do conjunto

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & F_2(x) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \\ F_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & F_4(x) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

são as funções cúbicas de Hermite, e as demais

$$F_i(\xi) = \sum_{n=0}^{(i-1)/2} \frac{(-1)^n (2i-2n-7)!!}{2^n n! (i-2n-1)!} \xi^{i-2n-1} \quad i > 4 \quad (2.17)$$

são funções de natureza hierárquica obtidas por integração sucessiva das funções de Legendre (Bardell, 1991; Petyt, 2010). Aqui

$$i!! = i(i-2)\dots(2 \text{ ou } 1) \quad 0!! = (-1)!! = 1,$$

a quantidade $(i-1)/2$, que limita superiormente o somatório de (2.17), consiste numa parte inteira. As quatro primeiras funções hierárquicas são

$$\begin{aligned} F_5(\xi) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4 & F_6(\xi) &= \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^5 \\ F_7(\xi) &= -\frac{1}{48} + \frac{3}{16}\xi^2 - \frac{5}{16}\xi^4 + \frac{7}{48}\xi^6 & F_8(\xi) &= -\frac{1}{16}\xi + \frac{5}{16}\xi^3 - \frac{7}{16}\xi^5 + \frac{3}{16}\xi^7. \end{aligned}$$

A imposição das condições de contorno é controlada pelas quatro primeiras funções do conjunto (2.16), enquanto as demais funções (2.17) são as responsáveis pelo refinamento da solução no domínio.

Tomando

$$[A^{pq}] = \int_{-1}^1 \frac{d^p \{F(\xi)\}}{d\xi^p} \frac{d^q \{F(\xi)\}}{d\xi^q} d\xi \quad [B^{rs}] = \int_{-1}^1 \frac{d^r \{F(\eta)\}}{d\eta^r} \frac{d^s \{F(\eta)\}}{d\eta^s} d\eta$$

reescreve-se $[\Delta^{pqrs}]_{ki}$ em (2.10) na forma

$$[\Delta^{pqrs}]_{ki} = A_{ki}^{pq} [B^{rs}]$$

onde A_{ki}^{pq} é o elemento da linha k e da coluna i da matriz $[A^{pq}]$.

A matriz $[A^{pq}]$ é de ordem m , e a matriz $[B^{rs}]$ é de ordem n . Logo,

$$[\Delta^{pqrs}] = \begin{bmatrix} A_{11}^{pq} [B^{rs}] & \dots & A_{1m}^{pq} [B^{rs}] \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^{pq} [B^{rs}] & \dots & A_{mm}^{pq} [B^{rs}] \end{bmatrix}$$

é de ordem $m \times n$. Calculam-se, primeiramente, as matrizes bases $[A_{\max}^{pq}]$ e $[B_{\max}^{pq}]$ obtidas de uma discretização com $m = n = 104$ termos. Dada a natureza hierárquica do conjunto de funções, tem-se $[A^{pq}] \subset [A_{\max}^{pq}]$ e $[B^{pq}] \subset [B_{\max}^{pq}]$ para todo $(m, n) \leq 104$.

Seja

$$\begin{aligned} [A(\bar{\xi})] &= \{F'(\bar{\xi})\} \{F'(\bar{\xi})\}^T & [\bar{A}] &= \int_{-1}^1 \{F\} \{F\}^T \xi d\xi \\ [B(\bar{\eta})] &= \{F'(\bar{\eta})\} \{F'(\bar{\eta})\}^T & [\bar{B}] &= \int_{-1}^1 \{F\} \{F\}^T \eta d\eta \end{aligned}$$

em que as quantidades $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ assumem apenas os valores -1 e 1 . A implementação da torção (uniforme e não-uniforme) e da flexão implica nas seguintes relações

$$\begin{aligned} [\Theta_s(\bar{\eta})]_{ki} &= A_{ki}^{02} [B(\bar{\eta})] & [\Phi_s(\bar{\eta})]_{ki} &= A_{ki}^{04} [B(\bar{\eta})] & [\bar{\Delta}^{1100}]_{ki} &= A_{ki}^{11} [\bar{B}] \\ [\Theta_f(\bar{\xi})]_{ki} &= A(\bar{\xi})_{ki} [B^{02}] & [\Phi_f(\bar{\xi})]_{ki} &= A(\bar{\xi})_{ki} [B^{04}] & [\bar{\Delta}^{0011}]_{ki} &= \bar{A}_{ki} [B^{11}]. \end{aligned}$$

São matrizes quadradas de ordem n . Após o espalhamento dessas matrizes é que se forma as quantidades $[R_\theta]$, $[R_\varphi]$, $[R_{px1}]$ e $[R_{py1}]$ que, por sua vez, são matrizes quadradas de ordem $m \times n$. Dada a natureza hierárquica das funções de interpolação e de sua continuidade C^1 , tem-se

$$\{F'(-1)\} = [0 \quad F'_2(-1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad \{F'(1)\} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad F'_4(1) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

onde $F'_2(-1)$ é a derivada da segunda componente do conjunto de funções em $\xi = -1$ ou $\eta = -1$, e $F'_4(1)$ é a derivada da quarta componente do conjunto de funções em $\xi = 1$ ou $\eta = 1$. Obtêm-se assim as matrizes esparsas

$$[A(-1)] = [\delta_{2m}] \quad [A(1)] = [\delta_{4m}] \quad [B(-1)] = [\delta_{2n}] \quad [B(1)] = [\delta_{4n}]$$

onde $[\delta_{2m}]$ é uma matriz de ordem m cujo único termo não nulo é o termo $[\delta_{2m}]_{22} = F'_2(-1)^2$, e $[\delta_{4m}]$ é uma matriz de ordem m cujo único termo não nulo é o termo $[\delta_{4m}]_{44} = F'_4(1)^2$.

Logo,

$$\begin{aligned} [\Theta_s(-1)]_{ki} &= [A^{02}]_{ki} [\delta_{2n}] & [\Theta_s(1)]_{ki} &= [A^{02}]_{ki} [\delta_{4n}] \\ [\Phi_s(-1)]_{ki} &= [A^{04}]_{ki} [\delta_{2n}] & [\Phi_s(1)]_{ki} &= [A^{04}]_{ki} [\delta_{4n}] \\ [\Theta_f(-1)]_{ki} &= \delta_{2ki} [B^{02}] & [\Theta_f(1)]_{ki} &= \delta_{4ki} [B^{02}] \\ [\Phi_f(-1)]_{ki} &= \delta_{2ki} [B^{04}] & [\Phi_f(1)]_{ki} &= \delta_{4ki} [B^{04}] \end{aligned}$$

onde $\delta_{2ki} = F'_2(-1)^2$ se $k = i = 2$, caso contrário $\delta_{2ki} = 0$; $\delta_{4ki} = F'_4(1)^2$ se $k = i = 4$, caso contrário $\delta_{4ki} = 0$. Para o conjunto de funções $\{F_i\}$ em (2.16) e (2.17), tem-se

$$F'_2(-1) = F'_4(1) = \frac{1}{2}.$$

Condições de Contorno

Expandindo o problema de autovalor (2.15), tem-se

$$\begin{bmatrix} [R]_{11} & \cdots & [R]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [R]_{m1} & \cdots & [R]_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_1\} \\ \vdots \\ \{w_m\} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

onde

$$[R]_{ki} = [R_c]_{ki} - \lambda [R_g]_{ki}.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} w(-1, \eta) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y\}^T X_i(-1) \{w_i\} = 0 \Rightarrow \{w_1\} = \{0\} \\ w'(-1, \eta) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y\}^T X'_i(-1) \{w_i\} = 0 \Rightarrow \{w_2\} = \{0\} \\ w(1, \eta) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y\}^T X_i(1) \{w_i\} = 0 \Rightarrow \{w_3\} = \{0\} \\ w'(1, \eta) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y\}^T X'_i(1) \{w_i\} = 0 \Rightarrow \{w_4\} = \{0\} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 w(\xi, -1) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y(-1)\}^T X_i \{w_i\} = 0 \Rightarrow w_{i1} = 0 \\
 w'(\xi, -1) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y(-1)\}^T X'_i \{w_i\} = 0 \Rightarrow w_{i2} = 0 \\
 w(\xi, 1) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y(1)\}^T X_i \{w_i\} = 0 \Rightarrow w_{i3} = 0 \\
 w'(\xi, 1) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^m \{Y(1)\}^T X'_i \{w_i\} = 0 \Rightarrow w_{i4} = 0,
 \end{aligned}$$

tem-se que a imposição de cada condição de contorno geométrica pode ser feita após a montagem do problema de autovalor (2.15), retirando-se das matrizes $[R_c]$ e $[R_g]$ em (2.14) as linhas e colunas correspondentes à restrição. Tal procedimento é de grande valia pois simplifica e agiliza a montagem do problema.

