

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Fábio Spezzano Toniolo

**Programa para Análise e Verificação de Estabilidade
de Pilares de Concreto Armado**

Trabalho de Graduação

2006

Infra-Estrutura

Fábio Spezzano Toniolo

**Programa para Análise e Verificação de Estabilidade
de Pilares de Concreto Armado**

Orientador

Prof. Dr. Flávio Mendes Neto (ITA)

Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica

São José dos Campos

Centro Técnico Aeroespacial

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Toniolo, Fábio Spezzano

Programa para Análise e Verificação de Estabilidade de Pilares de Concreto Armado / Fábio Spezzano Toniolo.

São José dos Campos, 2006.

74f.

Graduação de Graduação – Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica. – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2006. Orientador: Prof. Dr. Flávio Mendes Neto. .

1. Concreto Armado. 2. Análise Estrutural. 3. Diferenças Finitas. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

TONIOLO, Fábio Spezzano. **Programa para Análise e Verificação de Estabilidade de Pilares de Concreto Armado**. 2006. 74f. Trabalho de conclusão de curso. (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Fábio Spezzano Toniolo

TÍTULO DO TRABALHO: Programa para Análise e Verificação de Estabilidade de Pilares de Concreto Armado.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação / 2006

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Fábio Spezzano Toniolo

R. Dom Bernardo Nogueira, 851, casa 11

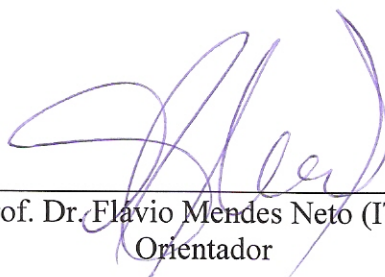
CEP 04134-001 – São Paulo–SP

**PROGRAMA PARA ANÁLISE E VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE
DE PILARES DE CONCRETO ARMADO**

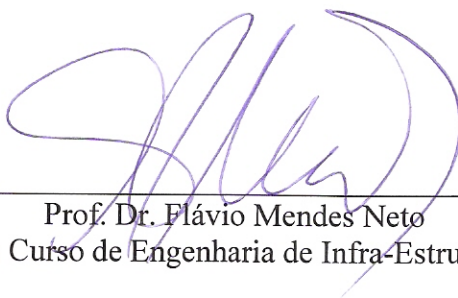
Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação



Fábio Spezzano Toniolo
Autor



Prof. Dr. Flávio Mendes Neto (ITA)
Orientador



Prof. Dr. Flávio Mendes Neto
Coordenador do Curso de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica

São José dos Campos, 23 de novembro de 2006

Agradecimentos

Aos meus pais e familiares, pela paciência demonstrada ao longo de tantos anos de estudo e pela prontidão em me ajudar em qualquer momento.

A Carina, por todo auxílio, apoio, ensinamentos e motivação sem os quais não seria possível chegar ao final deste curso.

Ao orientador deste trabalho, pela disposição e prontidão em responder as dúvidas sobre o trabalho.

A todos os amigos que moraram comigo durante os cinco anos de curso, pela paciência demonstrada, ensinamentos e também pelas brigas, que sempre nos deixam alguma lição.

Aos colegas da turma, inclusive aqueles que se distanciaram ao longo da jornada, pela criação de um ambiente descontraído, amigável e quase familiar, onde podíamos sempre contar com a ajuda dos outros para qualquer problema e que dificilmente encontrarei similar.

Aos amigos Pedro e Thiago (*in memoriam*), pela amizade de sempre e questionamentos quase sempre apropriados.

Resumo

Este trabalho apresenta a elaboração de um programa de computador didático para análises de pilares de concreto armado. A principal funcionalidade do *software* é a verificação da estabilidade da coluna através do cálculo de diferenças finitas; também é oferecido ao usuário o dimensionamento da área de armadura e os cálculos de verificação e esforços resistentes em uma seção transversal qualquer. Neste texto encontra-se o manual operacional do programa, alguns exemplos e também o modelamento teórico abordado. Espera-se que o *software* possa ser utilizado por estudantes em cursos de concreto estrutural assim como em escritórios de cálculo.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivo	13
1.2 O concreto armado	14
1.2.1 Convenção	14
1.2.2 Concreto	15
1.2.3 Aço	17
1.2.4 ELU	18
1.3 Organização do trabalho	19
2 O <i>software</i>	20
2.1 Desenvolvimento	20
2.2 Funcionalidades	20
2.2.1 Esforços resistentes	22
2.2.2 Verificação	24

2.2.3	Cálculo de estabilidade	25
2.2.4	Dimensionamento	26
3	MANUAL DO USUÁRIO	28
3.1	Identificação dos elementos	28
3.2	Entrada de dados	31
3.2.1	Seção Transversal	31
3.2.2	Materiais	33
3.2.3	Coluna e cargas	35
3.3	Cálculos	36
3.3.1	Esforços Resistentes	36
3.3.2	Verificação	37
3.3.3	Diferenças finitas	38
3.3.4	Dimensionamento	39
3.4	Sistema de unidades e precisões	39
3.5	Salvar e Abrir	40
4	ALGUNS EXEMPLOS	42
4.1	Esforços resistentes	43
4.1.1	Exemplo 1	43
4.1.2	Exemplo 2	45
4.2	Verificação	47
4.2.1	Exemplo 3	47
4.2.2	Exemplo 4	49
4.3	Cálculo de estabilidade	51
4.3.1	Exemplo 5	51
4.3.2	Exemplo 6	54

5	CONCLUSÕES	55
5.1	Sugestões de continuidade do trabalho	55
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
	ANEXO A – ESFORÇOS RESISTENTES NO CONCRETO	58
	ANEXO B – CÁLCULO DE VERIFICAÇÃO	62
B.1	Método de Newton-Raphson no cálculo de verificação	62
B.1.1	Concreto	64
B.1.2	Aço	67
B.2	Algoritmo do processo de verificação	67
	ANEXO C – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	69
	ANEXO D – MÉTODO DA BISSECÇÃO NO DIMENSIONAMENTO	73
	GLOSSÁRIO	75

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Aumento da resistência do concreto ao longo do tempo	15
FIGURA 1.2 – Curva normal demonstrando a determinação do f_{ck}	15
FIGURA 1.3 – Diagrama Tensão-Deformação do concreto.	17
FIGURA 1.4 – Diagrama Tensão-Deformação do aço.	18
FIGURA 2.1 – Semelhança entre um polígono de 20 lados e uma circunferência . . .	21
FIGURA 2.2 – Esquema do método de Newton-Raphson	25
FIGURA 3.1 – Tela inicial do programa	28
FIGURA 3.2 – Aba <i>Seção Transversal</i>	29
FIGURA 3.3 – Aba <i>Materiais</i>	29
FIGURA 3.4 – Aba <i>Coluna</i>	30
FIGURA 3.5 – Aba <i>Unidades e Precisoões</i>	30
FIGURA 3.6 – Itens da aba <i>Seção Transversal</i>	31
FIGURA 3.7 – Exemplos de ordenação dos vértices em seções vazadas	32
FIGURA 3.8 – Ferramenta para gerar seções circulares	33
FIGURA 3.9 – Itens da aba <i>Materiais</i>	34
FIGURA 3.10 – Itens da aba <i>Coluna</i>	35
FIGURA 3.11 – Ferramenta para cargas distribuídas	36
FIGURA 3.12 – Tela de cálculo dos esforços resistentes	37

FIGURA 3.13 –Tela de cálculo de verificação	38
FIGURA 3.14 –Tela de cálculo de dimensionamento	39
FIGURA 3.15 –Itens da aba <i>Unidades e Precisoões</i>	40
FIGURA 4.1 – Seção transversal utilizada no Exemplo 1	43
FIGURA 4.2 – Seção transversal utilizada no Exemplo 2	45
FIGURA 4.3 – Seção transversal utilizada no Exemplo 3	47
FIGURA 4.4 – Seção transversal utilizada no Exemplo 4	49
FIGURA 4.5 – Seção transversal utilizada no Exemplo 5	51
FIGURA 4.6 – Posição deformada da coluna do Exemplo 5 nos planos “x-z” e “y-z”	53
FIGURA C.1 –Esquema mostrando a posição deformada da coluna	70

Lista de Tabelas

TABELA 4.1 – Parâmetros do concreto utilizado nos exemplos	42
TABELA 4.2 – Parâmetros do aço utilizado nos exemplos	42
TABELA 4.3 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 1	43
TABELA 4.4 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 1	43
TABELA 4.5 – Resultados do cálculo de esforços resistentes no Exemplo 1	44
TABELA 4.6 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 2	45
TABELA 4.7 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 2	46
TABELA 4.8 – Resultados do cálculo de esforços resistentes no Exemplo 2	46
TABELA 4.9 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 3	47
TABELA 4.10 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 3	48
TABELA 4.11 – Resultados do cálculo de verificação no Exemplo 3	48
TABELA 4.12 – Parâmetros da seção transversal utilizada no Exemplo 4	49
TABELA 4.13 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 4	50
TABELA 4.14 – Resultados do cálculo de verificação no Exemplo 4	50
TABELA 4.15 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 5	51
TABELA 4.16 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 5	51
TABELA 4.17 – Esforços aplicados na coluna do Exemplo 5	52
TABELA 4.18 – Flecha no topo da coluna do Exemplo 5	52
TABELA 4.19 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 6	54

TABELA 4.20 – Flecha no topo da coluna do Exemplo 6 54

Lista de Abreviaturas e Siglas

CG centro de gravidade

ELU Estado Limite Último

FOC Flexão Oblíqua Composta

Lista de Símbolos

a_1, g_i, h_i	funções auxiliares
A_c, A_s, A_{si}	área de concreto, área total de aço, área de aço da barra i
B_{ref}	base de referência da seção transversal
D_c, D_s	derivada da função tensão-deformação do concreto, idem para o aço
E_s	módulo de elasticidade do aço
f	adimensional representando a diferença entre parâmetros
$\tilde{f}(\tilde{x})$	vetor diferença entre esforços aplicados e resistidos
f_c	resistência a compressão do concreto
f_{ck}	resistência característica a compressão do concreto aos 28 dias
f_{ji}	funções auxiliares na determinação dos esforços resistentes no concreto e suas derivadas
f_{yd}	resistência de cálculo do escoamento do aço
f_{yk}	resistência característica do escoamento do aço
$\bar{h}(i)$	altura de uma seção transversal i na coluna
I_n, J_n, K_n	funções integrais do diagrama tensão-deformação do concreto
I_{xx}, I_{yy}	momentos de inércia da seção transversal
I_{xy}	produto de inércia da seção transversal
J, J_c, J_s	matriz jacobiana, do concreto, do aço
L	comprimento do pilar
M_x, M_y	momentos fletores nas direções x e y

M_{x_c}, M_{y_c}	momentos fletores no concreto
M_{x_s}, M_{y_s}	momentos fletores no aço
N	esforço normal aplicado no centro de gravidade da seção transversal
N_c, N_s	esforço normal no concreto e no aço
R	índice representando esforço resistente
x, y	coordenadas no plano da seção transversal
x_i, y_i	coordenadas do vértice i da seção transversal
x_{s_i}, y_{s_i}	coordenadas do centro da barra i
$\bar{x}(i), \bar{y}(i)$	posição deformada de uma seção i na coluna
γ_c, γ_s	fator de ponderação do concreto, do aço
ε	deformação genérica
ε_0	deformação no centro de gravidade da seção transversal
ε_c	maior deformação no concreto
ε_i	deformação no ponto i
ε_{yd}	deformação de cálculo para o escoamento do aço
φ	direção da linha neutra (sentido trigonométrico)
θ	curvatura da seção transversal
κ_x	curvatura na direção x
κ_y	curvatura na direção y
$\sigma(\varepsilon)$	tensão para uma deformação genérica
σ_{cd}	tensão de cálculo do concreto
Δ	diferença

1 Introdução

1.1 Objetivo

Com o significativo aumento da resistência dos materiais nas últimas décadas, é também observado o aumento da esbeltez (relação entre o comprimento e a seção transversal) com que os pilares são construídos, o que pode ocasionar problemas quanto à estabilidade. Felizmente, acompanhando o aumento da esbeltez dos pilares construídos, ou até mesmo de forma mais rápida, veio a evolução computacional, permitindo que cálculos mais complexos sejam realizados de forma cada vez mais veloz.

Antes do progresso computacional, os cálculos de colunas de concreto armado eram feitos manualmente, e para possibilitá-los, hipóteses e métodos simplificados eram impostos devido a grande quantidade de cálculos necessários. Seções transversais eram verificadas de forma não exata, os valores eram tabelados, eram poucas as seções analisadas e os efeitos de segunda ordem muitas vezes eram desprezados. Alguns destes métodos ([MEDEIROS, 2004](#)) ainda podem ser encontrados em alguns livros, como por exemplo em ([SANTOS, 1981](#)). Inserido neste contexto, este trabalho se propõe a desenvolver e apresentar um programa de computador simples, gráfico e didático.

Desenvolvido de forma tal que possa ser utilizado tanto em salas de aula quanto em escritórios de cálculo, o programa realiza a análise de estabilidade de pilares isostáticos de concreto armado quando submetidos a diversos esforços.

1.2 O concreto armado

O concreto armado é um material de construção bastante utilizado nas estruturas de edificações, principalmente a partir do final do século XIX, como substituto das estruturas metálicas. Sua acidental descoberta geralmente é atribuída ao jardineiro francês Joseph Monier, em torno do ano 1860. Porém existem registros de sua utilização já em 1854, na Inglaterra ([WIKIPEDIA, 2006](#)).

O concreto armado se difere do concreto simples pelo fato de possuir um conjunto de barras de aço, chamado de armadura, que é responsável por suportar os esforços de tração a qual a estrutura é sujeita, porém esta também pode auxiliar a suportar os esforços de compressão. Os principais fatores do sucesso da associação do concreto às barras de aço são:

- o valor do coeficiente de dilatação térmica dos dois materiais são praticamente idênticos, o que evita tensões internas com a variação de temperatura;
- o pH alcalino do cimento permite a formação de uma película inerte nas barras de aço (fenômeno conhecido como passivação), que as protege da oxidação;
- quando ocorre a contração do concreto, uma forte adesão química é criada entre os materiais. As nervuras existentes na superfície das barras também cooperam na adesão da armadura com o concreto evitando o seu deslizamento no interior do concreto.

Além de suas aplicações em edificações, o concreto armado também é utilizado em barragens, fundações, pontes, reservatórios, pavimentos e diversas outras situações.