Carregamento Fixo

Implementa-se, também, o problema de flambagem sob carregamento fixo. Nesse caso, a parcela referente a carga fixa agrega-se à parcela constitutiva do problema de autovalor.

Para exemplificar o procedimento, considere fixo $p_{x0} = \bar{p}_{x0}$. A matriz $[R_p]$ se escreve agora na forma

$$[R_p] = \bar{p}_{x0} \frac{b}{a} [\Delta^{1100}] + p_{x1} \frac{b}{a} [\bar{\Delta}^{1100}] + p_{xy} ([\Delta^{1001}] + [\Delta^{0110}]) + p_{y0} \frac{a}{b} [\Delta^{0011}] + p_{y1} \frac{a}{b} [\bar{\Delta}^{0011}].$$

Se o valor \bar{p}_{x0} deve ser mantido constante no problema de autovalor (2.15) então as rigidezes $[R_c]$ e $[R_p]$ em (2.14), devem ser reescritas como

$$[R_c] \leftarrow [R_c] - \bar{p}_{x0} \frac{b}{a} [\Delta^{1100}] \quad [R_p] \leftarrow [R_p] - \bar{p}_{x0} \frac{b}{a} [\Delta^{1100}].$$

Procede-se de maneira semelhante para cada carregamento fixo.

Capítulo 3

Ferramenta de Análise

Implementa-se a formulação de flambagem local do revestimento desenvolvida no capítulo anterior sob a forma de uma ferramenta de análise batizada ALS_p (Analysis of Laminated Shells and Plates). A ferramenta de análise apresentada agiliza a avaliação precisa da carga de flambagem de placas para fins de projeto, tornando obsoleto o emprego de diagramas de curvas de flambagem e superando em velocidade e simplicidade o uso de programas de elementos finitos.

A linguagem de programação utilizada é o Python 2.7.5, escolhida por priorizar legibilidade de código e por ter sintaxe semelhante à da plataforma Matlab. Por motivo de simplicidade e de concisão é que os principais dados de entrada são agrupados da seguinte maneira: Contorno, Material, Carregamento e Análise.

Contorno

As bordas da placa podem ser livre, simplesmente apoiada ou engastada. Quando a borda é simplesmente apoiada, pode-se também levar em conta a rigidez a torção proveniente do elemento de reforço da borda. Considerar a rigidez de torção dos reforçadores torna a análise mais precisa e próxima da realidade.

Material

A placa é considerada homogênea (isotrópica, ortotrópica, anisotrópica) ou simetricamente laminada (lâminas ortotrópicas). Pelo fato de ter sido o problema estabelecido pelo princípio dos deslocamentos virtuais (2.3), a formulação é restrita a materiais com baixa anisotropia.

Carregamento

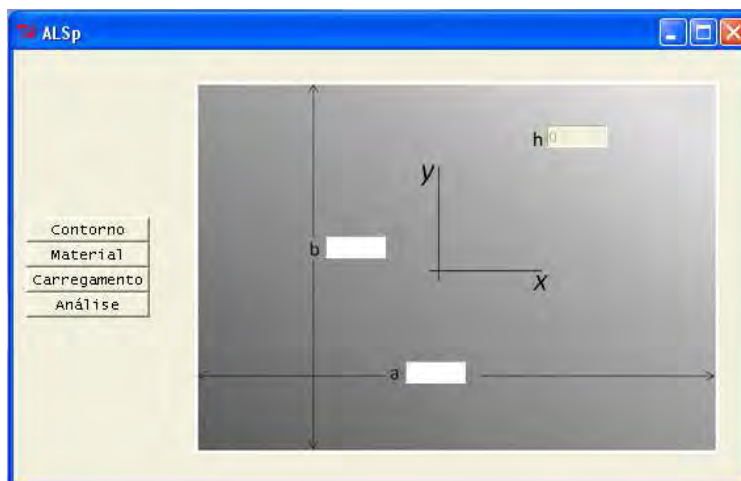
A placa pode estar sujeita a carregamentos axiais, de cisalhamento e de flexão com linha neutra central. Pode-se combinar e fixar valores de carregamentos para análise.

Análise

Resolve-se o problema de autovalor (2.15) por meio de funções de natureza hierárquica de continuidade C^1 . A base de funções de Ritz deriva-se dos polinômios de Legendre conforme divulgado por Bardell (1991). As matrizes de rigidezes são obtidas por meio de integração analítica empregando-se o programa de matemática simbólica Maple sob precisão numérica de 100 (cem) casas decimais e são armazenadas todas elas com 16 (dezesesseis) casas decimais em arquivos específicos em formato texto. Tal armazenamento tornam rápidas a montagem e a resolução do problema de autovalor.

3.1 Descrição

Na tela inicial do ALS_p

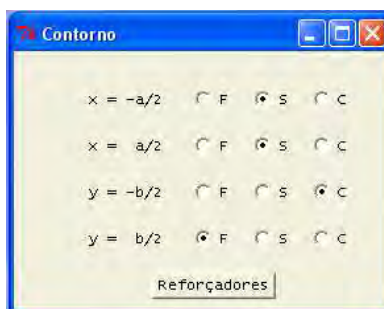


informam-se, primeiramente, os seguintes parâmetros (DATA):

DATA	Significado
------	-------------

a	comprimento da placa ao longo do eixo x
b	comprimento da placa ao longo do eixo y
h	espessura da placa.

Ao se pressionar o botão **Contorno** na tela inicial, abre-se a janela

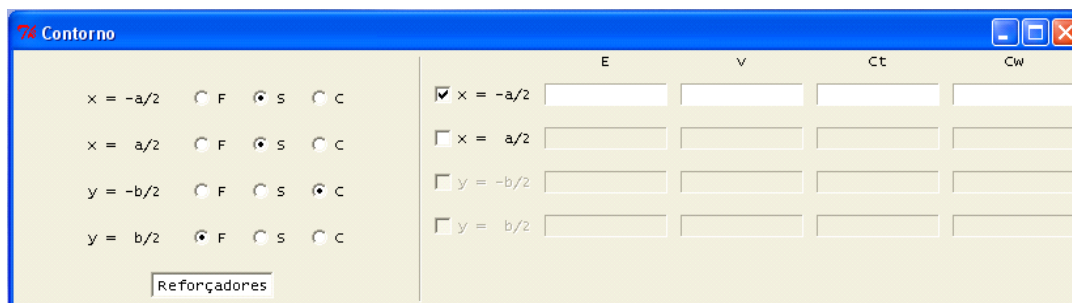


na qual o usuário define as condições de contorno da placa:

DATA	Significado
------	-------------

F	borda livre
S	borda simplesmente apoiada
C	borda engastada.