1.2.1 Convenção

Em todo este trabalho será adotada a convenção de sinais habitual utilizada para o concreto armado:

- sinal positivo (+) para tensões de compressão e deformações de encurtamento;
- sinal negativo (-) para tensões de tração e deformações de alongamento.

1.2.2 Concreto

Juntamente com a água, o cimento Portland é o aglomerante usado na formação da pasta de cimento, onde ocorre a reação química conhecida como hidratação, que resulta na resistência do material. A adição de agregado miúdo e graúdo à pasta de cimento e água dá origem ao concreto.

A valor da resistência do concreto, f_c , cresce rapidamente nos primeiros dias da cura, tendendo de forma assintótica para um valor final. É convencional que o valor observado aos 28 dias seja admitido como a resistência nominal do material, visto que já apresenta cerca de 90% do valor final. A Figura 1.1 ilustra tal comportamento.

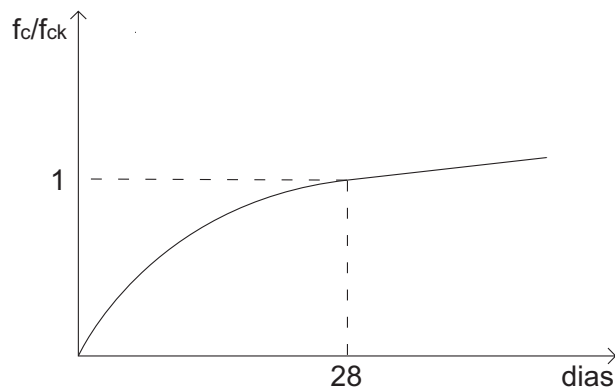


FIGURA 1.1 – Aumento da resistência do concreto ao longo do tempo

A resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) é obtida através de diversos (n) ensaios em corpos de prova, que definem uma curva normal. O valor é definido como aquele na curva só não superado por 5%, como pode ser visto na Figura 1.2.

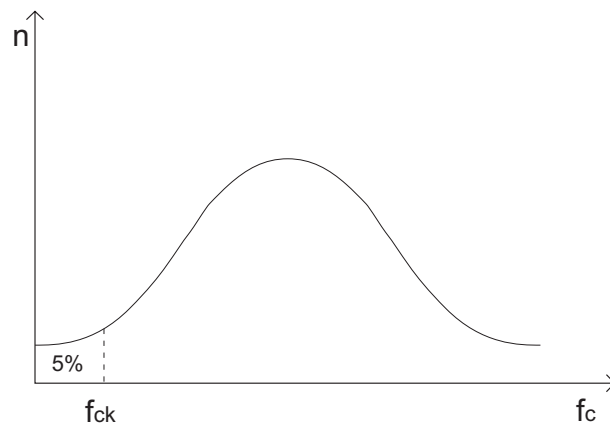


FIGURA 1.2 – Curva normal demonstrando a determinação do f_{ck}

Outra característica que deve ser considerada é a ponderação entre o aumento da

resistência do material ao longo do tempo, e o aumento da deformação devido a cargas permanentes. Esse efeito foi bem estudado e relatado por Rüsç em (RÜSCH, 1960). Um fator deve ser multiplicado à tensão para que estes efeitos sejam considerados (é adotado o valor 0,85)

Levando os fatos acima em consideração, a resistência do concreto será dada por:

$$\sigma_{cd} = \frac{0,85f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1.1)$$

onde γ_c é o fator de ponderação do concreto (usualmente adota-se o valor 1,4, já que este é o valor recomendado pela norma (ABNT, 2003)).

Para os cálculos estruturais admite-se o seguinte comportamento do concreto quando submetido a tensões:

- não há resistência alguma para esforços de tração;
- até ser atingida a deformação $2^0/_{00}$ na compressão, a tensão tem o comportamento de uma parábola, que sai da origem e em $2^0/_{00}$ assume o valor σ_{cd} com derivada igual a zero;
- a partir de $2^0/_{00}$ a função assume valor constante e igual a σ_{cd} .

A equação

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4 - \varepsilon)}{4} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (1.2)$$

e o gráfico mostrado na Figura 1.3 demonstram esse comportamento.

A nomenclatura utilizada para o concreto é C##, onde ## corresponde ao valor f_{ck} do material em MPa. Por exemplo, o concreto C20 possui 20 MPa de resistência característica à compressão.

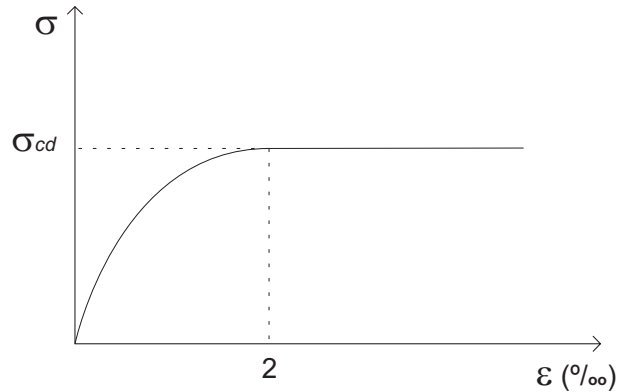


FIGURA 1.3 – Diagrama Tensão-Deformação do concreto.

1.2.3 Aço

O aço, como já dito anteriormente, é o material responsável por resistir às tensões de tração da estrutura, apesar de também poder suportar esforços de compressão junto com o concreto. Sua tensão de escoamento utilizada em cálculo é a tensão nominal de escoamento dividida pelo fator de ponderação γ_s (geralmente é utilizado o valor 1,15, de acordo com a norma (ABNT, 2003)):

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (1.3)$$

A deformação (de cálculo) onde o escoamento teórico se inicia, tanto na compressão como na tração, é dada por:

$$\varepsilon_{yd} = 1000 \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (1.4)$$

onde E_s é o módulo de Young do aço (geralmente é adotado o valor 210 GPa). A fração é multiplicada por 1000 para que a deformação esteja em ‰.

A relação entre tensão e deformação nos aços classe A é dada da seguinte maneira:

- o comportamento da tração é simétrico (em relação à origem) ao da compressão;
- é linear entre a origem e o ponto de escoamento;
- a partir do ponto de escoamento a tensão é constante.

A equação

$$\sigma = \begin{cases} -f_{yd} & \text{se } \varepsilon \leq -\varepsilon_{yd} \\ f_{yd} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{yd}} & \text{se } -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon \geq \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (1.5)$$

e o gráfico mostrado na Figura 1.4 demonstram esse comportamento.

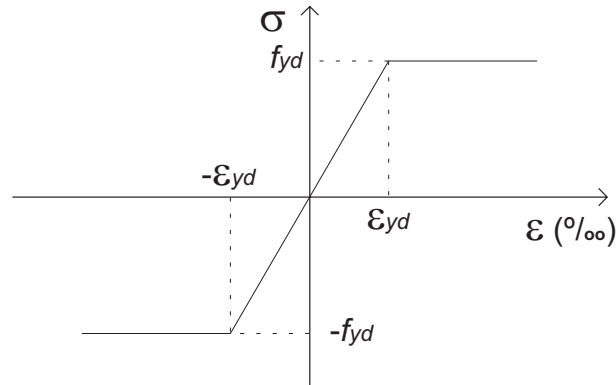


FIGURA 1.4 – Diagrama Tensão-Deformação do aço.

A nomenclatura utilizada para os aços é CA##, onde ## indica o valor f_{yk} do material. Por exemplo, o aço CA50 possui 500 MPa como tensão característica de escoamento.

Os aços da classe B não serão detalhados pois não são considerados no programa nem na norma (ABNT, 2003).

1.2.4 ELU

O Estado Limite Último é um conjunto de condições que representa a ruptura teórica de uma seção transversal. Dessa forma, além de suportarem os esforços aplicados, todas as seções transversais da estrutura devem obedecer às seguintes condições:

- a barra de aço mais tracionada não deve ter deformação maior (em módulo) que $10^0/00$;
- a fibra de concreto mais comprimida não pode ultrapassar a deformação de $3,5^0/00$;
- em uma seção inteiramente comprimida, a $3/7$ da altura (reta perpendicular as fibras de mesma deformação), a deformação não pode ultrapassar $2^0/00$.

As deformações $10^0/00$, $3,5^0/00$ e $2^0/00$ são conhecidas como “Pólos de Ruína”.

1.3 Organização do trabalho

O primeiro capítulo do trabalho contém a introdução, onde são expostos o objetivo e uma breve apresentação sobre os materiais envolvidos, descrevendo como estes se comportam quando submetidos a tensões (diagramas tensão-deformação) e outras características. Apresenta-se também o ELU, que é o conjunto de condições representando a ruptura de um seção.

No segundo capítulo é apresentado o software, mostrando suas funcionalidades e o modelamento dos problemas.

Também é mostrado, no capítulo 3, o manual do software, que visa a utilização do programa pelo usuário final. Neste capítulo é utilizada uma abordagem de forma mais sistemática possível, para evitar erros durante a execução do programa.

No quarto capítulo são dados exemplos numéricos e também uma comparação entre exemplos com pequenas alterações entre si.

E, por fim, no último capítulo são feitas as conclusões e sugeridas mudanças para a continuidade do trabalho.

Também compõem este trabalho, 4 anexos. Nestes anexos são detalhadas as rotinas utilizadas nos processos. No Anexo A são mostrados os cálculos necessários na determinação dos esforços resistentes no concreto. No Anexo B apresenta-se o método de Newton-Raphson aplicado ao problema de verificação. No Anexo C é mostrado o método das diferenças finitas, aplicado ao problema de estabilidade de pilares. E finalmente no Anexo D mostra-se o algoritmo utilizado no dimensionamento da área de armadura.

2 O *software*

2.1 Desenvolvimento

O programa ACCA, sigla para *Análise de Colunas de Concreto Armado*, foi desenvolvido sob a linguagem de programação Pascal orientada a objetos e seu código fonte é disponibilizado. Este *software* é livre. Você é autorizado e encorajado a copiar, instalar, modificar e distribuir este programa. Pede-se, no entanto, que qualquer modificação seja reportada ao autor do trabalho.

2.2 Funcionalidades

A principal finalidade do *software* é o cálculo de estabilidade de colunas de concreto armado pelo método das diferenças finitas, de forma prática e mais didática possível. O programa foi concebido de forma que as seções transversais da estrutura possam estar em FOC, ou seja, sujeita a um esforço normal e a um momento em uma direção qualquer, já que este é um caso mais geral e representa praticamente todos os problemas reais.

O cálculo das diferenças finitas consiste em uma série de cálculos de verificação buscando determinar a posição deformada da coluna. Os cálculos de verificação, que visam determinar a distribuição de deformações nas seções transversais, e são seqüências de cálculos de esforços resistentes. Estes determinam estes esforços na seção transversal.

Por estarem presentes nas rotinas do *software*, foi decidido também disponibilizar ao usuário final os cálculos de verificação e esforços resistentes. Estes cálculos também podem ser encontrados no *software* desenvolvido em (MEDEIROS, 2004)

Outro cálculo que é disponibilizado ao usuário é o dimensionamento da armadura a

ser utilizada na coluna, visto que este é uma seqüência de cálculos de estabilidade.

Assim, os seguintes cálculos são oferecidos (do mais básico ao mais completo):

- esforços resistentes;
- verificação;
- estabilidade por diferenças finitas;
- dimensionamento da área de armadura.

Já em relação a geometria da coluna existem algumas restrições no programa:

- coluna isostática (engastada-livre);
- seção transversal constante;
- seção transversal poligonal.

Apesar da restrição sobre a seção transversal ser obrigatoriamente poligonal impedir o cálculo de colunas circulares, de acordo com (MENDES NETO, 2000), um polígono regular de 20 lados já é satisfatoriamente semelhante a uma circunferência. A Figura 2.1 apresenta a semelhança de um polígono regular de 20 lados a uma circunferência.

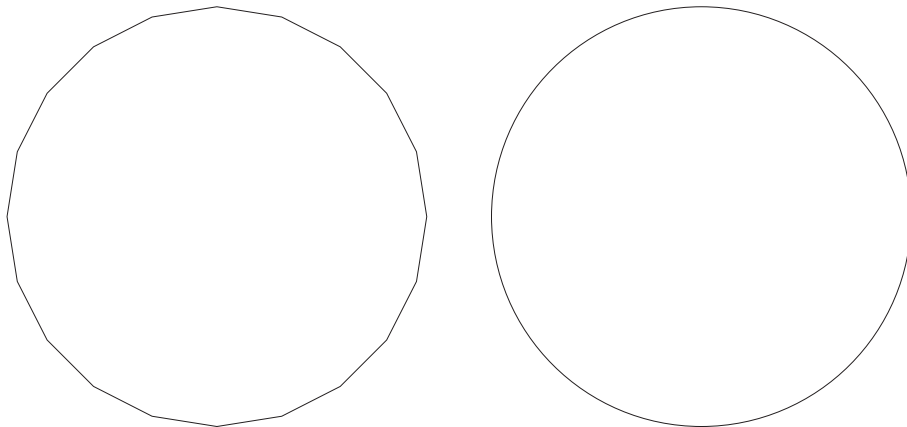


FIGURA 2.1 – Semelhança entre um polígono de 20 lados e uma circunferência

O erro obtido na área ao se aproximar um polígono de 20 lados para uma circunferência é cerca de 1,64%. Com 60 lados este erro cai para 0,18% e para o caso de 100 lados o erro é 0,07%. Todos esses erros representam áreas obtidas menores que a da circunferência, portanto estas aproximações trabalham a favor da segurança neste tipo de problema.

2.2.1 Esforços resistentes

O cálculo de esforços resistentes trata da determinação dos esforços que surgem em uma seção transversal quando nela é imposta uma distribuição de deformações. Vale ressaltar que é assumida a hipótese de que seções planas permanecem planas após as deformações. Portanto, para representar uma distribuição de deformações são necessários 3 parâmetros. Neste trabalho são utilizados como parâmetros do plano: ε_0 (deformação no CG da seção), κ_x e κ_y (curvaturas nas duas direções principais), como pode ser visto em

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa_y x - \kappa_x y \quad (2.1)$$

Para tal cálculo são requisitados os seguintes parâmetros:

- seção transversal (incluindo a armadura);
- materiais;
- distribuição de deformações;

e tem-se como saída o valor de 3 esforços: o esforço normal à seção e os momentos fletores nas duas direções principais. Ou seja:

$$(\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y) \longrightarrow (N, M_x, M_y) \quad (2.2)$$

O cálculo é feito através da integração das funções tensão-deformação dos materiais, (1.2) e (1.5), na área da seção, como mostrado nas equações:

$$N = \int \sigma dA = \int \sigma_c dA_c + \int \sigma_s dA_s = N_c + N_s \quad (2.3)$$

$$M_x = - \int \sigma y dA = - \int \sigma_c y dA_c - \int \sigma_s y dA_s = M_{x_c} + N_{x_s} \quad (2.4)$$

$$M_y = \int \sigma x dA = \int \sigma_c x dA_c + \int \sigma_s x dA_s = M_{y_c} + N_{y_s} \quad (2.5)$$

Vale ressaltar que na área de concreto não são descontadas as áreas das barras de aço, e no cálculo integral na área de aço, a tensão no CG de cada barra é considerada constante em toda sua área. Dessa forma as equações 2.3, 2.4 e 2.5 se tornam:

$$N = \int \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (2.6)$$

$$M_x = - \int \sigma_c y dA - \sum_{i=1}^n \sigma_{si} y A_{si} \quad (2.7)$$

$$M_y = \int \sigma_c x dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} x A_{si} \quad (2.8)$$

onde n é o número de barras de aço na seção.

Observa-se as parcelas referentes ao aço são facilmente calculadas através de somatórios. Já para o cálculo das integrais na área de concreto algumas metodologias podem ser seguidas, dentre as quais podem ser citadas:

- segmentar a seção transversal nas 2 direções principais e somar as parcelas, considerando um valor constante de deformação dentro de cada elemento, como por exemplo:

$$N_c = \int \sigma_c dA = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sigma_{c_{i,j}} A_{i,j} \quad (2.9)$$

onde p e q são as quantidades de divisões nas duas direções.

- executar uma rotação na seção transversal de forma a segmentar em apenas uma direção e somar as parcelas da mesma forma do item anterior. Exemplo:

$$N_c = \int \sigma_c dA = \sum_{i=1}^p \sigma_{c_i} A_i \quad (2.10)$$

onde p é a quantidade de divisões feita.

- através da transformação da integral em área em linha (Teorema de Green), como

proposto em (MENDES NETO, 2000).

Por resultar em valor mais próximo do resultado da integral e ser mais eficiente, foi adotada a última estratégia apresentada.

As equações resultantes de tal processo podem ser encontradas no Anexo A.

2.2.2 Verificação

O cálculo de verificação se trata do oposto do cálculo de esforços resistentes, ou seja, a partir de um conjunto de esforços aplicados à seção transversal, determina-se a distribuição de deformações na seção transversal.

Para este cálculo são necessários os parâmetros:

- seção transversal (incluindo a armadura);
- materiais;
- esforços aplicados,

e tem-se como resultado o plano de deformações. Ou seja:

$$(N, M_x, M_y) \longrightarrow (\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y) \quad (2.11)$$

Infelizmente, não é possível utilizar um cálculo direto neste problema, assim é necessário que sejam feitas iterações do cálculo de esforços resistentes pelo Método de Newton-Raphson, com o objetivo de obter esforços resultantes iguais aos esforços aplicados (dentro de um limite de tolerância arbitrado).

Para ilustrar o método de Newton-Raphson, será demonstrado o caso de apenas uma variável, pelo fato de ser mais didático.

Da Figura 2.2 tem-se que

$$tg\varphi = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad (2.12)$$

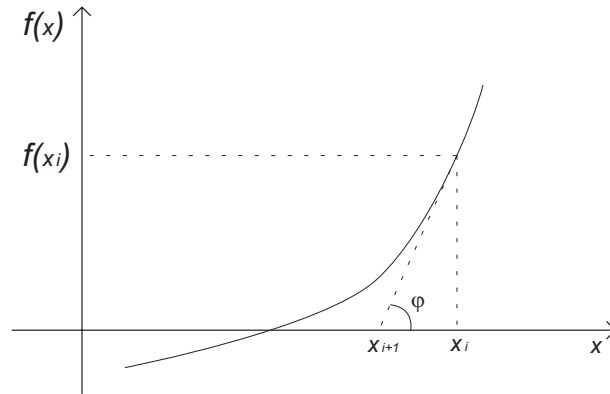


FIGURA 2.2 – Esquema do método de Newton-Raphson

o que pode ser reescrito sob a forma

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad (2.13)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.14)$$

Assim, considerando $f(x)$ como a diferença entre os esforços aplicados e os resultantes na seção, é possível perceber que, em algumas iterações o método leva à raiz da função, ou seja, ao ponto onde os esforços aplicados são iguais aos resistentes.

Na resolução de um problema de verificação, o método de Newton-Raphson deve ser aplicado para o caso de 3 variáveis. Esta situação, juntamente com o algoritmo utilizado neste programa, é apresentada no Anexo B.

2.2.3 Cálculo de estabilidade

Esta rotina é a principal função do programa desenvolvido. Trata-se da determinação (quando possível) da posição de equilíbrio de uma coluna isostática quando submetida a esforços. Ressalta-se neste ponto que os cálculos mostrados nos tópicos anteriores são referentes apenas a seção transversal e não à estrutura inteira.

Os dados de entrada deste problema são:

- seção transversal da coluna, juntamente com a armadura;

- materiais;
- altura da coluna;
- esforços aplicados.

E como resultado, é gerada a posição de equilíbrio do eixo passando pelo CG de todas as seções da coluna.

Este cálculo é feito através de rotinas de verificação em diversas seções da coluna. A partir do plano de deformações encontrado nestas, determina-se a posição deformada da próxima seção a ser analisada.

Após analisada toda a coluna, esta é re-analisada considerando os efeitos de segunda ordem gerados pela posição deformada encontrada. O processo que deve ser repetido até que a diferença entre 2 posições deformadas consecutivas seja nula (dentro de um limite de tolerância arbitrado).

No Anexo C pode-se encontrar o algoritmo utilizado neste cálculo.

Vale lembrar que este processo trata de um modelamento numérico do problema, assim a resposta obtida não é exata. Porém, quanto melhor for o refinamento, ou seja, quanto maior for o número de seções analisadas, mais preciso será o resultado obtido.

Também é possível se exportar para um arquivo de texto simples todos os parâmetros do cálculo e as informações de cada iteração feita durante o processo. Uma planilha do Microsoft Excel é também disponibilizada, este arquivo contém uma rotina (macro) para exportar os dados do arquivo para o software.

2.2.4 Dimensionamento

O cálculo de dimensionamento é utilizado na determinação da área mínima de armadura a ser utilizada, de forma que seja suficiente para suportar os esforços em todas as seções da coluna e também atender todas as condições do ELU já com a coluna em sua posição deformada. Conseqüentemente, a partir da área obtida, a bitola ótima a ser utilizada também é determinada.

Para este cálculo são necessários os seguintes parâmetros:

- seção transversal da coluna, juntamente com a posição das barras;
- materiais;
- altura da coluna;
- esforços aplicados;
- áreas de aço mínima e máxima aceitáveis nas seções transversais.

Como resultado deste cálculo é obtida a área de aço mínima que suporta os esforços em todas as seções.

É utilizado neste cálculo o método da bisseção, que busca a área mínima necessária pela média entre uma área não suficiente e outra que resiste, ambas previamente conhecidas. Isso deve ser repetido até que a diferença entre duas áreas obtidas em iterações consecutivas seja menor que uma precisão aceitável. O método da bisseção pode ser visto em mais detalhes no Anexo D.

3 Manual do usuário

Neste capítulo é mostrado um manual operacional do *software* visando esclarecer todos os detalhes de sua execução para o usuário final.

3.1 Identificação dos elementos

Na figura 3.1 observa-se a tela inicial do *software*, onde podem ser visualizados seus principais elementos de navegação: as abas e a barra de menu. Nas abas são encontrados os principais elementos para os cálculos do software e, na barra de menu, funções auxiliares.

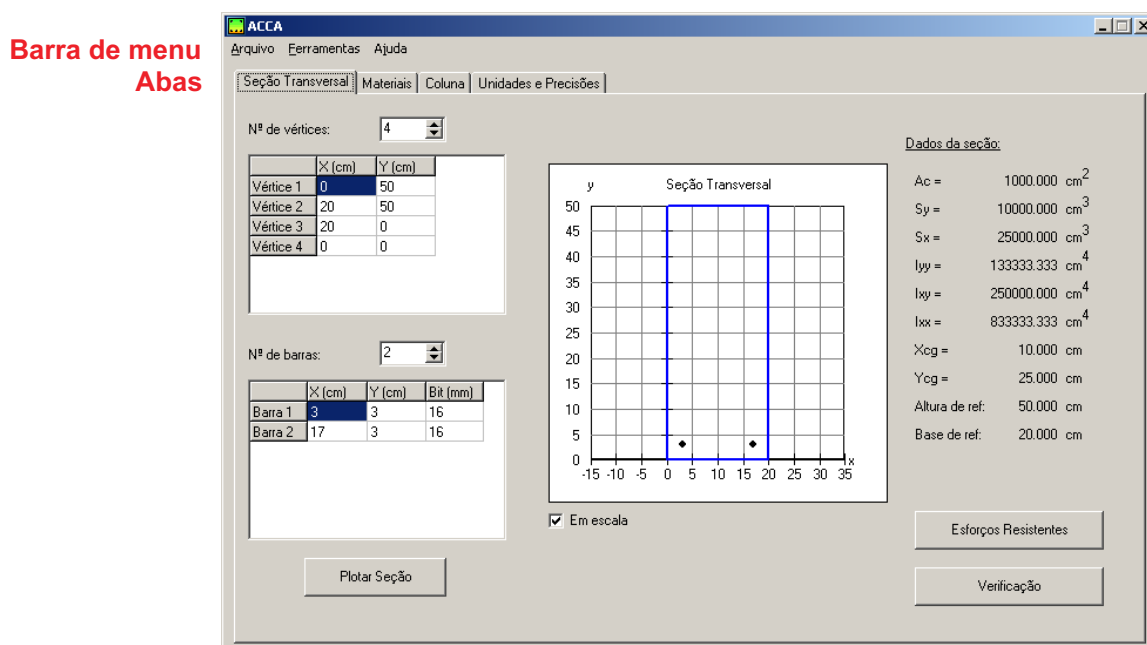


FIGURA 3.1 – Tela inicial do programa

Na primeira aba, “Seção Transversal”, é onde são feitas as entradas de dados relativas a este tema e também onde são acessados os cálculos de verificação e de esforços resistentes. No lado esquerdo da tela encontram-se os elementos de entrada de dados dos vértices da

seção e também da armadura. Na porção central é apresentada uma visualização da seção juntamente com as barras de aço; e no lado esquerdo algumas características geométricas da seção. Ainda nesta tela encontram-se os botões de acesso para os cálculos da seção. Na figura 3.2 são identificados cada um dos elementos citados.

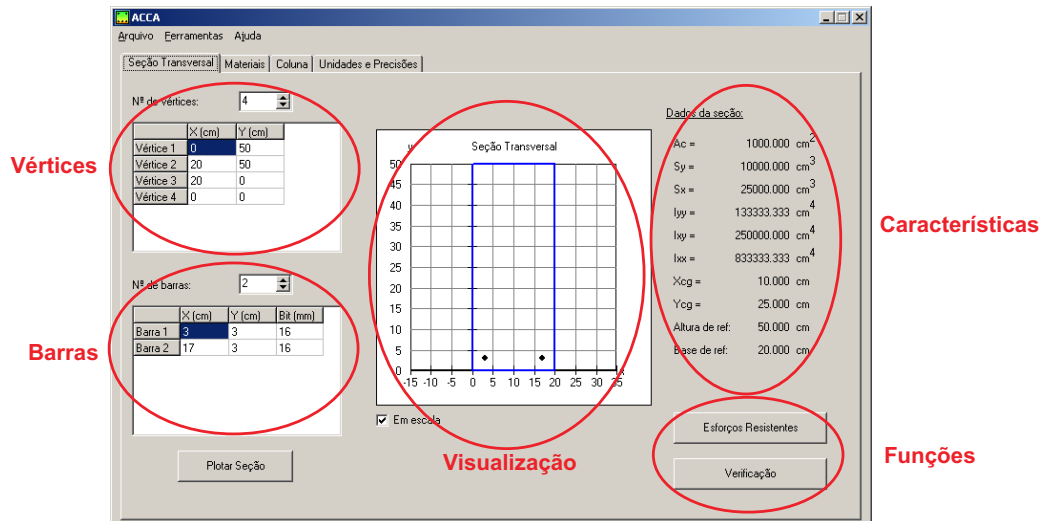


FIGURA 3.2 – Aba *Seção Transversal*

Na aba “Materiais” é onde são definidos os parâmetros do concreto e aço utilizados nos cálculos. Na figura 3.3 são identificados os elementos dessa aba. No lado esquerdo observam-se as características do concreto e ao lado direito aquelas referentes ao aço. Juntamente com as características dos materiais, são mostrados os diagramas tensão-deformação, de acordo com as equações (1.2) e (1.5).

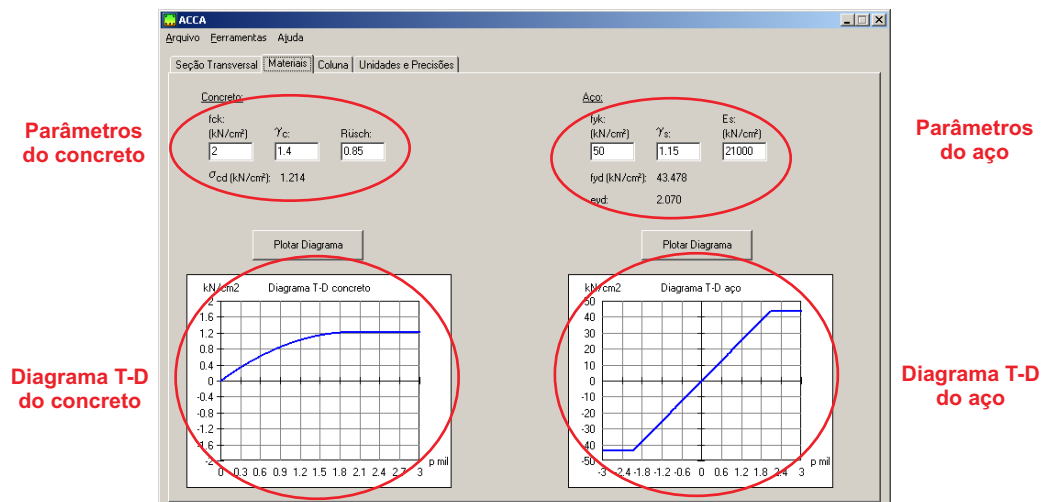


FIGURA 3.3 – Aba *Materiais*

Na aba “Coluna” é onde é feita a entrada de dados da coluna e dos esforços aplicados.

Nesta mesma aba é onde são exibidos os resultados referentes ao cálculo de diferenças finitas. Na figura 3.4 são identificados os principais elementos desta tela. Na porção esquerda são vistos os elementos de entrada de dados da coluna e dos esforços aplicados.