Cada borda é identificada de acordo com sua posição no sistema cartesiano global xy da placa. Se a borda é simplesmente apoiada e caso se queira levar em conta a rigidez à torção proveniente do elemento de reforço, o usuário deve pressionar o botão **Reforçadores**



e habilitar o preenchimento dos seguintes campos na borda reforçada (simplesmente apoiada):

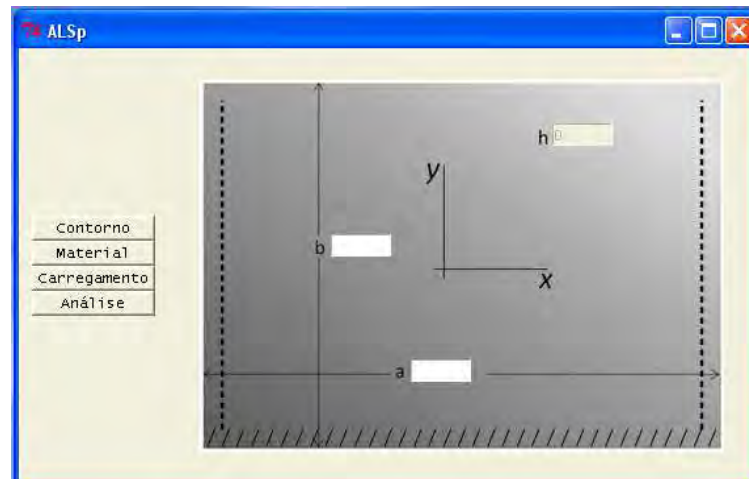
DATA	Significado
------	-------------

E	módulo de Young do reforçador
ν	coeficiente de Poisson do reforçador
C_t	constante de torção uniforme da seção transversal do reforçador
C_w	constante de empenamento da seção transversal do reforçador.

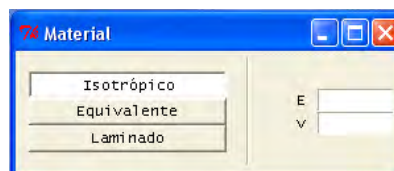
Considera-se que o material do reforçador é homogêneo e isotrópico. O campo C_w deve permanecer nulo ou vazio quando não há interesse em se incluir a parcela de rigidez de

torção não uniforme no cálculo da carga de flambagem. O botão **Reforçadores** é inativo para bordas livres ou engastadas.

Observe que as condições de contorno são identificadas de maneira interativa por meio da atualização gráfica da placa da janela inicial.



Ao se pressionar o botão **Material** da tela inicial, uma nova janela é aberta para definição do material da placa. Se o material é isotrópico, pressiona-se então o botão **Isotrópico**

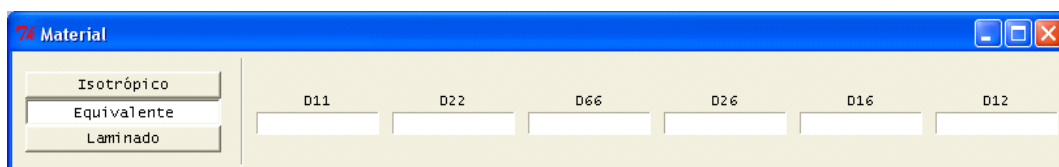


e fornecem-se as quantidades:

DATA Significado

E	módulo de Young da placa
ν	coeficiente de Poisson da placa.

No caso geral, escolhe-se o botão **Equivalente**

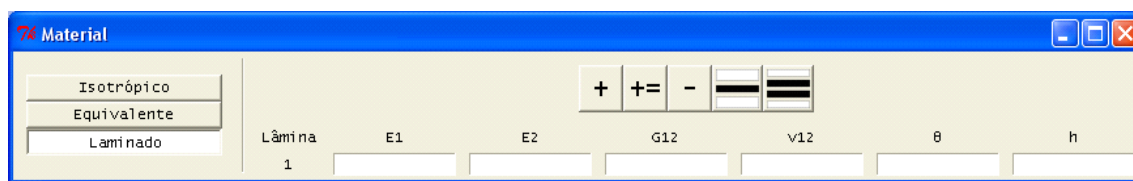


que habilita informar os elementos D_{ij} da rigidez de flexão $[D]$ da placa:

DATA	Significado
D_{11}	elemento (1, 1) da matriz de flexão $[D]$
D_{22}	elemento (2, 2) da matriz de flexão $[D]$
D_{66}	elemento (3, 3) da matriz de flexão $[D]$
D_{26}	elemento (2, 3) da matriz de flexão $[D]$
D_{16}	elemento (1, 3) da matriz de flexão $[D]$
D_{12}	elemento (1, 2) da matriz de flexão $[D]$.

O campo h da janela inicial torna-se inativo para se evitar inconsistência de entrada.

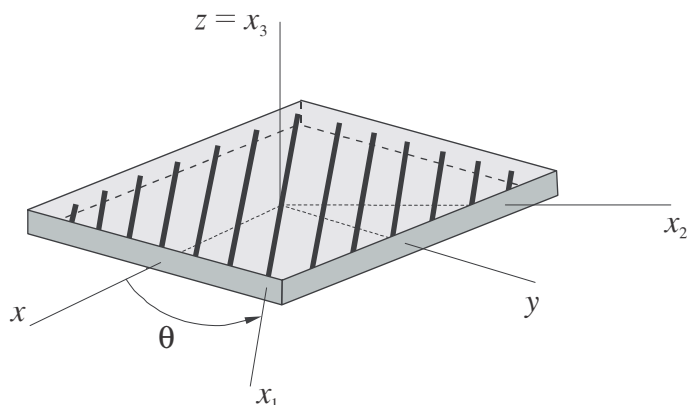
Quando o material da placa é laminado e o usuário não tem posse da rigidez de flexão equivalente $[D]$, opta-se pelo botão **Laminado** para a definição das propriedades do material ortotrópico de cada lâmina.



Os botões de auxílio da janela são responsáveis pela adição (+) de uma nova lâmina em branco, repetição (+ =) da última lâmina, exclusão (-) da última lâmina, adição das demais lâminas de modo a tornar o laminado simétrico com um número ímpar de lâminas, adição das demais lâminas de modo a tornar o laminado simétrico com um número par de lâminas. Após a definição do número de camadas, o campo h da janela inicial assume a espessura total do laminado. As constantes do material, orientação e espessura das lâminas devem ser fornecidas nos seguintes campos:

DATA	Significado
E_1	módulo de Young no eixo principal x_1
E_2	módulo de Young no eixo principal x_2
G_{12}	módulo de cisalhamento no plano x_1x_2
ν_{12}	coeficiente de Poisson no plano x_1x_2
θ	ângulo em graus entre o eixo global x e eixo principal x_1 , medido no sentido anti-horário a partir de x
h	espessura da lâmina.

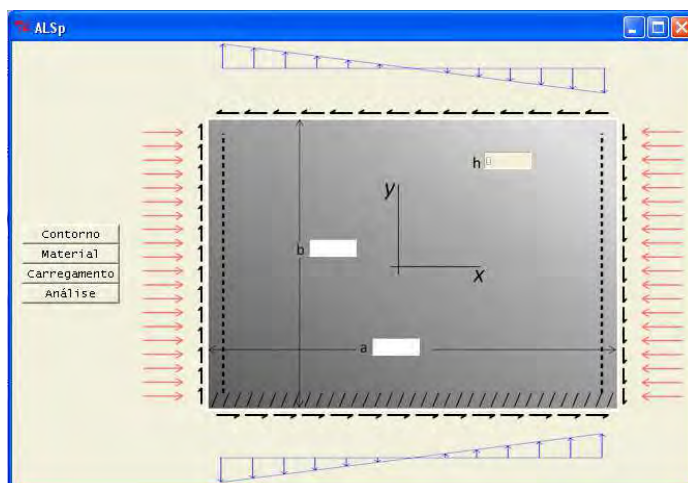
Os eixos principais do material $x_1x_2x_3$ são definidos conforme a figura.



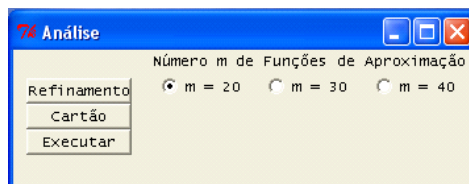
Ao se pressionar o botão **Carregamento**, abre-se a janela



na qual o usuário fornece o carregamento linear $p_{x0} + p_{x1}$ que atua na borda $x = \pm a/2$, o carregamento linear $p_{y0} + p_{y1}$ que atua na borda $y = \pm b/2$, o carregamento de cisalhamento uniforme p_{xy} . As quantidades p_{x0} e p_{y0} são as componentes uniformes (veja Figura 2.3), enquanto as quantidades p_{x1} e p_{y1} são as componentes de flexão (veja Figura 2.3). Se o valor do carregamento não é informado pelo usuário, o programa emprega valores padrão. Quando a carga é não nula e de natureza fixa, o usuário deve habilitar **Fixar**. Observe a identificação interativa por meio da atualização gráfica da janela inicial.



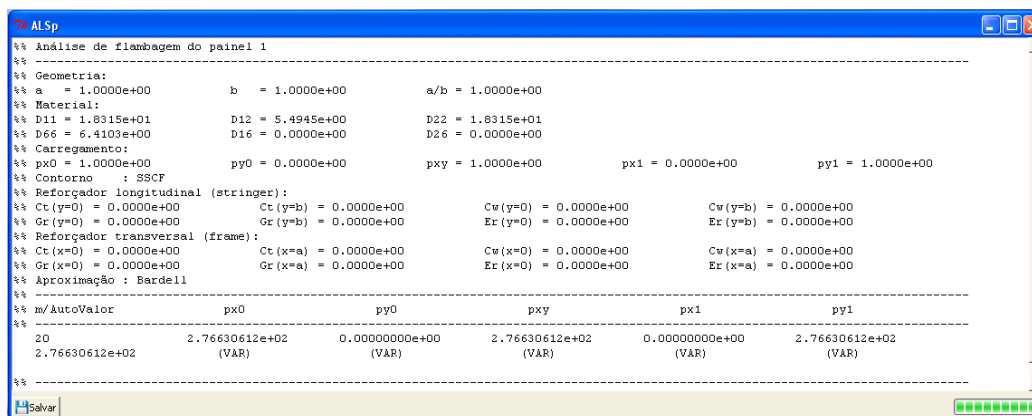
Ao se pressionar o botão **Análise**, abre-se a janela



na qual se permite:

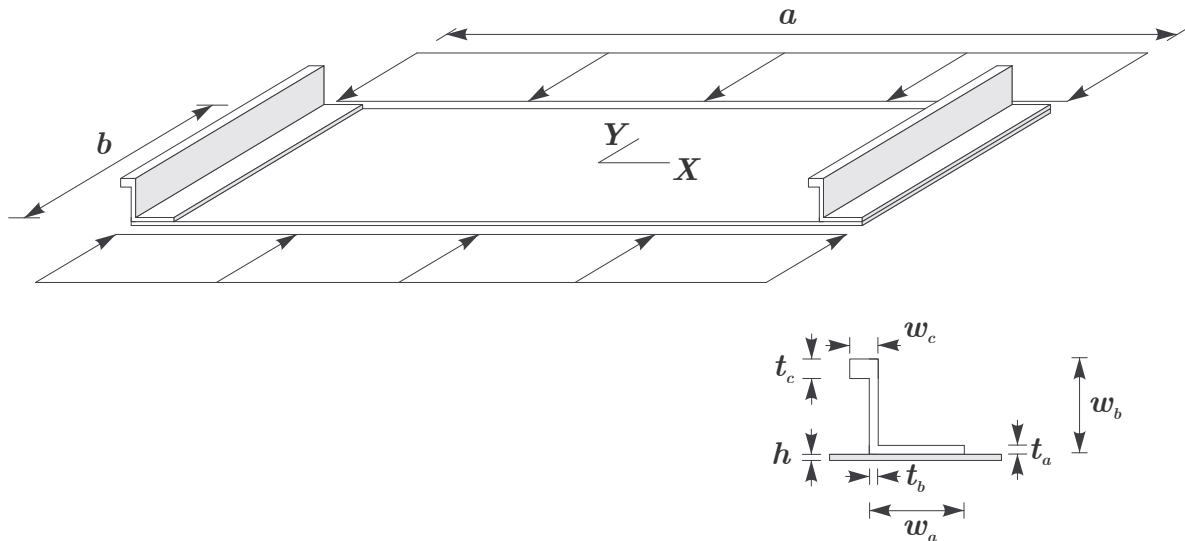
- escolher o número $m = 20, 30, 40$ de elementos em $\{F_i\}$ empregados na solução acionando-se o botão **Refinamento**, o que possibilita refinar a solução. O valor padrão é $m = 20$.
- inserir todos os dados de análise por meio de um único arquivo texto acionando-se o botão **Cartão**, o que possibilita analisar múltiplas configurações em série;
- analisar o(s) problema(s) de flambagem acionando-se o botão **Executar**.

Por fim, surge a janela de saída da ferramenta de análise ALS_p que consta de uma barra de progresso para acompanhar a resolução do problema e de um botão **Salvar** para guardar o arquivo de saída em formato texto.



3.2 Exemplo Ilustrativo

Toma-se como exemplo a placa



sujeita a um carregamento de compressão uniaxial de 1 N/mm, simplesmente apoiada e com reforçadores ao longo das bordas descarregadas.

Os dados da geometria e do material da placa são

$$\begin{aligned}
 a &= 840 \text{ mm} & b &= 700 \text{ mm} & h &= 1 \text{ mm} \\
 E &= 72400 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0,33.
 \end{aligned}$$

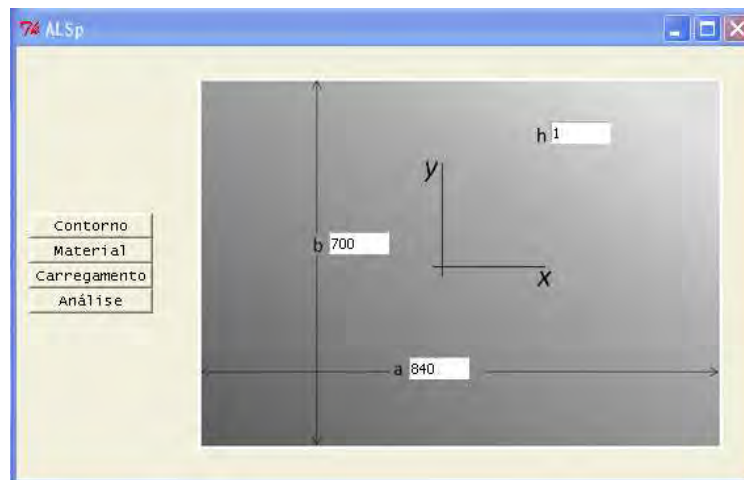
Para o reforçador, tem-se

$$\begin{aligned}
 w_a &= 19,05 \text{ mm} & w_b &= 19,05 \text{ mm} & w_c &= 5,00 \text{ mm} \\
 t_a &= 1,27 \text{ mm} & t_b &= 1,27 \text{ mm} & t_c &= 3,00 \text{ mm} \\
 E &= 71020 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0,33.
 \end{aligned}$$

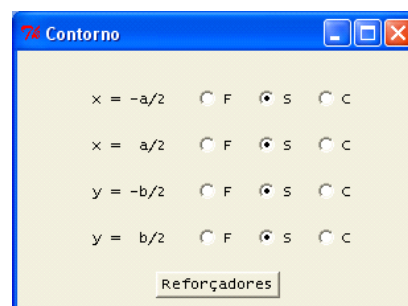
Empregando-se o pré-processador FEMAP (versão 8.2.1), obtêm-se as constantes

$$C_t = 52,77 \text{ mm}^4 \quad C_w = 12829,72 \text{ mm}^6.$$

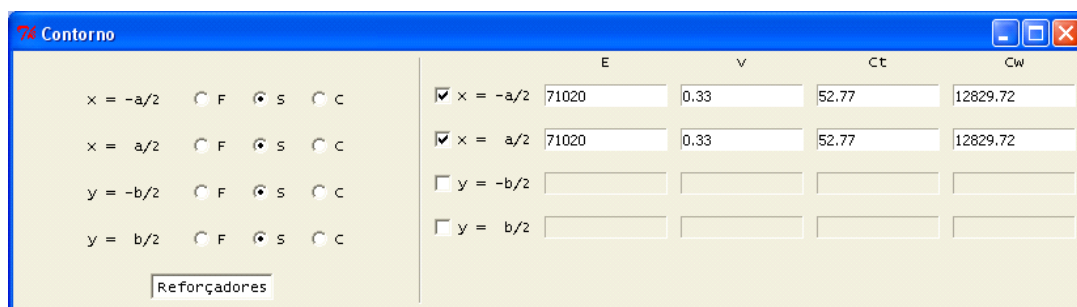
Primeiramente, inserem-se os dados do revestimento.