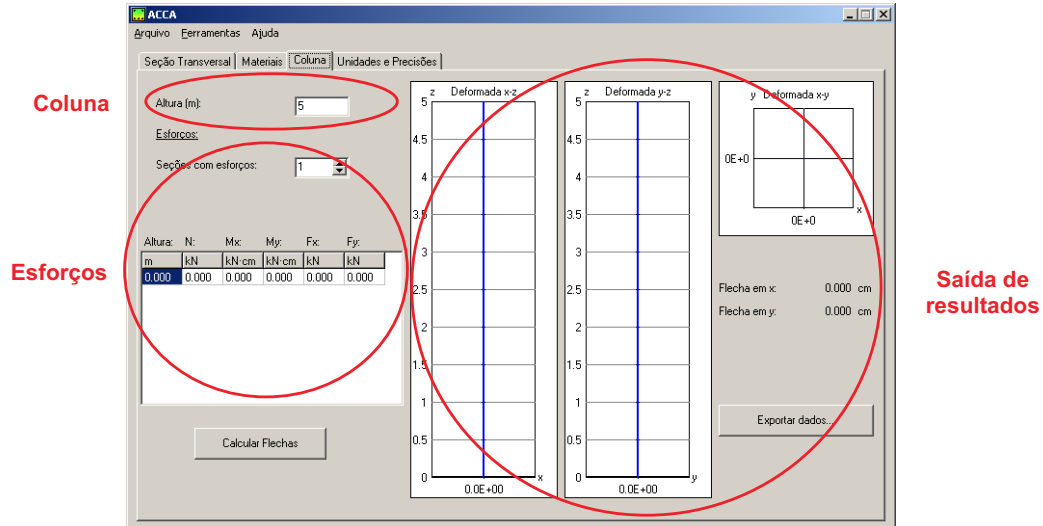


FIGURA 3.4 – Aba *Coluna*

Na última aba, “Unidades e Precisões”, é onde são definidos o sistema de unidades utilizado e parâmetros de cálculo, como precisão, tolerância e trechos a segmentar a coluna. Na figura 3.5 observa-se a identificação destes elementos na tela.

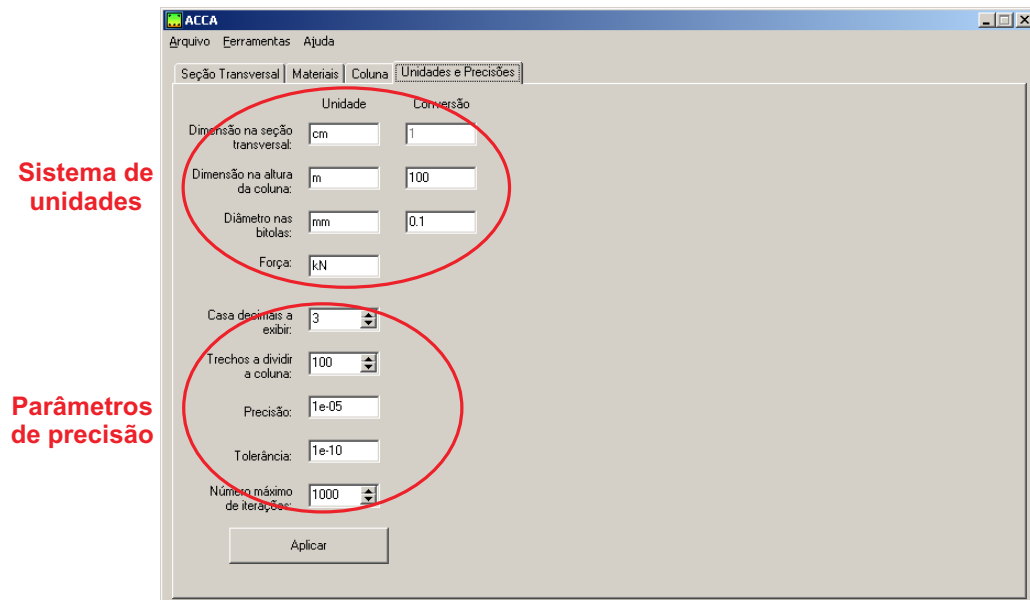


FIGURA 3.5 – Aba *Unidades e Precisões*

3.2 Entrada de dados

3.2.1 Seção Transversal

A definição da seção transversal é feita na aba “Seção Transversal” e os dados necessários para tal são:

- quantidade de vértices no polígono que define a forma da seção transversal;
- coordenadas x e y dos vértices. Os vértices devem estar ordenados em um sentido consistente (horário ou anti-horário);
- quantidade de barras de aço na armadura;
- coordenadas e bitolas de cada barra de aço.

O item 1 da figura 3.6 deve ser preenchido com a quantidade de vértices da seção. As coordenadas devem ser entradas na tabela (item 2). A entrada de dados das barras é feita de forma análoga nos itens 3 e 4. Ao preencher as tabelas dos vértices e das barras, deve-se obedecer a unidade mostrada na linha de cabeçalho de cada uma.

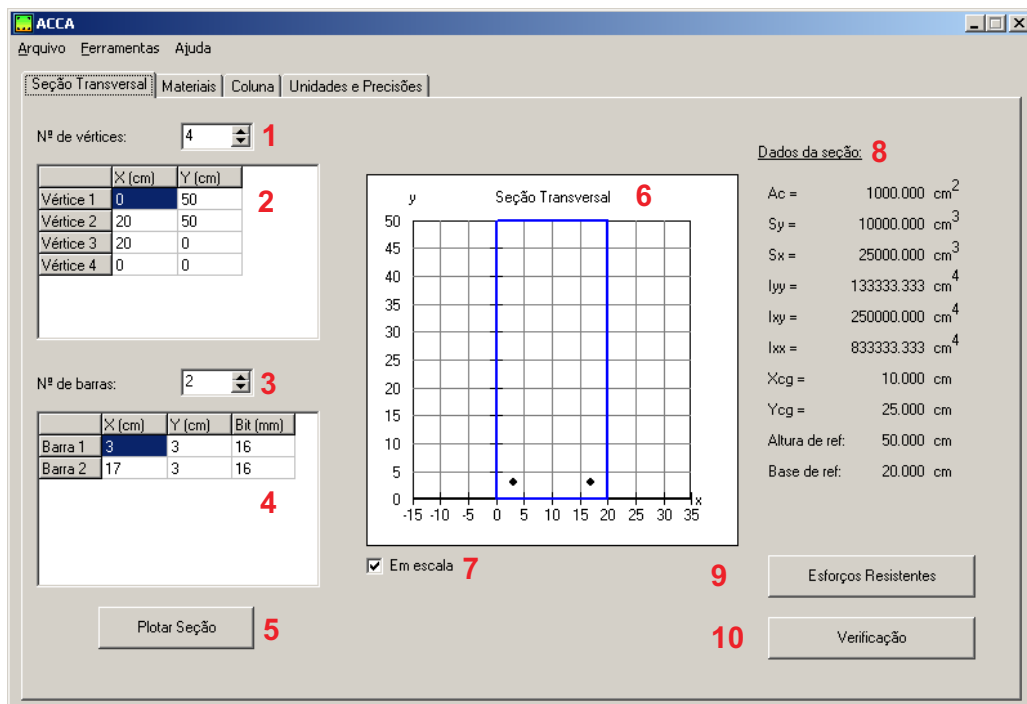


FIGURA 3.6 – Itens da aba *Seção Transversal*

Para visualizar a seção transversal resultante dos dados inseridos, basta clicar no botão identificado por “Plotar Seção” (item 5). A seção será mostrada na porção central da tela

(item 6) e suas características geométricas no item 8. A imagem pode ser visualizada de 2 formas: em escala (proporções reais mantidas) ou redimensionada de forma a ocupar todo espaço disponível (opção para casos onde as dimensões em uma direção são muito maiores que na outra), tal escolha é feita na caixa do item 7.

3.2.1.1 Seções vazadas

A seguir uma estratégia simples para a construção de uma seção transversal vazada:

1. adicionar os vértices do polígono que representa a forma externa da seção e por fim repetir o primeiro ponto adicionado;
2. adicionar os vértices do polígono interno e repetir o primeiro ponto adicionando deste, porém, desta vez deve ser seguido o sentido oposto daquele utilizado no polígono externo.

Para exemplificar esta situação, a figura 3.7 mostra 2 polígonos (representando seções vazadas) com os vértices numerados na ordem que devem ser adicionados. É claro que o ponto inicial não precisa necessariamente ser o mesmo mostrado nos exemplos. O primeiro dos exemplos mostra um caso bastante simples, já no segundo é apresentada uma situação mais complexa, onde a estratégia utilizada é diferente, porém tão simples quanto a anterior.¹

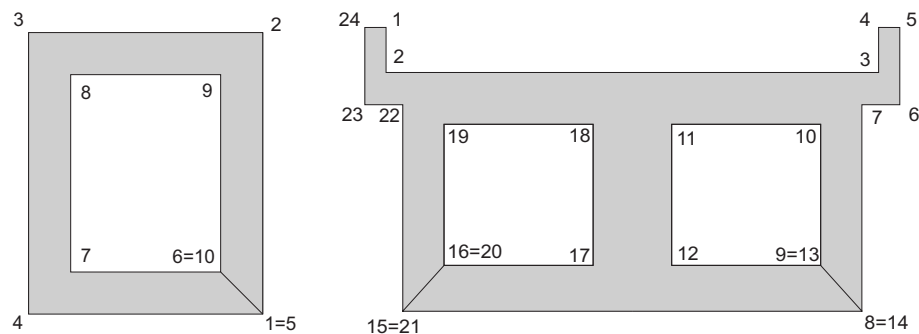


FIGURA 3.7 – Exemplos de ordenação dos vértices em seções vazadas

¹Atentar que nos dois polígonos internos do segundo caso, a orientação adotada é a mesma (sentido anti-horário), e contrária à do polígono externo (sentido horário).

3.2.1.2 Seções circulares

Para facilitar a entrada de dados referentes ao formato de seções transversais circulares, há uma ferramenta auxiliar que gera os vértices de um polígono regular de quantos lados forem desejados. Dessa forma é possível obter seções com formato muito próximo ao circular, como pode ser percebido na figura 2.1. Nessa mesma ferramenta também é possível gerar seções circulares vazadas.

Tal ferramenta é disponível no menu *Ferramentas* → *Seção Transversal* → *Seções Circulares...*

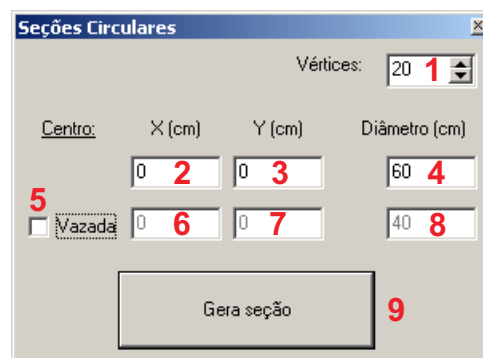


FIGURA 3.8 – Ferramenta para gerar seções circulares

Para gerar uma seção circular maciça a caixa mostrada no item 5 da figura 3.8 deve estar desabilitada. Nos itens 2 e 3 devem ser inseridos as coordenadas do centro da seção. O diâmetro desejado é inserido no item 4. Já para traçar seções vazadas basta habilitar a caixa do item 5 e preencher os campos 6, 7 e 8 de forma análoga ao caso anterior, referindo ao polígono interior.

No campo 1 é escolhida a quantidade de vértices nos polígonos que representam as circunferências. Ao escolher tal valor deve-se lembrar que quanto maior for este valor, melhor será a precisão do resultado, porém os cálculos serão mais lentos.

3.2.2 Materiais

A entrada dos parâmetros dos materiais a serem considerados nos cálculos é feita na aba "Materiais". Na figura 3.9 são identificados todos os elementos da tela.

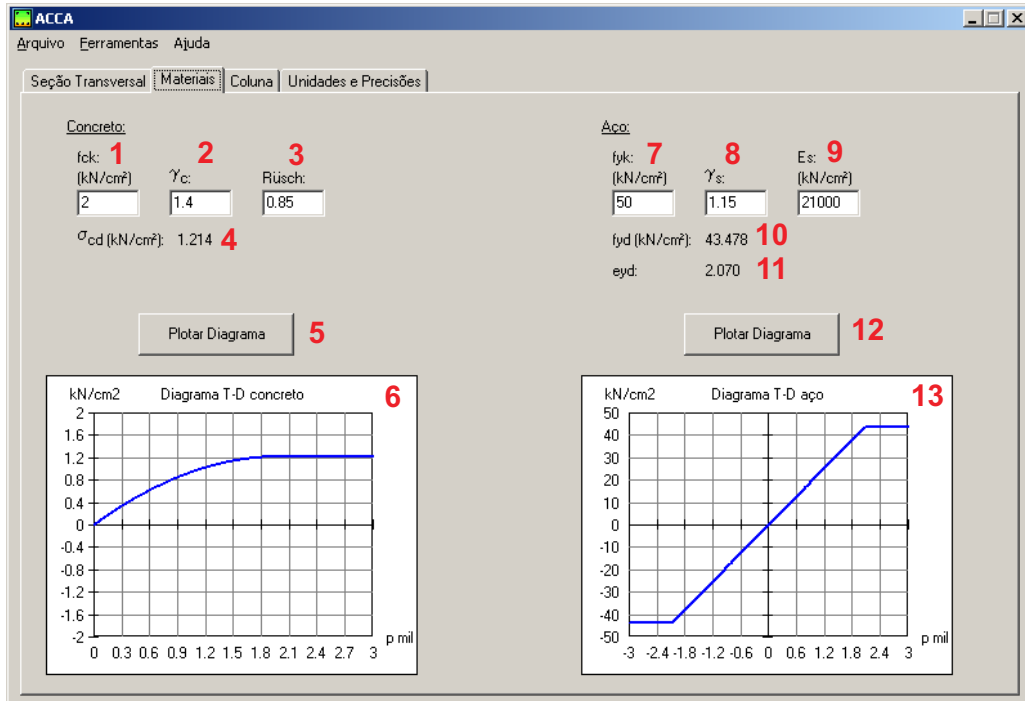


FIGURA 3.9 – Itens da aba *Materiais*

3.2.2.1 Concreto

Para a definição do concreto a ser considerado nos cálculos é necessário o preenchimento dos itens 1, 2 e 3 da figura 3.9. O primeiro destes é o valor f_{ck} do material utilizado, o segundo é o coeficiente de ponderação γ_c , e por último a contribuição do efeito Rüscho.