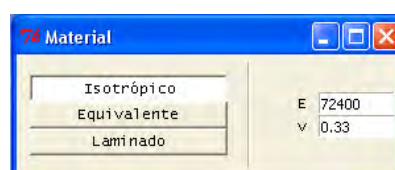
Logo após, inserem-se os dados do contorno.



Em seguida, passa-se para a definição das propriedades do reforçador.



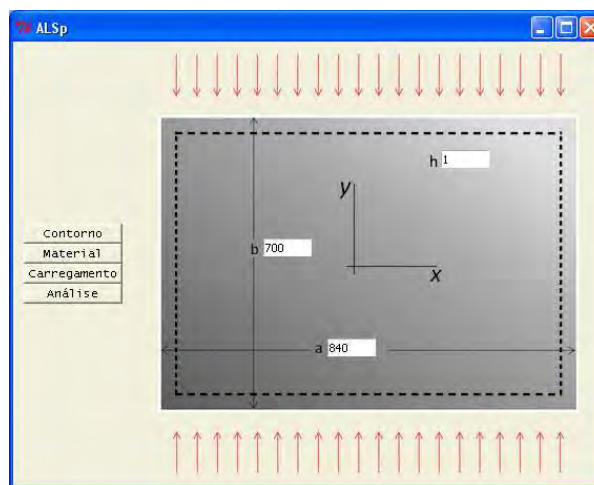
Neste modelo, considera-se a parcela de torção não uniforme do reforçador. As propriedades isotrópicas do material da placa são inseridas conforme janela.



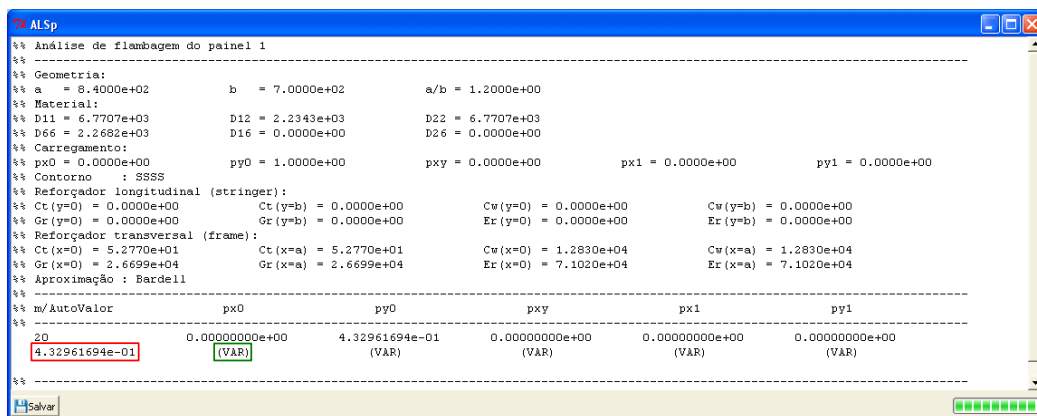
O carregamento é axial e unitário $p_{y0} = 1 \text{ N/mm}$ (valor padrão), sendo aplicado somente sobre as bordas $y = \pm b/2$.



Por fim, a placa da janela inicial toma a seguinte forma.



O refinamento padrão $m = 20$ será empregado, e se executa a análise. O resultado final é exibido na janela abaixo.



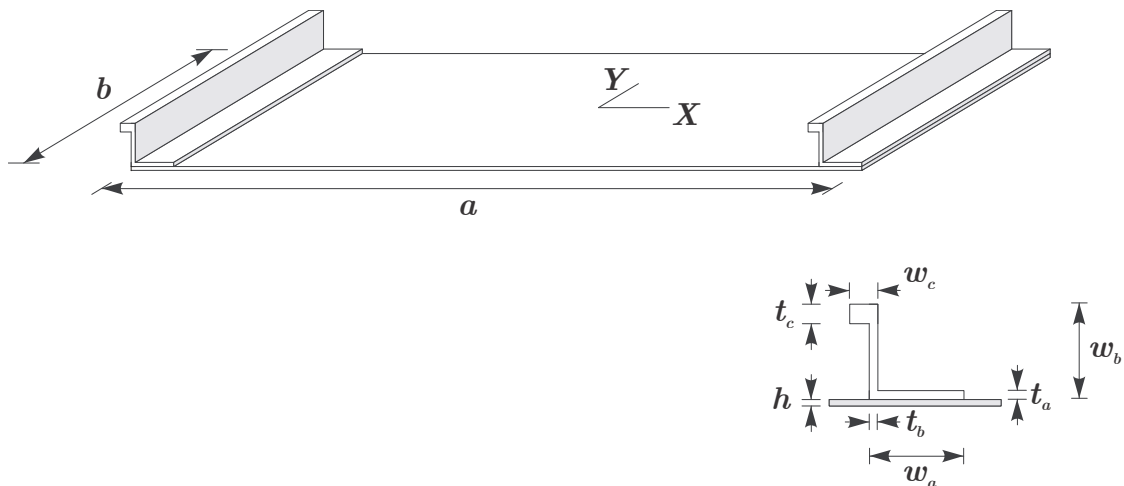
A quantidade em destaque vermelho refere-se ao autovalor obtido. Por sua vez, o termo em destaque verde indica que o carregamento p_{x0} não é fixado (FIXO) e sim uma variável (VAR) do problema de autovalor.

Capítulo 4

Aplicações Numéricas

A validação do procedimentos desenvolvidos para a determinação da carga de flambagem de painéis planos é realizada por meio de ensaios numéricos de modelos de elementos finitos. Para uma série de 225 (duzentas e vinte e cinco) placas, comparam-se os resultados obtidos pela solução do problema de autovalor linear (2.15) com os resultados de modelos de elementos finitos.

Analisa-se a placa retangular



sujeita aos carregamentos p_{x0} (compressão uniaxial), $p_{x0} + p_{y0}$ (compressão biaxial), p_{xy} (cisalhamento), p_{x1} (flexão), p_{y1} (flexão).

Os dados da geometria e do material da placa são:

$$a = 1000 \text{ mm} \quad h = 10 \text{ mm}$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0,3.$$

Nos ensaios, considera-se as razões $a/b = 1, 0; 1, 5; 2, 0; 2, 5$ e $3, 0$. Para o reforçador, tem-se

$$\begin{aligned} w_a &= 19,05 \text{ mm} & w_b &= 19,05 \text{ mm} & w_c &= 5,00 \text{ mm} \\ t_a &= 1,27 \text{ mm} & t_b &= 1,27 \text{ mm} & t_c &= 3,00 \text{ mm} \\ E &= 210000 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0,3. \end{aligned}$$

Empregando-se o pré-processador FEMAP (versão 10.3.1), obtêm-se as constantes

$$C_t = 52,75 \text{ mm}^4 \quad C_w = 12831,45 \text{ mm}^6.$$

Com relação à análise por elementos finitos, executa-se a solução SOL 105 (Linear Buckling) do pacote comercial de elementos finitos NASTRAN. O painel é modelado por elementos de placa do tipo CQUAD4. Na discretização, utilizam-se 64 (sessenta e quatro) elementos na direção de x e 64 elementos na direção de y . Os reforçadores são modelados por elementos de barra do tipo CBEAM, cuja área bruta $A_g \rightarrow 0$ para se levar em conta no modelo apenas a rigidez a torção do reforçador. Com relação à análise pela ferramenta ALS_p , adota-se uma discretização com refinamento $m = 20$, isto é, emprega-se o total de 20 (vinte) funções de aproximação nas direções x e y da placa (conjunto $\{F_i\}$ com 20 elementos).