Para calcular os parâmetros do material basta clicar no botão “Plotar Diagrama” (item 5). Após isso o diagrama tensão-deformação será mostrado no item 6, o valor σ_{cd} também é gerado e mostrado no item 4.

3.2.2.2 Aço

Assim como o concreto, o aço também é definido por 3 parâmetros, que devem ser preenchidos nos itens 7, 8 e 9. O primeiro é o valor f_{yk} do material, o segundo é o fator de ponderação do aço, γ_s , e por último o módulo de Young do aço, E_s .

Os parâmetros do material são calculados ao clicar no botão “Plotar Diagrama” (item 12). Assim o diagrama tensão-deformação será mostrado no item 13, f_{yd} e ϵ_{yd} nos itens 10 e 11, respectivamente.

3.2.3 Coluna e cargas

Na aba “Coluna” é onde são feitas as entradas de dados relativos à coluna e às cargas aplicadas. Na figura 3.10 são identificados todos os elementos da tela.

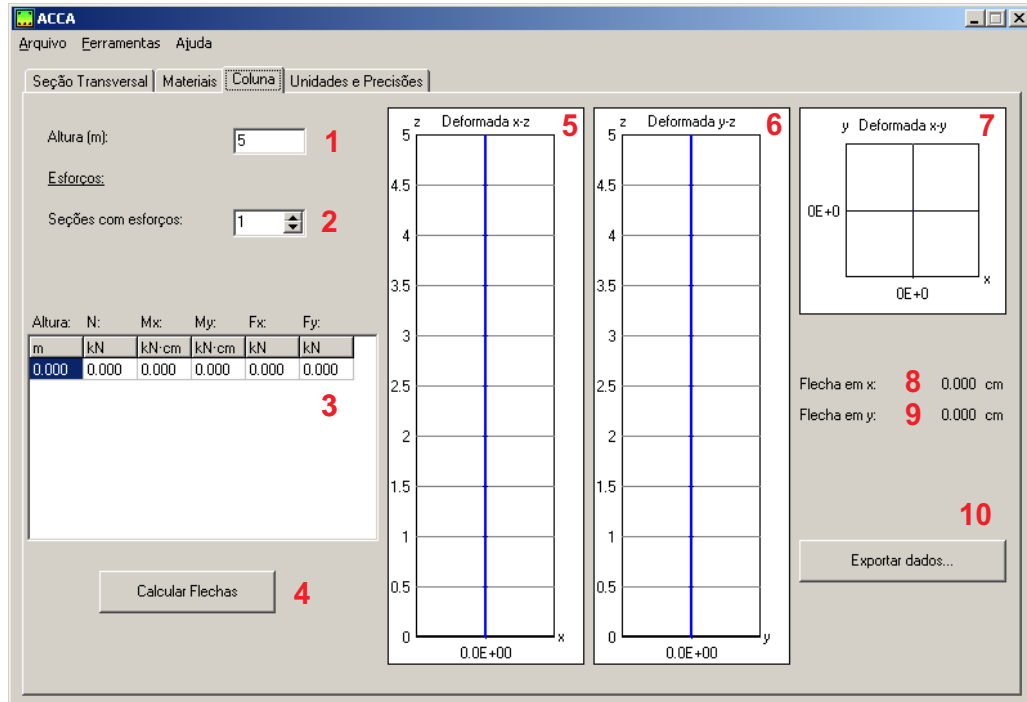


FIGURA 3.10 – Itens da aba *Coluna*

A altura da coluna a ser analisada é definida no item 1 mostrado na figura 3.10. No item 2 deve ser entrada a quantidade de posições da coluna onde há esforços aplicados,² e na tabela, identificada pelo item 3, é onde esses esforços são detalhados. A primeira coluna desta tabela deve ser preenchida com as posições onde as cargas são aplicadas, as demais colunas são preenchidas com os esforços aplicados de acordo com o cabeçalho.

3.2.3.1 Cargas distribuídas

No *software* há um recurso para aplicar esforços distribuídos ao longo do eixo da coluna. Esta ferramenta é encontrada no menu *Ferramentas* → *Coluna* → *Cargas Distribuídas...*

A nova janela permitirá aplicar cargas distribuídas nas 3 direções principais, x , y e z . Habilitando ou desabilitando os itens 1, 5 e 11 da figura 3.11 escolhem-se quais direções terão tais esforços. Nos itens 2, 7 e 12 devem ser determinadas as posições iniciais das

²Dois esforços aplicados na mesma posição não precisam ser contados apenas como um, não há problema em computá-los individualmente.

	Altura (m)	Carga (kN/m)
<input checked="" type="checkbox"/> 1	Início: 0 2	0 3
	Final: 0 4	0 5
<input checked="" type="checkbox"/> 6	Início: 0 7	0 8
	Final: 0 9	0 10
<input checked="" type="checkbox"/> 11	Início: 0 12	0 13
	Final: 0 14	0 15
<input type="button" value="Adicionar Esforços"/>		16

FIGURA 3.11 – Ferramenta para cargas distribuídas

cargas, nos itens 4, 9 e 14 as posições finais. Os valores das cargas aplicadas devem ser informados nos itens 3, 5, 8, 10, 13 e 15 da mesma forma que a posição. É considerado uma distribuição linear entre as posições iniciais e finais.

Ao clicar no botão “Adicionar esforços”, a carga será transformada em esforços pontuais nas seções onde a coluna será analisada. Essas seções são determinadas a partir da quantidade de trechos que a coluna será dividida, assim, quanto maior for este valor, melhor será a representação das cargas distribuídas, porém os cálculos serão mais lentos.

3.3 Cálculos

3.3.1 Esforços Resistentes

Para efetuar um cálculo de esforços resistentes é necessário ir para a aba “Seção Transversal” e clicar no botão “Esforços Resistentes” (item 9 da figura 3.2). Uma nova janela surgirá na tela (a figura 3.12 identifica cada elemento desta janela).

Nos itens 1 e 5 determina-se com quais parâmetros a distribuição de deformações será indicada. Selecionando o item 1 devem ser preenchidos os campos representados pelos itens

FIGURA 3.12 – Tela de cálculo dos esforços resistentes

2, 3 e 4. Se for selecionado o item 5, deve-se preencher os campos do item 6, 7 e 8.

Clicando no botão “Calcular” (item 13) os esforços resistentes surgirão nos itens 9, 10 e 11. É verificado se a distribuição de deformações indicada obedece às condições do ELU (item 12). Para este cálculo serão consideradas a seção transversal e os materiais indicados nas respectivas abas.

3.3.2 Verificação

Para verificar a distribuição de deformações resultante a um conjunto de esforços aplicados na seção é necessário ir para a aba “Seção Transversal” e clicar no botão “Verificação” (item 10 da figura 3.2). Uma nova janela surgirá na tela, a figura 3.13 identifica todos elementos desta janela.

Nos itens 1, 2 e 3 devem ser entrados os esforços aplicados à seção. Ao clicar no botão “Calcular” (item 14), a distribuição de deformações será mostrada nos itens 4, 5 e 6 e também nos itens 7, 8 e 9 em forma de outros parâmetros (ε_c , θ e φ). Nos itens 10 e 11 serão mostrados, respectivamente, se as condições do ELU são obedecidas e se a seção suporta tais esforços, no item 12 é mostrado a quantidade de iterações feitas no cálculo,

Verificação ✕

Esforços aplicados

N (kN)	M _x (kN·cm)	M _y (kN·cm)
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0 2"/>	<input type="text" value="0 3"/>

Distribuição de deformações

ϵ_0	κ_x	κ_y		
<input type="text" value="0 4"/>	<input type="text" value="0 5"/>	<input type="text" value="0 6"/>		
ϵ_c	θ	φ		
<input type="text" value="0 7"/>	<input type="text" value="0 8"/>	<input type="text" value="0 9"/>		
ELLU:	<input type="text" value="10"/>	<input center;"="" text-align:="" type="text" value="12 ITERAÇÕES:</td> </tr> <tr> <td>RESISTE:</td> <td style="/> <input type="text" value="11"/>	<input 2"="" style="text-align: center;" type="text" value="13 PRECISÃO:</td> </tr> <tr> <td colspan="/> <input type="button" value="Calcular"/>	<input type="text" value="14"/>

FIGURA 3.13 – Tela de cálculo de verificação

e por último a tolerância do cálculo no item 13. Neste cálculo serão utilizadas a seção transversal e os materiais indicados nas respectivas abas.

3.3.3 Diferenças finitas

O cálculo de diferenças finitas é feito através do botão “Calcular Flechas” na aba “Coluna” (item 4 da figura 3.10). Após o *software* ter feito todos os cálculos, será exibido nessa mesma aba os gráficos representando a posição deformada do eixo da coluna em três vistas, $x-z$ (item 5), $y-z$ (item 6) e $x-y$ (item 7). Nos itens 8 e 9 serão mostrados os valores da flecha no topo da coluna.

É possível gerar um arquivo de extensão *.txt* contendo todas as características do problema e iterações feitas. Basta clicar no botão “Exportar Dados...” (item 10), e escolher o local e nome do arquivo na janela que surgirá.

É importante saber que este cálculo pode levar algum tempo dependendo dos parâmetros de cálculo.

3.3.4 Dimensionamento

O dimensionamento de colunas é feito através de uma ferramenta encontrada no menu *Ferramentas* → *Coluna* → *Dimensionar...*. Na figura 3.14 observam-se todos os elementos da nova janela.

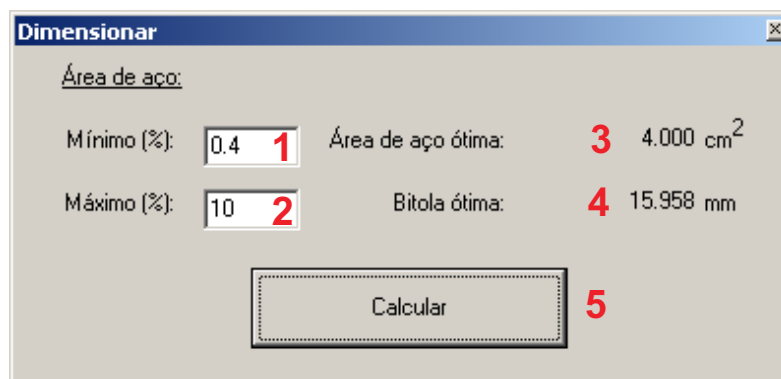


FIGURA 3.14 – Tela de cálculo de dimensionamento

Nos itens 1 e 2 deve ser entrada a porcentagem (em relação à área de concreto) de área máxima e mínima de aço aceitáveis na seção transversal. Após clicar o botão “Calcular” (item 5), serão exibidos a área ótima de aço a ser utilizada na seção e as respectivas bitolas (itens 3 e 4 respectivamente).

Para tal cálculo serão ignoradas as bitolas das barras informadas na aba “Seção Transversal”, ou seja, todas as barras serão consideradas iguais. Um artifício para considerar bitolas diferentes no cálculo é criar diversas barras no mesmo ponto, assim a área da barra em tal ponto será essa quantidade de vezes maior que a indicada.

3.4 Sistema de unidades e precisões

No programa é possível alterar o sistema de unidades dos dados e também os parâmetros de precisão com que os cálculos são efetuados. Esses parâmetros são encontrados na última aba, “Unidades e Precisões”. A figura 3.15 mostra todos os elementos da tela.

No item 1 deve ser entrada a unidade utilizada para definir os vértices da seção transversal e a posição das barras. No item 2 a unidade utilizada na altura da coluna e a posição dos esforços aplicados e no item 4 a taxa de conversão entre essa unidade e a do item 1. Nos itens 3 e 5 deve ser feito o mesmo com a unidade que define a bitola das

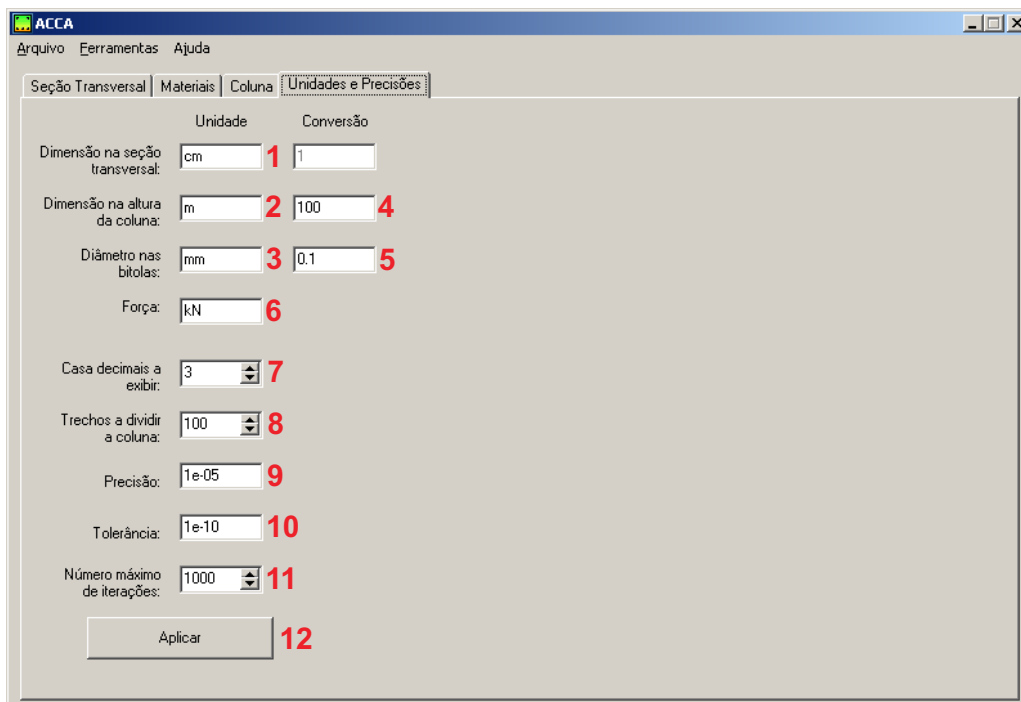


FIGURA 3.15 – Itens da aba *Unidades e Precisões*

barras de aço, já o item 6 se refere à unidade utilizada nos esforços. Para atualizar os parâmetros no programa basta apertar o botão “Aplicar” (item 12).

O item 7 é a quantidade de casas decimais que devem ser exibidas nos resultados dos cálculos. O item 8 é a quantidade de trechos que a coluna será dividida, quanto maior for esse valor, mais preciso será o cálculo porém mais lento.

No item 9 é entrada a precisão, valor utilizado para detectar ruptura na seção e evitar divisões por zero nas rotinas. No item 10 é entrada a tolerância, utilizada na comparação entre 2 valores. E por fim, o item 11 é o limite máximo de iterações aceito nas rotinas.