Nos ensaios numéricos, avaliam-se as seguintes condições de contorno clássicas: SSSS (bordas simplesmente apoiadas), SSSF (bordas simplesmente apoiadas em $x = \pm a/2$ e em $y = -b/2$, livre em $y = b/2$), SSCF (bordas simplesmente apoiadas em $x = \pm a/2$, engastada em $y = -b/2$, livre em $y = b/2$), SSCC (bordas simplesmente apoiadas em $x = \pm a/2$, engastadas em $y = \pm b/2$), CCCC (bordas engastadas). Estuda-se, também, a influência dos *stringers* (reforçadores das bordas $y = \pm b/2$) e *frames* (reforçadores das bordas $x = \pm a/2$) na carga de flambagem de placas SSSS. Os resultados obtidos são sintetizados em tabelas e gráficos para fins de clareza.

4.1 Bordas clássicas

O parâmetro de comparação utilizado é o coeficiente de flambagem k :

$$k = \frac{pa^2}{\pi^2 D} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

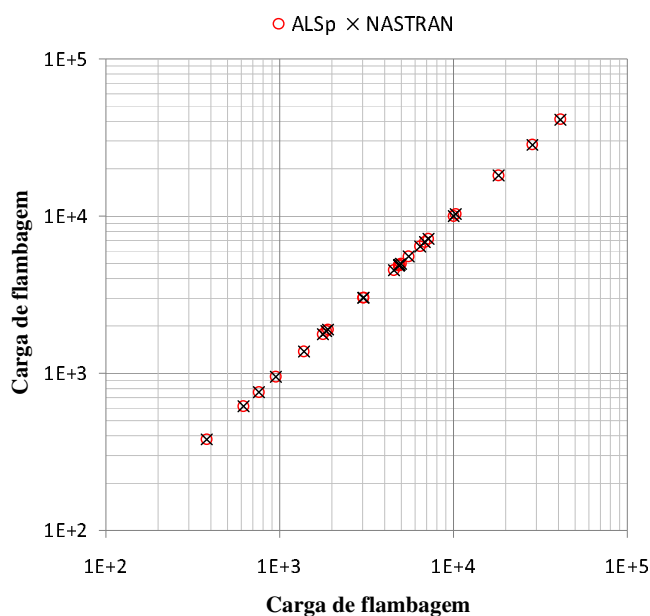
onde p é o carregamento associado.

Nas tabelas a seguir, apresentam-se os coeficientes de flambagem k_{x0} , k_{x0+y0} , k_{xy} , k_{x1} e k_{y1} obtidos pelo ALS_p para os carregamentos p_{x0} , $p_{x0} + p_{y0}$, p_{xy} , p_{x1} e p_{y1} . As quantidades entre parênteses referem-se à diferença percentual relativa entre o coeficiente de flambagem oriundo do ALS_p e ao coeficiente de flambagem de referência obtido pelo NASTRAN. Nas figuras a seguir, comparam-se diretamente as cargas de flambagem obtidas.

Placa SSSS

Coeficiente de flambagem para placas SSSS.

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	4,000 (0,01%)	2,000 (0,01%)	9,325 (-0,06%)	25,528 (0,01%)	25,528 (0,01%)
1,5	9,766 (0,03%)	3,250 (0,01%)	15,907 (-0,07%)	54,252 (0,02%)	23,882 (-0,02%)
2,0	16,000 (0,06%)	5,000 (0,01%)	26,184 (-0,08%)	95,527 (0,08%)	25,528 (-0,01%)
2,5	25,840 (0,08%)	7,250 (0,01%)	37,706 (-0,07%)	149,871 (0,14%)	29,099 (0,00%)
3,0	36,000 (0,12%)	10,000 (0,00%)	52,561 (-0,07%)	217,006 (0,19%)	33,817 (0,00%)

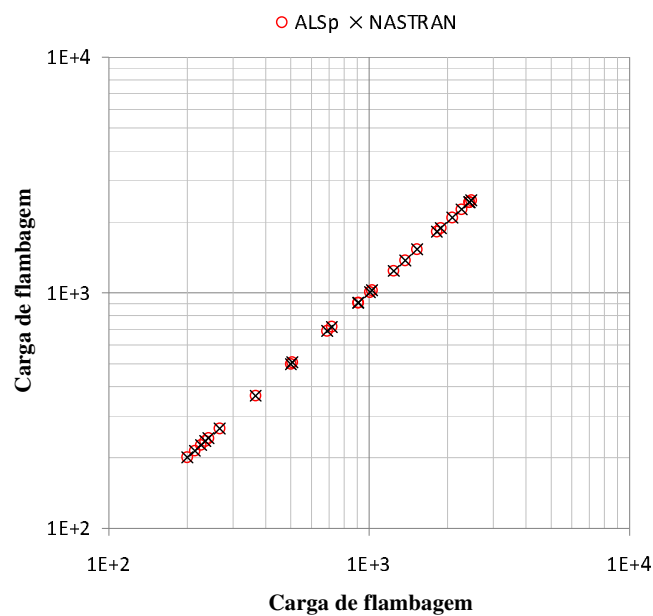


Valores da carga de flambagem para as placas SSSS analisadas.

Placa SSSF

Coeficiente de flambagem para placas SSSF.

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	1,402 (0,00%)	1,055 (0,01%)	4,769 (-0,01%)	2,631 (0,02%)	12,770 (0,06%)
1,5	1,930 (0,02%)	1,128 (0,02%)	5,401 (0,01%)	3,780 (0,03%)	12,989 (0,06%)
2,0	2,673 (0,04%)	1,190 (0,04%)	6,533 (0,03%)	5,304 (0,05%)	12,783 (0,04%)
2,5	3,629 (0,05%)	1,238 (0,05%)	8,058 (0,04%)	7,235 (0,06%)	11,916 (0,03%)
3,0	4,798 (0,07%)	1,273 (0,07%)	9,934 (0,04%)	9,584 (0,08%)	10,982 (0,04%)

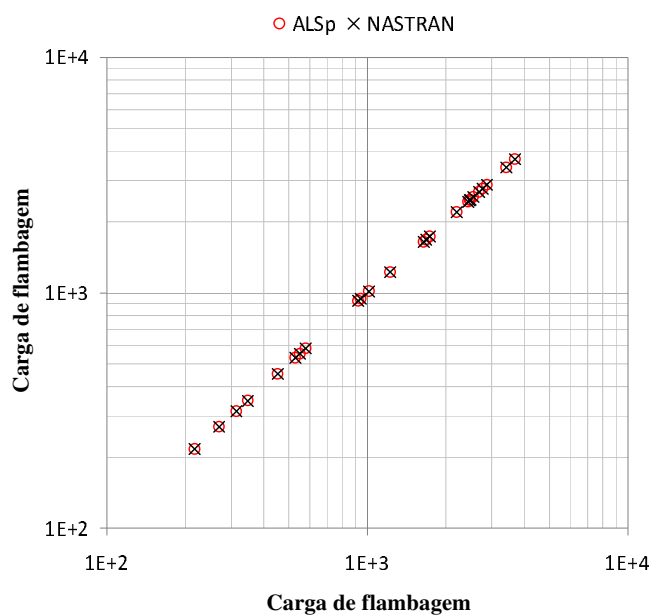


Valores da carga de flambagem para as placas SSSF analisadas.

Placa SSCF

Coeficiente de flambagem para placas SSCF.