3.5 Salvar e Abrir

É possível salvar em arquivos os dados entrados no *software*. Essa função é encontrada no menu *Arquivo* → *Salvar*, cada uma das opções que surge se refere a cada aba do programa. Na opção “Completo...” salvam-se todos os parâmetros em um arquivo só.

Os dados são salvos com as seguintes extensões:

- *.str*, os dados referentes a seção transversal;

- *.mat*, os dados referentes aos materiais;
- *.col*, os referentes a aba “Coluna”;
- *.upr*, o arquivo contendo as unidades e precisões;
- *.cca*, o problema completo.

Para abrir algum arquivo basta ir ao menu *Arquivo* → *Abrir*, selecionar o tipo e escolher o arquivo.

4 Alguns exemplos

É apresentado neste capítulo alguns exemplos numéricos das aplicações do programa. Em cada exemplo será abordada uma seção transversal diferente com o objetivo de ilustrar diversas configurações possíveis.

Em todos exemplos serão consideradas as características dos materiais mostradas nas tabelas 4.1 e 4.2.

TABELA 4.1 – Parâmetros do concreto utilizado nos exemplos

Parâmetro	Valor	Unidade
f_{ck}	2.000	kN/cm ²
γ_c	1.400	–
Rüsch	0.850	–
σ_{cd}	1.214	kN/cm ²

TABELA 4.2 – Parâmetros do aço utilizado nos exemplos

Parâmetro	Valor	Unidade
f_{yk}	50.000	kN/cm ²
γ_s	1.150	–
E_s	21000.000	kN/cm ²
f_{yd}	43.478	kN/cm ²
ε_{yd}	2.070	–

4.1 Esforços resistentes

4.1.1 Exemplo 1

Neste exemplo é mostrada uma seção transversal retangular de 20 cm x 50 cm, com 4 barras de aço de bitola 16 mm cada. Com esta seção serão calculados os esforços resistentes para quatro distribuições de deformações. A figura 4.1 e as tabelas 4.3 e 4.4 ilustram a seção transversal e seus dados de entrada.

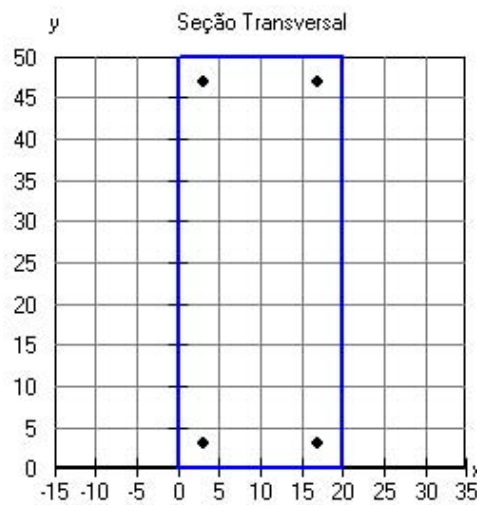


FIGURA 4.1 – Seção transversal utilizada no Exemplo 1

TABELA 4.3 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 1

Ordem	x (cm)	y (cm)
1	0	0
2	20	0
3	20	50
4	0	50

TABELA 4.4 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 1

Ordem	x (cm)	y (cm)	Bitola (mm)
1	3	3	16
2	17	3	16
3	3	47	16
4	17	47	16

Na tabela 4.5 é mostrado cada plano de deformação testado e os respectivos esforços resultantes.

TABELA 4.5 – Resultados do cálculo de esforços resistentes no Exemplo 1

Caso	ε_0	κ_x	κ_y	N (kN)	M_x (kN·cm)	M_y (kN·cm)	ELU
<i>a</i>	1.000	0.000	0.000	1079.606	0.000	0.000	OK
<i>b</i>	1.500	0.005	0.000	1390.150	724.939	0.000	OK
<i>c</i>	1.500	0.000	0.005	1391.478	0.000	91.974	OK
<i>d</i>	2.100	0.000	0.000	1563.959	0.000	0.000	Não

4.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo é mostrada uma seção transversal em forma de “T”, com a mesa de 15 cm de espessura e 100 cm de largura, e a alma de 40 cm de espessura e 85 cm de altura, com 4 barras de aço de bitola 25 mm cada. Da mesma forma que no exemplo 1, serão calculados para esta seção os esforços resistentes para quatro distribuições de deformações. A figura 4.2 e as tabelas 4.6 e 4.7 ilustram a seção transversal.

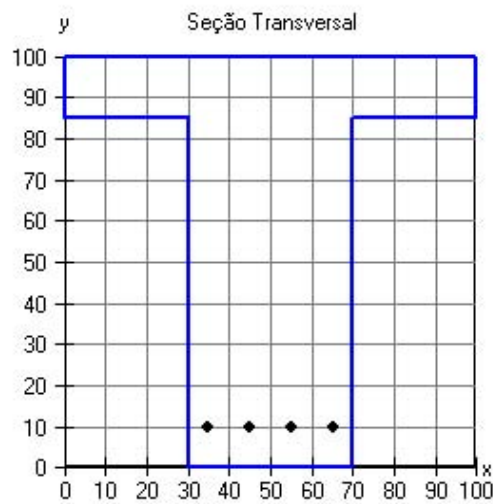


FIGURA 4.2 – Seção transversal utilizada no Exemplo 2

TABELA 4.6 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 2

Ordem	x (cm)	y (cm)
1	30	0
2	70	0
3	70	85
4	100	85
5	100	100
6	0	100
7	0	85
8	30	85

TABELA 4.7 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 2

Ordem	x (cm)	y (cm)	Bitola (mm)
1	35	10	25
2	45	10	25
3	55	10	25
4	65	10	25

Na tabela 4.8 é mostrado cada plano de deformação testado e os respectivos esforços resistentes.

TABELA 4.8 – Resultados do cálculo de esforços resistentes no Exemplo 2

Caso	ε_0	κ_x	κ_y	N (kN)	M_x (kN·cm)	M_y (kN·cm)	ELU
<i>a</i>	1.000	0.000	0.000	4874.834	19712.091	0.000	OK
<i>b</i>	1.500	0.005	0.000	6259.690	41071.022	0.000	OK
<i>c</i>	1.500	0.000	0.005	6183.699	29844.604	2843.125	OK
<i>d</i>	2.100	0.000	0.000	6803.694	40811.783	0.000	Não

4.2 Verificação

4.2.1 Exemplo 3

Neste exemplo é mostrada uma seção transversal retangular vazada, de 40cm x 50 cm, com arestas internas afastadas 10 cm das externas, com 4 barras de aço de bitola 25 mm cada. A partir de conjuntos de esforços aplicados nesta seção, serão calculadas as distribuições de deformações resultantes. A figura 4.3 e as tabelas 4.9 e 4.10 ilustram a seção transversal e seus dados de entrada.

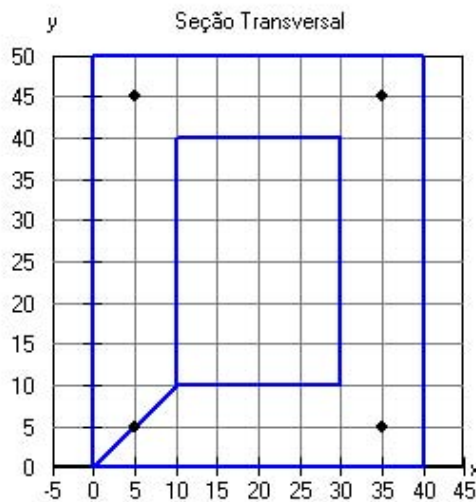


FIGURA 4.3 – Seção transversal utilizada no Exemplo 3

TABELA 4.9 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 3

Ordem	x (cm)	y (cm)
1	0	0
2	40	0
3	40	50
4	0	50
5	0	0
6	10	10
7	10	40
8	30	40
9	30	10
10	10	10

TABELA 4.10 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 3

Ordem	x (cm)	y (cm)	Bitola (mm)
1	5	5	25
2	5	45	25
3	35	5	25
4	35	45	25

Na tabela 4.11 são mostrados os esforços aplicados e os respectivos planos de deformações.

TABELA 4.11 – Resultados do cálculo de verificação no Exemplo 3

Caso	N (kN)	M_x (kN·cm)	M_y (kN·cm)	ε_0	κ_x	κ_y	Suporta
<i>a</i>	1000.000	0.000	0.000	0.530	0.000	0.000	OK
<i>b</i>	1000.000	2000.000	0.000	0.531	0.004	0.000	OK
<i>c</i>	500.000	0.000	2000.000	0.250	0.000	0.006	OK
<i>d</i>	500.000	2000.000	2000.000	0.251	0.004	0.006	OK

4.2.2 Exemplo 4

Neste exemplo é mostrada uma seção transversal circular de diâmetro 50cm, com 8 barras de aço de bitola 16 mm cada. A partir de conjuntos de esforços aplicados nesta seção, serão calculadas as distribuições de deformações resultantes. A figura 4.4 e as tabelas 4.12 e 4.13 ilustram a seção transversal.

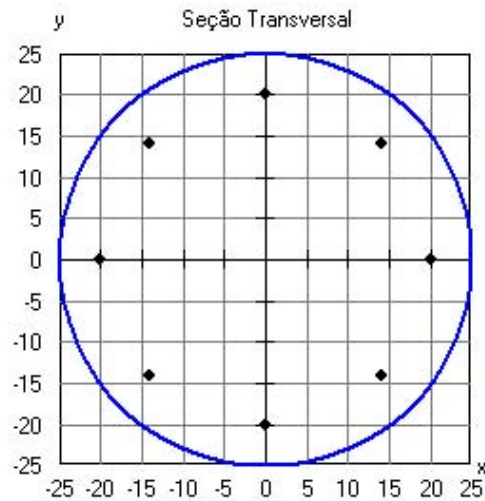


FIGURA 4.4 – Seção transversal utilizada no Exemplo 4

TABELA 4.12 – Parâmetros da seção transversal utilizada no Exemplo 4

Parâmetro	Valor	Unidade
Centro x	0	cm
Centro y	0	cm
Diâmetro	50	cm
Vértices	60	–

TABELA 4.13 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 4

Ordem	x (cm)	y (cm)	Bitola (mm)
1	20	0	16
2	14.142	14.142	16
3	0	20	16
4	-14.142	14.142	16
5	-20	0	16
6	-14.142	-14.142	16
7	0	-20	16
8	14.142	-14.142	16

Na tabela 4.14 são mostrados os esforços aplicados e os respectivos planos de deformações.

TABELA 4.14 – Resultados do cálculo de verificação no Exemplo 4

Caso	N (kN)	M_x (kN·cm)	M_y (kN·cm)	ε_0	κ_x	κ_y	Suporta
<i>a</i>	1000.000	0.000	0.000	0.404	0.000	0.000	OK
<i>b</i>	1000.000	2000.000	0.000	0.405	0.006	0.000	OK
<i>c</i>	500.000	0.000	2000.000	0.193	0.000	0.005	OK
<i>d</i>	500.000	2000.000	2000.000	0.194	0.005	0.005	OK

4.3 Cálculo de estabilidade

4.3.1 Exemplo 5

Neste exemplo será utilizada uma coluna de 6 m de altura, de seção transversal retangular 20 cm x 50cm, com 5 barras de aço de bitola 16 mm. A figura 4.5 e as tabelas 4.15 e 4.16 ilustram a seção transversal.

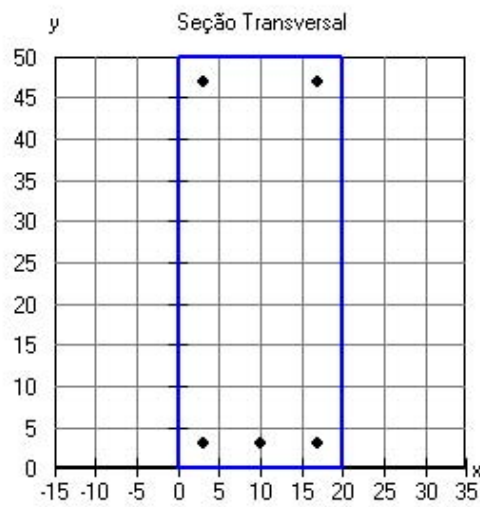


FIGURA 4.5 – Seção transversal utilizada no Exemplo 5

TABELA 4.15 – Vértices da seção transversal utilizada no Exemplo 5

Ordem	x (cm)	y (cm)
1	0	0
2	20	0
3	20	50
4	0	50

TABELA 4.16 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 5

Ordem	x (cm)	y (cm)	Bitola (mm)
1	3	3	16
2	10	3	16
3	17	3	16
4	3	47	16
5	3	47	16

Será aplicado nessa coluna o conjunto de esforços mostrados na tabela 4.17

TABELA 4.17 – Esforços aplicados na coluna do Exemplo 5

Altura (m)	N (kN)	M_x (kN·cm)	M_y (kN·cm)	F_x (kN)	F_y (kN)
6	100	-150	0	0	0
3	0	230	50	0.8	-0.7

Na tabela 4.18 observa-se o valor da flecha no topo da coluna para diversos valores de trechos em que a coluna é dividida na análise.

TABELA 4.18 – Flecha no topo da coluna do Exemplo 5

Trechos	Flecha e x (cm)	Flecha em y (cm)
3	0.851	-0.036
4	0.815	-0.043
5	0.783	-0.028
10	0.765	-0.031
20	0.754	-0.027
30	0.750	-0.026
40	0.749	-0.025
50	0.748	-0.025
100	0.747	-0.024
500	0.745	-0.024
1000	0.745	-0.024

A partir dos resultados mostrados, observa-se que considerando 50 trechos o erro obtido, em relação ao caso de 1000 trechos, é menor que 1%.

A figura 4.6 mostra a posição deformada da coluna resultante do processo considerando 1000 trechos.