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	1,653 (0,02%)	1,144 (0,03%)	4,966 (0,00%)	2,791 (0,03%)	12,837 (0,06%)
1,5	2,905 (0,05%)	1,420 (0,05%)	6,458 (0,02%)	4,868 (0,05%)	13,090 (0,06%)
2,0	5,344 (0,07%)	1,835 (0,06%)	9,148 (0,03%)	8,865 (0,07%)	13,454 (0,06%)
2,5	8,658 (0,06%)	2,382 (0,07%)	13,031 (0,02%)	14,587 (0,07%)	14,122 (0,06%)
3,0	11,621 (0,09%)	3,060 (0,07%)	17,979 (0,01%)	19,473 (0,11%)	15,154 (0,06%)

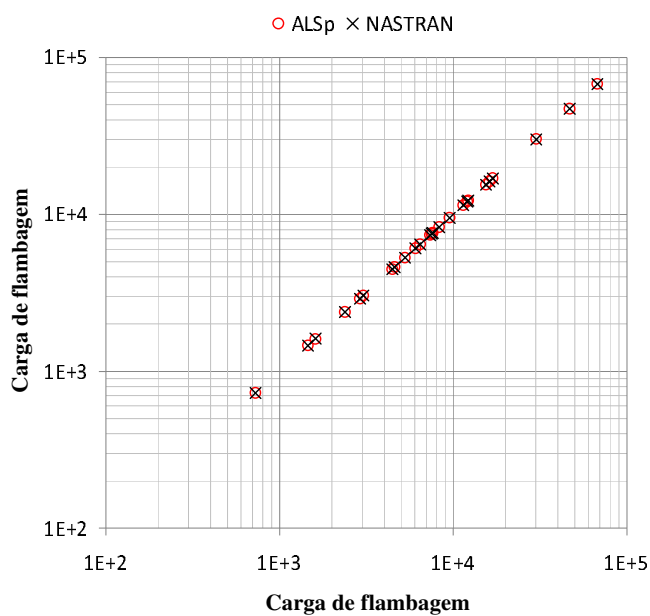


Valores da carga de flambagem para as placas SSCF analisadas.

Placa SSCC

Coeficiente de flambagem para placas SSCC.

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	7,691 (0,05%)	3,830 (0,00%)	12,565 (-0,07%)	39,672 (0,08%)	31,997 (-0,02%)
1,5	16,011 (0,09%)	8,477 (-0,02%)	24,259 (-0,09%)	89,262 (0,14%)	38,899 (-0,03%)
2,0	27,886 (0,13%)	15,299 (-0,04%)	40,027 (-0,09%)	158,687 (0,20%)	50,148 (-0,03%)
2,5	43,743 (0,16%)	23,492 (0,02%)	60,262 (-0,10%)	247,949 (0,27%)	64,483 (-0,03%)
3,0	63,497 (0,18%)	33,908 (0,01%)	85,334 (-0,11%)	357,047 (0,34%)	81,427 (-0,03%)

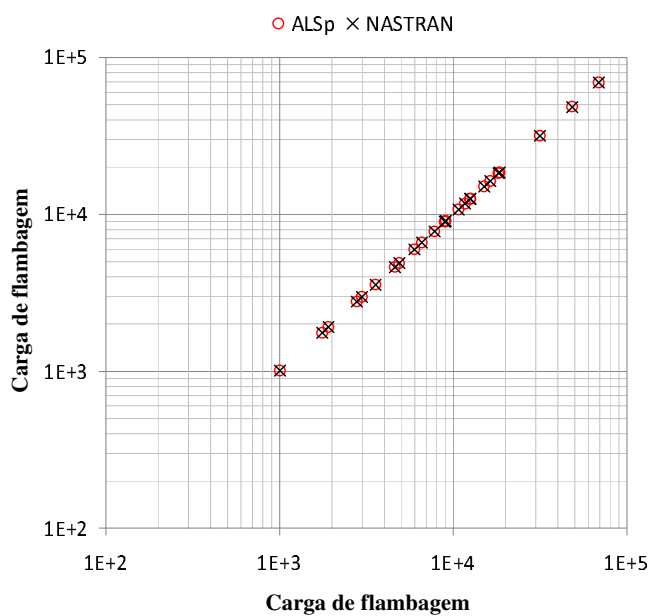


Valores da carga de flambagem para as placas SSCC analisadas.

Placa CCCC

Coeficiente de flambagem para placas CCCC.

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	10,074 (0,01%)	5,304 (0,00%)	14,642 (-0,07%)	47,754 (0,06%)	47,754 (0,06%)
1,5	18,789 (0,03%)	9,273 (-0,01%)	25,781 (-0,10%)	97,341 (0,10%)	56,663 (0,03%)
2,0	31,468 (0,06%)	15,694 (-0,03%)	40,992 (-0,10%)	166,582 (0,16%)	65,872 (0,02%)
2,5	47,332 (0,12%)	24,332 (-0,03%)	61,621 (-0,11%)	255,554 (0,22%)	79,417 (0,03%)
3,0	66,234 (0,16%)	34,745 (0,03%)	85,809 (-0,11%)	364,310 (0,28%)	96,231 (0,03%)



Valores da carga de flambagem para as placas CCCC analisadas.

4.2 Bordas sob reforço

Por último, analisam-se placas com bordas SSSS sujeitas a reforços. Para a geometria da seção transversal adotada, verifica-se a influência da rigidez de torção (uniforme e não-uniforme) dos reforçadores sobre a carga de flambagem do painel. Nas tabelas a seguir, apresentam-se os coeficientes de flambagem k_{x0} , k_{x0+y0} , k_{xy} , k_{x1} e k_{y1} obtidos pelo ALS_p para os carregamentos p_{x0} , $p_{x0} + p_{y0}$, p_{xy} , p_{x1} e p_{y1} . As quantidades entre parênteses referem-se à diferença percentual relativa entre o coeficiente de flambagem oriundo do ALS_p e ao coeficiente de flambagem de referência obtido pelo NASTRAN.

Coeficiente de flambagem para placas com *stringers* (torção uniforme).

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	4,000 (0,00%)	2,000 (0,00%)	9,325 (-0,07%)	25,532 (0,00%)	25,531 (0,00%)
1,5	9,767 (0,01%)	3,250 (0,00%)	15,909 (-0,08%)	54,261 (0,01%)	23,885 (-0,04%)
2,0	16,004 (0,03%)	5,001 (-0,01%)	26,187 (-0,09%)	95,551 (0,06%)	25,533 (-0,03%)
2,5	25,847 (0,05%)	7,251 (-0,01%)	37,712 (-0,09%)	149,919 (0,11%)	29,105 (-0,03%)
3,0	36,012 (0,09%)	10,001 (-0,01%)	52,571 (-0,09%)	217,085 (0,15%)	33,825 (-0,02%)

Coeficiente de flambagem para placas com *stringers* (torção não-uniforme).

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	4,000 (0,00%)	2,000 (0,00%)	9,325 (-0,07%)	25,532 (0,00%)	25,531 (0,00%)
1,5	9,767 (0,01%)	3,250 (0,00%)	15,909 (-0,08%)	54,262 (0,01%)	23,885 (-0,04%)
2,0	16,004 (0,03%)	5,001 (-0,01%)	26,187 (-0,09%)	95,553 (0,06%)	25,533 (-0,03%)
2,5	25,848 (0,05%)	7,251 (-0,01%)	37,713 (-0,09%)	149,924 (0,11%)	29,105 (-0,03%)
3,0	36,013 (0,09%)	10,001 (-0,01%)	52,572 (-0,09%)	217,093 (0,16%)	33,825 (-0,02%)

Coeficiente de flambagem para placas com *stringers* e *frames* (torção uniforme).