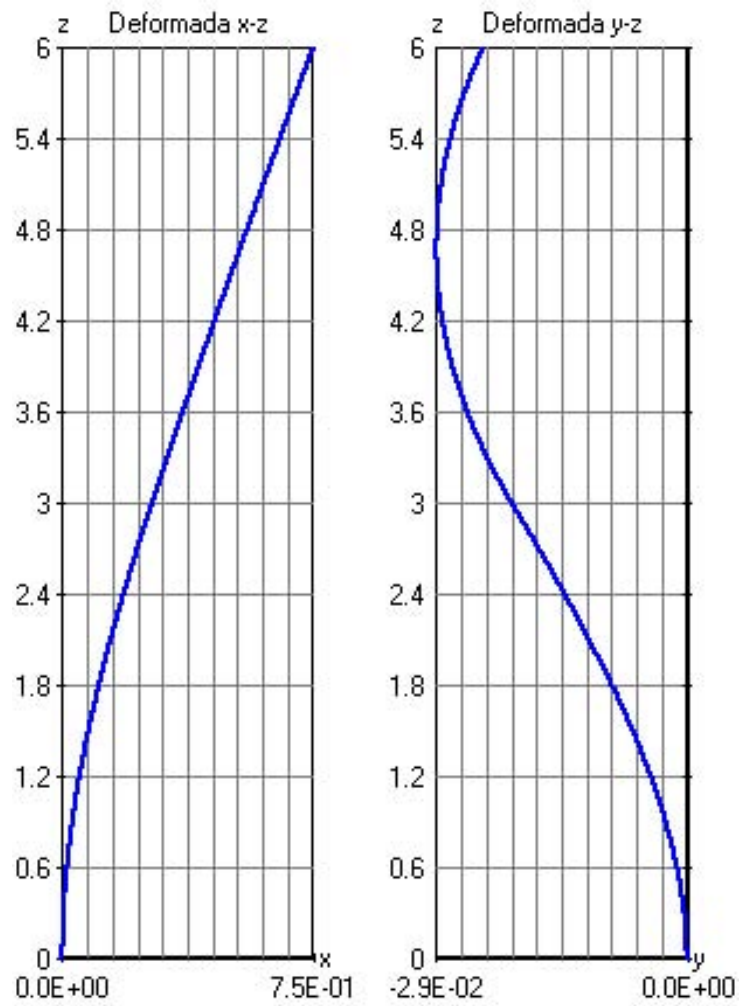


FIGURA 4.6 – Posição deformada da coluna do Exemplo 5 nos planos “x-z” e “y-z”

4.3.2 Exemplo 6

Este exemplo apresenta um caso bastante curioso. Em duas colunas de mesmo comprimento, mesma seção transversal, apenas variando a bitola das barras, espera-se que, para uma mesma carga, a coluna com as barras de aço de maior bitola apresente flechas menores. Porém nem sempre isso ocorre.

Considere duas colunas de 5 m cada, ambas com seção transversal retangular de 20 cm x 50cm, com 2 barras de aço na armadura (tabela 4.19). A diferença entre estas é apenas a bitola das barras de aço, 16 mm em uma coluna e 40 mm na outra. Ao aplicar 500 kN no topo destas colunas as flechas calculadas são as mostradas na tabela 4.20.

TABELA 4.19 – Armadura da seção transversal utilizada no Exemplo 6

Ordem	x (cm)	y (cm)
1	3	3
2	17	3

TABELA 4.20 – Flecha no topo da coluna do Exemplo 6

Bitola (mm)	Flecha e x (cm)	Flecha em y (cm)
16	0.000	0.543
40	0.000	1.404

Ao contrário do esperado, a coluna com menor área de aço apresentou menores flechas.

Infelizmente este resultado não é esperado e detectado no cálculo de dimensionamento através do método da biseção. Porém, na conclusão deste trabalho, é sugerido um outro método de dimensionamento, que considera este fenômeno.

5 Conclusões

Acredita-se que o programa é bastante completo, de forma que possa ser utilizado sem complicações para a maioria dos problemas propostos. Sua interface gráfica dividida em abas facilita a localização das informações, e assim, torna sua operação mais simples e rápida. As funções auxiliares encontradas na barra de menu também facilitam o modelamento do problema; estas, associadas com a possibilidade de salvar os dados de entrada em arquivos, permitem que diversas combinações sejam testadas sem que seja necessário modelar os problemas novamente. Todo o código fonte do programa é disponibilizado juntamente com o programa, assim cada usuário pode fazer as alterações que julgar necessárias para facilitar seu trabalho.

Tendo em vista o aspecto didático do *software*, a ferramenta de exportar os dados do cálculo de diferenças finitas permite que sejam visualizados praticamente todos os parâmetros de cada passo do problema, servindo em salas de aula como exemplo prático do método. Busca-se também, através da interface gráfica, uma maior compreensão sobre o comportamento do concreto armado quando submetido a tensões.

Espera-se que o *software* possa também ser utilizado nos projetos de concreto estrutural dos alunos da Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica do ITA. Permitindo que os alunos poupem tempo nos processos numéricos e possam se dedicar em análises mais complexas das estruturas projetadas.

5.1 Sugestões de continuidade do trabalho

Algumas sugestões para tornar o aplicativo mais abrangente:

- Permitir que colunas com seções transversais variáveis sejam analisadas também;

paral tal é necessário mudar a estrutura dos objetos e pequenos detalhes na rotina do cálculo de diferenças finitas. Uma dificuldade que pode surgir é o modo em que são entrados os dados, porém isso pode ser contornado através da leitura de um arquivo com tais dados, infelizmente com esta estratégia o programa perde o aspecto visual.

- Permitir que outras funções tensão-deformação dos materiais possam ser entradas pelo usuário, com a intenção de admitir no modelo um comportamento observado em laboratório, ou até mesmo algum outro comportamento teórico. Para tal basta alterar as funções dos materiais, suas derivadas, e as funções $I_n(\varepsilon)$, $J_n(\varepsilon)$ e $K_n(\varepsilon)$ relativas ao concreto.
- Considerar uma tabela de valores definidos para as bitolas das barras de aço. Assim o cálculo de dimensionamento busca a solução ótima apenas com estes valores, o que torna o cálculo muito mais rápido. Com este método evita-se o fenômeno mostrado no Exemplo 6 do Capítulo 4.
- Permitir que os trechos em que a coluna é dividida possuam tamanhos diferentes. Com isto é possível fazer um refinamento melhor em regiões de maior interesse. Uma outra alternativa é admitir uma malha variável com refinamento adaptativo ao longo das iterações.
- Comparar os resultados do método utilizando as diferenças finitas com o método dos elementos finitos.

Referências Bibliográficas

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR-6118, Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. São Paulo, 2003.

MEDEIROS, G. A. **Programa para Análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta**. Monografia (Trabalho de Graduação) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, 2004.

MENDES NETO, F. **Tópicos sobre a Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado**. Tese de Doutorado — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2000.

MENDES NETO, F. **EDI-38 Concreto Estrutural I**. São José dos Campos, SP, 2005.

RÜSCH, H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. **ACI Journal**, 1960.

SANTOS, L. M. **Cálculo de Concreto Armado Segundo a Nova NB-1 e o CEB**. São Paulo, SP, 1981. v. 2.

WIKIPEDIA: Cimento armado. 2006. Disponível em:
<http://it.wikipedia.org/wiki/Cimento_armato>. Acesso em: 14 out. 2006.

Anexo A - Esforços resistentes no concreto

São mostradas as integrais utilizadas na determinação dos esforços resistentes no concreto (2.6, 2.7 e 2.8) a partir da função tensão-deformação deste material (1.2). Por apresentar o resultado muito próximo ao exato e de forma mais eficiente, como proposto em (MENDES NETO, 2000), o método utilizado é a integração pelo Teorema de Green (transformando uma integral de área em uma integral de linha), ou seja, será necessário apenas fazer a integração nas arestas da seção transversal. Sendo esta um polígono de N vértices, basta conhecer a posição de cada um destes, x_i e y_i , no sentido anti-horário (no sentido-horário deve-se multiplicar o resultado final por -1). A partir destas integrais são obtidos os esforços resistentes no concreto, N_c , M_{x_c} e M_{y_c} .

Comparações numéricas entre este método e outros podem ser encontradas em (MENDES NETO, 2000).

Considerando que o plano de deformações na seção transversal em questão seja dado pelos parâmetros ε_0 , κ_x e κ_y :

Caso de ambas curvaturas (κ_x e κ_y) nulas, ou seja, deformação constante e igual a ε_0 na seção

$$N_c = \sigma_c(\varepsilon_0) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \quad (\text{A.1})$$

$$M_{x_c} = \sigma_c(\varepsilon_0) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (y_i + y_{i+1}) \quad (\text{A.2})$$

$$M_{y_c} = \sigma_c(\varepsilon_0) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (x_i + x_{i+1}) \quad (\text{A.3})$$

Caso de κ_y não nula

$$N_c = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{1_i} \quad (\text{A.4})$$

$$M_{x_c} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{2_i} \quad (\text{A.5})$$

$$M_{y_c} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{5_i} \quad (\text{A.6})$$

Caso de κ_x não nula

$$N_c = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{1_i} \quad (\text{A.7})$$

$$M_{x_c} = -\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{3_i} \quad (\text{A.8})$$

$$M_{y_c} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{4_i} \quad (\text{A.9})$$

onde:

o vértice ' $N + 1$ ' coincidente com o vértice ' 1 ',

$$f_{1_i} = \begin{cases} I_{1_i} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{I_{2_{i+1}} - I_{2_i}}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$f_{2_i} = \begin{cases} I_{1_i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{g_i(I_{2_{i+1}} - I_{2_i}) + (y_{i+1} - y_i)(K_{1_{i+1}} - K_{1_i})}{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$f_{3_i} = \begin{cases} f_{2_i} + \frac{I_{2_i}}{\kappa_x} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ f_{2_i} + \frac{1}{\kappa_x} \frac{I_{3_{i+1}} - I_{3_i}}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$f_{4_i} = \begin{cases} I_{1_i} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{h_i(I_{2_{i+1}} - I_{2_i}) + (x_{i+1} - x_i)(K_{1_{i+1}} - K_{1_i})}{(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$f_{5_i} = \begin{cases} f_{4_i} - \frac{I_{2_i}}{\kappa_y} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ f_{4_i} - \frac{1}{\kappa_y} \frac{I_{3_{i+1}} - I_{3_i}}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$I_1(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^2(6 - \varepsilon)}{12} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon - 2}{3} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$I_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^3(8 - \varepsilon)}{48} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 2}{6} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4(10 - \varepsilon)}{48} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon(\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2) - 4}{30} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$K_1(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4(15 - 2\varepsilon)}{120} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^2(\varepsilon - 1) + 2}{15} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$a_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \quad (\text{A.19})$$

$$g_i = y_i \varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \varepsilon_i \quad (\text{A.20})$$

$$h_i = x_i \varepsilon_{i+1} - x_{i+1} \varepsilon_i \quad (\text{A.21})$$

Os valores encontrados com estas equações são referentes somente às parcelas no concreto. Para a determinação dos esforços resistentes na seção, ainda deve-se somar os esforços que surgem nas barras de aço, N_s , M_{x_s} e M_{y_s} .

Anexo B - Cálculo de verificação

B.1 Método de Newton-Raphson no cálculo de verificação

De acordo com (MENDES NETO, 2000), o caso genérico de Newton-Raphson para diversas variáveis pode ser escrito na forma:

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i - [\nabla f(\tilde{x}_i)]^{-1} \tilde{f}(\tilde{x}_i) \quad (\text{B.1})$$

onde, no caso de 3 equações e 3 variáveis:

$$\tilde{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}_i) = \begin{Bmatrix} f(x_i, y_i, z_i) \\ g(x_i, y_i, z_i) \\ h(x_i, y_i, z_i) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$[\nabla f(\tilde{x}_i)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial f}{\partial y}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial f}{\partial z}|_{x_i, y_i, z_i} \\ \frac{\partial g}{\partial x}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial g}{\partial y}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial g}{\partial z}|_{x_i, y_i, z_i} \\ \frac{\partial h}{\partial x}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial h}{\partial y}|_{x_i, y_i, z_i} & \frac{\partial h}{\partial z}|_{x_i, y_i, z_i} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Este último termo é conhecido com matriz Jacobiana.

Para o problema da verificação, a fórmula de recorrência dos parâmetros mostrada em (B.1) apresenta a seguinte forma (o índice R representa os esforços resistentes):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{0_{i+1}} \\ \kappa_{x_{i+1}} \\ \kappa_{y_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{0_i} \\ \kappa_{x_i} \\ \kappa_{y_i} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{yR}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N - N_R \\ M_x - M_{xR} \\ M_y - M_{yR} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

As derivadas parciais dos esforços resistentes contidas na matriz Jacobiana, J , assim como os próprios esforços, podem ser decompostas em parcelas referentes ao concreto e ao aço. Portanto a matriz também pode ser dividida em uma para cada material:

$$J = J_c + J_s \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial N_{Rc}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial N_{Rs}}{\partial \varepsilon_0} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_x} + \frac{\partial N_{Rs}}{\partial \kappa_x} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{yR}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_y} + \frac{\partial N_{Rs}}{\partial \kappa_y} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_x} + \frac{\partial M_{xRs}}{\partial \kappa_x} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_y} + \frac{\partial M_{xRs}}{\partial \kappa_y} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{yRc}}{\partial \kappa_y} + \frac{\partial M_{yRs}}{\partial \kappa_y} \quad (\text{B.12})$$

B.1.1 Concreto

Para κ_x e κ_y nulos as equações se tornam:

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{2} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_x} = \frac{1}{6} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i (y_i + y_{i+1}) \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{6} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i (x_i + x_{i+1}) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_x} = \frac{1}{12} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_y} = -\frac{1}{24} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i [x_i y_{i+1} + 2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_{i+1} y_i] \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial M_{yRc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{12} D_c(\varepsilon_0) \sum_{i=1}^N a_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) \quad (\text{B.18})$$

Para κ_y não nulo as equações se tornam:

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{6_i} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_x} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{7_i} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{\kappa_y} [-N_c + \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{8_i}] \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_x} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{9_i} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_y} = -\frac{1}{\kappa_y} [M_{x_c} + \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{10_i}] \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial M_{yRc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{\kappa_y} [-2M_{y_c} + \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i) f_{11_i}] \quad (\text{B.24})$$

Para κ_x não nulo as equações se tornam:

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{6i} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_x} = -\frac{1}{\kappa_x} \left[N_c + \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{7i} \right] \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial N_{Rc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{8i} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_x} = \frac{1}{\kappa_x} \left[-2M_{x_c} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{9i} \right] \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial M_{xRc}}{\partial \kappa_y} = -\frac{1}{\kappa_x} \left[M_{x_c} + \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{10i} \right] \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial M_{yRc}}{\partial \kappa_y} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) f_{11i} \quad (\text{B.30})$$

onde:

$$f_{6i} = \begin{cases} \sigma_i & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta \varepsilon_i} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

$$f_{7i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{g_i \Delta I_{1i} + \Delta y_i \Delta J_{1i}}{(\Delta \varepsilon_i)^2} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

$$f_{8i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{h_i \Delta I_{1i} + \Delta x_i \Delta J_{1i}}{(\Delta \varepsilon_i)^2} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

$$f_{9i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2}{3} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{g_i \Delta I_{1i} + 2g_i \Delta y_i \Delta J_{1i} + (\Delta y_i)^2 \Delta J_{2i}}{(\Delta \varepsilon_i)^3} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

$$f_{10i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i y_{i+1} + 2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_{i+1} y_i}{6} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{h_i g_i \Delta I_{1i} + (g_i \Delta x_i + h_i \Delta y_i) \Delta J_{1i} + \Delta x_i \Delta y_i \Delta J_{2i}}{(\Delta \varepsilon_i)^3} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

$$f_{11_i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2}{3} & \text{se } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \\ \frac{h_i \Delta I_{1_i} + 2h_i \Delta x_i \Delta J_{1_i} + (\Delta x_i)^2 \Delta J_{2_i}}{(\Delta \varepsilon_i)^3} & \text{se } \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

$$J_1(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^3(16-3\varepsilon)}{48} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^2-2}{16} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

$$J_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4(5-\varepsilon)}{20} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^3-4}{15} & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

$$D_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon < 0 \\ \sigma_{cd} \frac{2-\varepsilon}{2} & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ 0 & \text{se } \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (\text{B.40})$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (\text{B.41})$$

$$\Delta I_{1_i} = I_{1_{i+1}} - I_{1_i} \quad (\text{B.42})$$

$$\Delta J_{1_i} = J_{1_{i+1}} - J_{1_i} \quad (\text{B.43})$$

$$\Delta J_{2_i} = J_{2_{i+1}} - J_{2_i} \quad (\text{B.44})$$

B.1.2 Aço

Assim como no cálculo de esforços resistentes, as parcelas referentes à área de aço serão substituídas por somatórias.

$$\frac{\partial N_{R_s}}{\partial \varepsilon_0} = \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial N_{R_s}}{\partial \kappa_x} = - \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} y_{s_i} \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial N_{R_s}}{\partial \kappa_y} = \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} x_{s_i} \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial M_{x_{R_s}}}{\partial \kappa_x} = \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} y_{s_i}^2 \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial M_{x_{R_s}}}{\partial \kappa_y} = - \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} x_{s_i} y_{s_i} \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial M_{y_{R_s}}}{\partial \kappa_y} = \sum_{i=1}^n D_s(\varepsilon_i) A_{s_i} x_{s_i}^2 \quad (\text{B.50})$$

onde:

A_{s_i} é a área da barra i ;

ε_i é a deformação na barra i ;

$$D_s(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon < -\varepsilon_{yd} \\ \frac{f_{yd}}{\varepsilon_{yd}} & \text{se } -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

B.2 Algoritmo do processo de verificação

Este cálculo é uma série de iterações do cálculo de esforços resistentes visando obter esforços próximos o suficiente daqueles aplicados. Considere

(N, M_x, M_y) os esforços aplicados na seção;

(N_R, M_{x_R}, M_{y_R}) os esforços resistentes;

$(\varepsilon_0, \kappa_x, \kappa_y)$ o respectivo plano de deformações.

O processo só deve ser finalizado quando a norma Euclidiana (adimensional) de $\tilde{f}(\tilde{x})$, f , for menor que a tolerância. Ou seja:

$$f = \|\tilde{f}(\tilde{x})\| = \sqrt{\left(\frac{N - N_R}{N}\right)^2 + \left(\frac{M_x - M_{yR}}{M_x}\right)^2 + \left(\frac{M_y - M_{yR}}{M_y}\right)^2} \quad (\text{B.52})$$

É claro que se em algum passo for detectada a ruptura da seção o processo também é interrompido.

Os seguintes passos resumem o processo:

1. fazer $\varepsilon_0 = \kappa_x = \kappa_y = 0$;¹
2. determinar os esforços resistentes (N_R , M_{xR} e M_{yR}) para a distribuição de deformações;
3. calcular f de acordo com a equação (B.52). Se $f < \text{tolerância}$ a distribuição de deformações é aceitável, siga para o passo 7. Caso contrário continue;
4. calcular a matriz Jacobiana de cada material e somá-las para obter J ;
5. calcular o determinante da matriz J . Se $\det J < \text{precisão}$ a seção não suporta N , M_x e M_y , a rotina deve ser finalizada. Caso contrário continue;²
6. atualizar os valores de ε_0 , κ_x e κ_y através da equação (B.5). Volte para o passo 2;
7. checar se a distribuição de deformações encontrada atende às condições do ELU. Se atender a rotina é finalizada informando a distribuição de deformações encontrada. Caso contrário a seção não suporta os esforços;

¹Outras distribuições de deformações podem ser utilizadas, porém recomenda-se fortemente que esta seja utilizada para evitar que falsas rupturas sejam detectadas no processo (MENDES NETO, 2005).

²Deve-se considerar valores adimensionais para cada elemento da matriz antes de calcular seu determinante. Isto deve ser feito para que o valor da precisão utilizado seja coerente para qualquer sistema de unidades e seção transversal.

Anexo C - Método das diferenças finitas

Neste anexo é apresentado o método das diferenças finitas, utilizado na determinação da posição deformada da coluna.

A altura do pilar, L , é dividida em m partes iguais, gerando $m + 1$ seções (numeradas do engaste ao topo, de 0 a m) de comprimento

$$\Delta L = \frac{L}{m} \quad (\text{C.1})$$

Para cada uma dessas $m + 1$ seções são determinados os esforços que devem ser suportados, de acordo com a figura C.1.

$$N_i = \sum_{j=1}^N N_j k(i, j) \quad (\text{C.2})$$

$$M_{x_i} = \sum_{j=1}^N \{M_{x_j} - N_j[\bar{y}(j) - \bar{y}(i)] - F_{y_j}[\bar{h}(j) - \bar{h}(i)]\} k(i, j) \quad (\text{C.3})$$

$$M_{y_i} = \sum_{j=1}^N \{M_{y_j} + N_j[\bar{x}(j) - \bar{x}(i)] + F_{x_j}[\bar{h}(j) - \bar{h}(i)]\} k(i, j) \quad (\text{C.4})$$

onde:

N_i , M_{x_i} e M_{y_i} são os esforços a serem suportados na seção i ;

F_x e F_y representam forças horizontais nas duas direções principais;

N_j , M_{x_j} , M_{y_j} , F_{x_j} e F_{y_j} são os esforços aplicados à coluna em uma seção j qualquer;

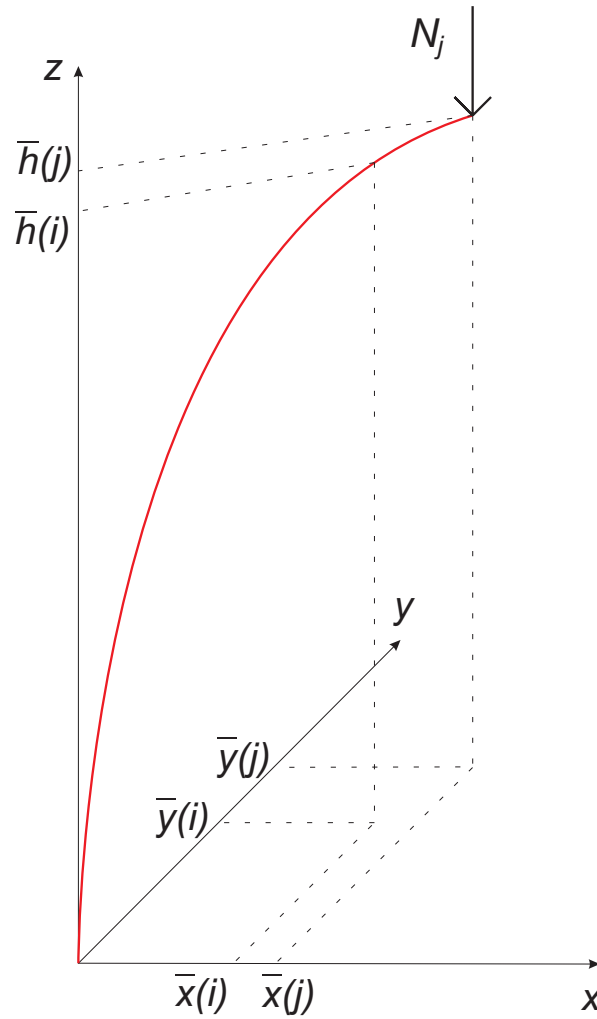


FIGURA C.1 – Esquema mostrando a posição deformada da coluna

N é a quantidade de seções da coluna com esforços aplicados;

j é a seção onde um esforço qualquer é aplicado;

$\bar{x}(j)$ é a posição deformada da seção j na direção x ;

$\bar{y}(j)$ é a posição deformada da seção j na direção y ;

$\bar{h}(j)$ é a altura da seção j ;

$$k(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{h}(j) \geq \bar{h}(i) \\ 0 & \text{se } \bar{h}(j) < \bar{h}(i) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Conhecendo os esforços na seção i é possível fazer o cálculo de verificação nesta e assim conhecer os parâmetros do plano de deformação desta seção, ε_{0_i} , κ_{x_i} e κ_{y_i} .

Com esta deformação e o comprimento até a seção $i + 1$, ΔL , é possível determinar a posição da próxima seção. Chegando ao final da coluna esta é reanalisada já considerando as deformações encontradas, $\bar{x}(j)$ e $\bar{y}(j)$.

Se $i \neq 0$

$$\bar{x}(i + 1) = \Delta L^2 \frac{\kappa_y}{1000} + 2\bar{x}(i) - \bar{x}(i - 1) \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{y}(i + 1) = \Delta L^2 \frac{-\kappa_x}{1000} + 2\bar{y}(i) - \bar{y}(i - 1) \quad (\text{C.7})$$

Se $i = 0$

$$\bar{x}(1) = \Delta L^2 \frac{\kappa_y}{2000} \quad (\text{C.8})$$

$$\bar{y}(1) = \Delta L^2 \frac{-\kappa_x}{2000} \quad (\text{C.9})$$

Este processo pode ser resumido nos seguintes passos:

1. fazer uma deformação nula para toda a coluna em x e y . Ou seja, $\bar{x}(i) = 0$ e $\bar{y}(i) = 0$ para todas as $m + 1$ seções;
2. da seção $i = 0$ até $m - 1$ repetir os passos de 3 a 6;
3. armazenar os valores da flecha no topo da coluna. $Flecha(x) = \bar{x}(m)$ e $Flecha(y) = \bar{y}(m)$;
4. determinar os esforços na seção i através das fórmulas (C.2), (C.3) e (C.4);
5. com o cálculo de verificação determinar o plano de deformações desta seção para estes esforços. Uma ruptura detectada neste passo implica na falta de estabilidade da estrutura,¹ se isso ocorrer o processo deve parar;
6. atualizar o valor de $\bar{x}(i + 1)$ e $\bar{y}(i + 1)$ através das equações (C.6) a (C.9);

¹Desde que o processo tenha sido iniciado com valores de flecha nulos.

7. comparar a flecha obtida na seção m (topo da coluna) com aquela do início da iteração:

$$f = \sqrt{\left(\frac{Flecha(x) - \bar{x}(m)}{B_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{Flecha(y) - \bar{y}(m)}{B_{ref}}\right)^2} \quad (C.10)$$

Se esta diferença f for menor que a tolerância,² a posição deformada encontrada é satisfatória. Caso contrário voltar ao passo 2 utilizando as posições deformadas $\bar{x}(i)$ e $\bar{y}(i)$.

²Para calcular f de forma adimensional, deve-se utilizar uma base de referência, B_{ref} . No caso deste *software* é utilizada a altura (na direção y) da seção transversal.

Anexo D - Método da bissecção no dimensionamento

Apresenta-se o método da bissecção, algoritmo utilizado na determinação da área de aço mínima e suficiente para suportar os esforços em todas as seções analisadas da coluna, ou simplesmente, dimensionamento:

1. determinar os valores máximo e mínimo (A_{smax} e A_{smin}) da área de aço aceitáveis na seção transversal;¹
2. fazer $A_s = A_{smin}$ e determinar a bitola de cada barra de aço;

$$\phi_i = \sqrt{\frac{4A_s}{N\pi}} \quad (D.1)$$

onde i significa uma barra qualquer, N a quantidade de barras, e admite-se que todas as barras terão o mesmo diâmetro;²

3. analisar a coluna pelo método das diferenças finitas, utilizando as bitolas calculadas. Se a coluna suportar os esforços a rotina deve ser finalizada, pois a coluna é estável com o mínimo de aço. Caso contrário assumir $A_s = A_{smax}$;
4. analisar a coluna. Se esta não suportar os esforços a rotina deve ser finalizada, pois nem mesmo com a área máxima de aço a coluna está em equilíbrio. Caso contrário siga em frente;
5. testar se $|\frac{A_{smax} - A_{smin}}{A_c}| < \textit{tolerância}$, se sim a rotina é finalizada e A_s é a área de

¹Estes valores podem ser encontrados em normas.

²Pode-se contornar este problema criando mais de uma barra na mesma posição, assim sua área individual será maior.

ção ótima. Caso contrário siga em frente;³

6. fazer $A_s = \frac{A_{smin} + A_{smax}}{2}$ e checar a coluna com estes novos valores. Se a coluna suportar siga em frente, caso contrário vá para 7;
7. A_{smax} recebe o valor A_s , volte para o passo 5;
8. A_{smin} recebe o valor A_s , volte para o passo 5.

³O cálculo de comparação com a *tolerância* é feito de forma adimensional, por isso a divisão por A_c

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TC</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">21 de novembro de 2006</p>	3. DOCUMENTO Nº <p style="text-align: center;">CTA/ITA-IEI/TC-008/2006</p>	4. Nº DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">74</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Programa para Análise e Verificação de Estabilidade de Pilares de Concreto Armado			
6. AUTOR(ES): Fábio Spezzano Toniolo			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica – ITA/IEI			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: 1. Concreto armado; 2. Estabilidade; 3. Software; 4. Estruturas			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estruturas de concreto; Concreto armado; Programas de aplicação (computadores); Desenvolvimento de software; Cálculo estrutural; Engenharia estrutural			
10. APRESENTAÇÃO: (X) Nacional () Internacional ITA, São José dos Campos, 2006, 74 páginas			
11. RESUMO: Este trabalho apresenta a elaboração de um programa de computador didático para análises de pilares de concreto armado. A principal funcionalidade do <i>software</i> é a verificação da estabilidade da coluna através do cálculo de diferenças finitas; também é oferecido ao usuário o dimensionamento da área de armadura e os cálculos de verificação e esforços resistentes em uma seção transversal qualquer. Neste texto encontra-se o manual operacional do programa, alguns exemplos e também o modelamento teórico abordado. Espera-se que o software possa ser utilizado por estudantes em cursos de concreto estrutural assim como em escritórios de cálculo.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			