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	4,001 (-0,01%)	2,000 (-0,01%)	9,326 (-0,08%)	25,534 (-0,01%)	25,534 (-0,01%)
1,5	9,768 (0,00%)	3,251 (-0,01%)	15,910 (-0,09%)	54,267 (0,00%)	23,888 (-0,05%)
2,0	16,005 (0,02%)	5,001 (-0,01%)	26,188 (-0,09%)	95,561 (0,05%)	25,536 (-0,04%)
2,5	25,850 (0,04%)	7,251 (-0,01%)	37,714 (-0,09%)	149,934 (0,10%)	29,109 (-0,04%)
3,0	36,016 (0,08%)	10,002 (-0,01%)	52,572 (-0,09%)	217,106 (0,14%)	33,830 (-0,04%)

Coeficiente de flambagem para placas com *stringers* e *frames* (torção não-uniforme).

a/b	k_{x0}	k_{x0+y0}	k_{xy}	k_{x1}	k_{y1}
1,0	4,001 (-0,01%)	2,000 (-0,01%)	9,326 (-0,08%)	25,534 (-0,01%)	25,534 (-0,01%)
1,5	9,768 (0,00%)	3,251 (-0,01%)	15,910 (-0,08%)	54,267 (0,00%)	23,888 (-0,05%)
2,0	16,005 (0,02%)	5,001 (-0,01%)	26,188 (-0,09%)	95,563 (0,05%)	25,537 (-0,04%)
2,5	25,850 (0,04%)	7,251 (-0,01%)	37,714 (-0,09%)	149,940 (0,10%)	29,109 (-0,04%)
3,0	36,017 (0,08%)	10,002 (-0,01%)	52,573 (-0,09%)	217,117 (0,15%)	33,830 (-0,03%)

Observe que, para a geometria do reforçador empregado, a presença dos reforços praticamente não altera a carga de flambagem para uma placa SSSS.

Capítulo 5

Conclusões e Comentários Finais

Uma formulação de flambagem de placas com um campo de deslocamento dado pela teoria de Kirchhoff é empregada no desenvolvimento de um modelo que considera a influência dos reforços de borda na determinação da carga de flambagem. A placa está sujeita aos carregamentos usuais de membrana. A solução do modelo é obtida empregando-se o método de Ritz tendo como base funções de aproximação de natureza hierárquica, nos moldes do que é apresentado por Bardell (1991). Tira-se proveito de tal procedimento simulando-se qualquer condição de contorno clássica por meio de uma seleção adequada das funções de base. Uma expressão geral para a matriz constitutiva $[R_c]$ e geométrica $[R_g]$ é obtida. Carregamentos fixos em relação ao problema de autovalor são corretamente incluídos na formulação.

Uma ferramenta de análise batizada ALS_p (Analysis of Laminated Shells and Plates) é desenvolvida para auxílio na determinação da carga de flambagem de placas para fins de projeto. Tal ferramenta torna obsoleto o emprego de ábacos de flambagem e supera em velocidade e simplicidade o uso de programas de elementos finitos.

Os exemplos apresentados evidenciam as características essenciais do método de Ritz com funções de natureza hierárquica: um balanço entre simplicidade e precisão na determinação da carga de flambagem linear de placas.

O presente trabalho pode ser tomado como base para o estudo da instabilidade de: (i) placas com anisotropia mais severas, considerando uma formulação mista no que diz respeito à rigidez de flexão; (ii) painéis cilíndricos sob bordas reforçadas. É interessante observar que pode-se facilmente adaptar o modelo desenvolvido para análise de vibração livre de placas.

Referências

- ARBOCZ, J., 1991, “Towards an improved design procedure for buckling critical structures”, *Buckling of Shell Structures, on Land, in the Sea and in the Air*, Edited by J. F. Jullien, Elsevier, London, pp. 270–276.
- BARDELL, N. S., 1991, “Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method”, *J. Sound. Vib.*, vol. 151, pp. 263–289.
- BAZANT, Z. P., and CEDOLIN, L., 2003, *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories*, Dover, Mineola.
- BEDAIR O. K., 1998, “A contribution to the stability of stiffened plates under uniform compression”, *Comput. Struct.*, vol. 66, pp. 535–570.
- BISAGNI, C., and VESCOVINI, R., 2009, “Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 47, pp. 318–334.
- BRUSH, D. O., and ALMORTH, B. O., 1975, *Buckling of bars, plates, and shells*, McGraw-Hill, New York.
- BUERMANN, P., ROLFES, R., TESSMER, J., and SCHAGERL, M., 2006, “A semi-analytical model for local post-buckling analysis of stringer- and frame-stiffened cylindrical panels”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 44, pp. 102–114.
- BYKLUM, E., and AMDAHL, J., 2002, “A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 40, pp. 925–953.
- CAMELO, F. F., 2009, *Uma solução analítica para a flambagem local do revestimento de asas*, Trabalho de Graduação, ITA, São José dos Campos.

- FUJIKUBO, M., and YAO, T., 1999, “Elastic local buckling strength of stiffened plate considering plate/stiffener interaction and welding residual stress”, *Mar. Struct.*, vol. 12, pp. 543–564.
- GALAMBOS, T. V., 1998, *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley, New York.
- HUGHES, O. F., GHOSH, B., and CHEN Y., 2004, “Improved prediction of simultaneous local and overall buckling of stiffened panels”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 42, pp. 827–856.
- NATH, Y., and SANDEEP, K., 2000, “Nonlinear analysis of doubly curved shells: an analytical approach”, *Sādhanā*, vol. 25, pp. 343–352.
- PAIK, K. J., and THAYAMBALLI, A. K., 2000, “Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 37, pp. 27–55.
- PAIK, K. J., and LEE, M. S., 2005, “A semi-analytical method for the elastic–plastic large deflection analysis of stiffened panels under combined biaxial compression/tension, biaxial in-plane bending, edge shear, and lateral pressure loads”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 43, pp. 375–410.
- PETYT, M., 2010, *Introduction to finite element vibration analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York.
- REDDY, J. N., 1999, *Theory and analysis of elastic plates*, Taylor and Francis, Philadelphia.
- REDDY, J. N., 2004, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC Press, Boca Raton.
- SZILARD, R., 2004, *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*, John Wiley, Hoboken.
- THOMPSON, J. M. T., and HUNT, G. W., 1973, *A general theory of elastic stability*, John Wiley, London.
- WHITNEY, J. M., 1987, *Structural analysis of laminated anisotropic plates*, Technomic Publishing Company, Lancaster.

YVES, F. B. S., 2009, *Flambagem global de painéis reforçados*, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TC</p>	^{2.} DATA <p style="text-align: center;">18 de novembro de 2014</p>	^{3.} REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/TC-036/2014</p>	^{4.} N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">50</p>			
^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: Flambagem de painéis planos.						
^{6.} AUTOR(ES): Ian Lima Barreto						
^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA						
^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Flambagem; Placas Retangulares; Reforçadores; Método de Ritz; Ferramenta						
^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Placas reforçadas; Placas retangulares; Metodo de média de Ritz; Flambagem; Ferramentas; Engenharia materiais.						
^{10.} APRESENTAÇÃO: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 60%;"></td> <td style="width: 20%; text-align: center;">X Nacional</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">Internacional</td> </tr> </table> ITA, São José dos Campos. Curso de Graduação em Engenharia Civil-Aeronáutica. Orientador: Francisco Alex Correia Monteiro. Publicado em 2014.					X Nacional	Internacional
	X Nacional	Internacional				
^{11.} RESUMO: Uma formulação de flambagem de placas é empregada no desenvolvimento de um modelo que considera a influência dos reforços de borda na determinação da carga de flambagem. A placa está sujeita a carregamentos de membrana lineares. A solução emprega o método de Ritz tendo como base funções de aproximação de natureza hierárquica obtidas dos polinômios de Legendre. Qualquer condição de contorno clássica é simulada por meio de uma seleção adequada das funções de base. Valida-se o procedimento proposto por meio de resultados de modelos de elementos finitos. Uma ferramenta de análise batizada ALSp (Analysis of Laminated Shells and Plates) é desenvolvida para auxílio na determinação da carga de flambagem de placas para fins de projeto.						
^{12.} GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO						