

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Eric Luis Barroso Cavalcante

Otimização de Placas de Alumínio Reforçadas Sujeitas à
Flambagem

Trabalho de Graduação
2004

Infra-Estrutura
Aeronáutica

ERIC LUIS BARROSO CAVALCANTE

**OTIMIZAÇÃO DE PLACAS DE ALUMÍNIO REFORÇADAS SUJEITAS À
FLAMBAGEM**

Orientador

Prof. Dr Eliseu Lucena Neto (ITA)

Co-orientador

M.Sc. Marcelo Augusto da Mata Machado (Embraer S/A)

DIVISÃO DE ENGENHARIA DE INFRA-ESTRUTURA AERONÁUTICA

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS

CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

2004

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Cavalcante, Eric Luis Barroso

Otimização de Placas de Alumínio Reforçadas Sujeitas à Flambagem / Eric Luis Barroso Cavalcante
São José dos Campos, 2004.
33f.

Trabalho de Graduação – Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004. Orientadores: Prof. Dr. Eliseu Lucena Neto e Me. Marcelo Augusto da Mata Machado.

1. Análise estrutural. 2. Placas (membros estruturais). 3. Otimização. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Cavalcante, Eric Luis Barroso. **Otimização de Placas de Alumínio Reforçadas Sujeitas à Flambagem**. 2004. 33f. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Eric Luis Barroso Cavalcante

TÍTULO DO TRABALHO Otimização de Placas de Alumínio Reforçadas Sujeitas à Flambagem. TIPO DO TRABALHO/ANO: Graduação / 2004

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Nome do autor

Rua Polaris

Bloco H8A, Apt 135

CTA

São José dos Campos – SP

CEP 12228 - 460

Otimização de Placas de Alumínio Reforçadas Sujeitas à Flambagem

Eric Luis Barroso Cavalcante
Autor

Prof. Dr. Eliseu Lucena Neto
Orientador

M.Sc. Marcelo Augusto da Mata Machado
Co-orientador

Prof. Dr. Eliseu Lucena Neto
Coordenador do Curso de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica

São José dos Campos, 01 de dezembro de 2004

AGRADECIMENTOS

Sou grato ao ITA pela oportunidade de vislumbrar o quanto há de conhecimento a ser adquirido num mundo cada vez mais guiado pelos avanços da ciência. Sou grato a esses 5 anos de faculdade pela capacidade que adquiri de resolver problemas de toda ordem. Não necessariamente problemas de grande dificuldade, mas problemas relativos aos diversos âmbitos da vida.

Agradeço ao H8 pelas amizades que aqui fiz e que procurarei preservar para sempre.

Sou grato ao Prof. Eliseu pela sua paciência em orientar-me na realização deste trabalho de graduação que possui utilidade para uma empresa de renome.

Agradeço à minha família e, principalmente ao meu avô, Luiz Octávio Garcia Barroso, pelo amor, incentivo e investimento incondicionais durante esses cinco anos de faculdade.

RESUMO

Placas retangulares de alumínio reforçadas numa das direções e sujeitas a flambagem provocada por uma compressão uniaxial na direção dos reforçadores são estruturas de aplicação usual, principalmente no extradorso ou intradorso de asas de aeronaves. O presente trabalho trata do projeto dessas placas com minimização da peso. A largura e o comprimento da placa são parâmetros conhecidos. As variáveis de projeto são o número de reforçadores, sua espessura e altura e a espessura do revestimento. São especificadas restrições geométricas relativas às próprias variáveis de projeto e restrições estruturais referentes à carga de flambagem local (reforçadores e revestimento entre reforçadores) e à carga de flambagem global. Um outro tipo de restrição que deve ser considerada é o fato de ser inteiro o número de semi-ondas dos modos de flambagem local. A ferramenta de otimização utilizada é o *Solver* da planilha eletrônica ExcelTM da Microsoft que utiliza o *método do gradiente reduzido generalizado*.

ABSTRACT

Aluminum rectangular plates axially reinforced and compressed are structures of usual application mainly as part of the lower and upper aircraft wing skin. The present work aims the design of these plates with minimum weight. The plate width and length are known parameters and the stiffeners are assumed to be uniformly spaced. The design variables are the number of stiffeners, its width and height and the skin thickness. Geometric constraints related to the design variables and structural constraints related to local buckling (stiffeners and skin between stiffeners) and to global buckling are specified. Another type of constraint which must be considered is the discrete-value nature of the number of half-waves of the local buckling modes. The optimization is performed by the Microsoft Excel Solver which uses the *generalized reduced gradient method*.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. CARGAS DE FLAMBAGEM	3
2.1 Flambagem Global do Pannel	4
2.2 Flambagem Local de um Pannel do Revestimento entre Reforçadores	6
2.3 Flambagem Local do Reforçador	8
3. OTIMIZAÇÃO	10
3.1 Formulação do Problema	10
3.1.1 Restrições do Pannel Integral	11
3.1.2 Restrições dos Painéis de Revestimento entre Reforçadores	11
3.1.3 Restrições dos Reforçadores	12
3.2 Método	13
4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	14
4.1 Exemplo 1	14
4.2 Exemplo 2	26
4.3 Exemplo 3	28
4.4 Exemplo 4	30
5. CONCLUSÃO	32
REFERÊNCIAS	33

1. INTRODUÇÃO

A escassez de recursos naturais e financeiros tem acelerado a busca de métodos e processos que venham a gerar a melhor relação custo-benefício nas mais diversas áreas, tais como a econômica, a produtiva, a tecnológica, etc. Isso leva, por exemplo, ao projeto de estruturas com menores coeficientes de segurança, ao desenvolvimento de materiais sintéticos que tenham as propriedades específicas para cada aplicação às quais eles se destinam e, como consequência, ao desenvolvimento de projetos mais eficientes.

No campo da indústria aeronáutica é de suma importância o projeto otimizado de partes da aeronave com o intuito de minimizar o peso da mesma e ganhar em carga paga.

Há muitos métodos disponíveis para resolver um problema de otimização. As primeiras publicações sobre otimização de projetos estruturais podem ser encontradas no século XIX. Inicialmente, com o trabalho de Maxwell (1869) e, em seguida, seu desenvolvimento por Michell (1904), suprimiram-se os conceitos básicos para a solução de problemas de otimização de peso de estruturas treliçadas simples (sujeitas apenas às restrições de tensão). Desta época até o final da década de 40, os trabalhos escritos foram quase todos relacionados com o mesmo tipo de problema. No final da década de 40, o tão conhecido Método Simplex para resolver problemas de programação linear foi desenvolvido. A partir daí, com o advento do computador e após o surgimento da linguagem Fortran, o avanço foi grande. Empresas como a NASA (1960), Bell Aerosystems (1964) e Boeing (1968) envolveram-se em pesquisas relacionadas com a otimização estrutural. Em seguida, GALLAGHER e ZIENKIEWICZ (1973) apresentaram a primeira coletânea de artigos importantes em otimização estrutural.

Após esta fase, na década de 70, as pesquisas se caracterizaram pelo desenvolvimento de algoritmos para uso em problemas de otimização estrutural.

A partir da década de 70, até a atualidade, as pesquisas têm-se concentrado na melhoria dos códigos computacionais baseados em métodos de gradiente de passos largos, visando a solução de problemas de grande porte de forma tão eficiente quanto a solução já existente de problemas de pequeno e médio porte (SACOMAN, 1994).

Nesse sentido, há que se ressaltar o *método do gradiente reduzido generalizado* desenvolvido por Lasdon e Smith para resolver problemas não-lineares de grande porte (SACOMAN, 1994). Sua introdução na ferramenta computacional de otimização *Solver* da planilha eletrônica ExcelTM da Microsoft é feita em 1991 por Lasdon e Waren. É essa a ferramenta por nós utilizada no trabalho.

O advento desses métodos de otimização proporciona uma nova filosofia em projetos de asa de aeronaves. Possibilitam uma abordagem ordenada de decisões de projeto, onde antes eram baseadas apenas na experiência e na intuição. Contudo, isso não poderia ser traduzido como uma sugestão de que o projeto possa ser reduzido a iterações de computador ou que a experiência e a intuição do engenheiro sejam desprezíveis. Na verdade, o computador pode agora ser utilizado para fazer os cálculos repetitivos e entediantes, possibilitando aos projetistas gastar tempo nos aspectos criativos dos projetos de engenharia.

Neste trabalho, o problema consiste em otimizar o projeto de placas de alumínio reforçadas (painéis integrais) existentes no intradorso e extradorso da asa de aeronaves, as quais estão sujeitas à carga de compressão e, conseqüentemente, à flambagem.

O trabalho está assim organizado. No Capítulo 2 faz-se a descrição sucinta de como obter a carga crítica de flambagem local do reforçador e do revestimento entre reforçadores, e a carga de flambagem global da placa. O Capítulo 3 estabelece o problema de otimização. O Capítulo 4 mostra alguns painéis integrais com peso mínimo obtidos a partir de uma dada geometria inicial. O Capítulo 5 traz as conclusões e alguns comentários.

2. CARGAS DE FLAMBAGEM

A placa retangular reforçada da Figura 2.1 tem dimensões a e b e corresponde a um painel integral típico do extradorso ou intradorso de uma asa de aeronave. A placa é considerada simplesmente apoiada nas longarinas e em duas nervuras adjacentes, com n reforçadores igualmente espaçados e sujeita a uma carga axial de compressão de resultante P . O plano xy situa-se na superfície média do revestimento. A Figura 2.2 traz detalhes adicionais.

O painel é de alumínio AL7050 T7451 (Especificação AMS-4050):

$$E = 7308 \text{ daN/mm}^2 \quad \nu = 0,25 \quad (2.1)$$

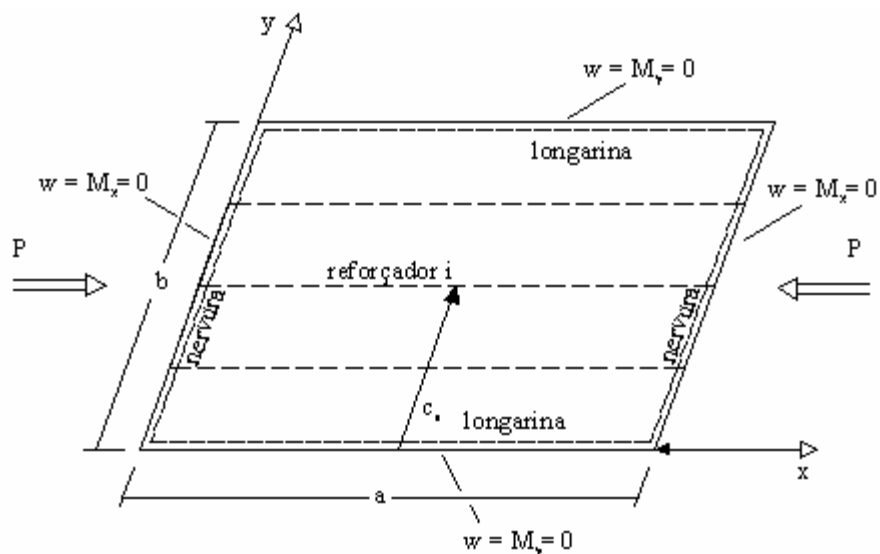


Figura 2.1 Painel integral simplesmente apoiado.

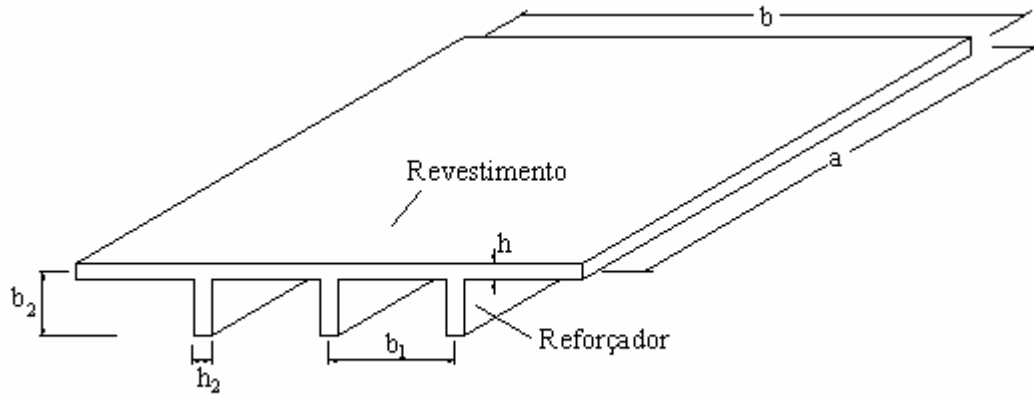


Figura 2.2 Alguns parâmetros geométricos do painel.

2.1 Flambagem Global do Painel

TIMOSHENKO e GERE (1961) apresenta a seguinte expressão aproximada para a carga de flambagem global do painel:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1+r^2)^2 + 2\sum \gamma_i \text{sen}^2 \frac{\pi c_i}{b}}{r^2 \left(1 + 2\sum \delta_i \text{sen}^2 \frac{\pi c_i}{b}\right)} \quad (2.2)$$

onde

$$A = n \left(b_2 - \frac{h}{2} \right) h_2 + (n+1) b_1 h \quad \gamma_i = \frac{E \bar{I}_i}{b D} \quad \delta_i = \frac{A_i}{b h}$$

$$\bar{I}_i = I_i + A_i \left(\frac{b_2}{2} \right)^2 \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad r = \frac{a}{b}$$

$$A_i = b_2 h_2 \quad I_i = \frac{b_2^3 h_2}{12} \quad (2.3)$$

e

A	área da seção transversal do painel integral
A_i	área da seção transversal do reforçador i
b_2	altura do reforçador (a altura do reforçador é considerada como a distância da superfície média do revestimento à borda livre do reforçador)
c_i	distância da linha de centro do reforçador i à borda $y = 0$ da placa
D	rigidez à flexão do revestimento
h	espessura do revestimento
h_2	espessura do reforçador
I_i	momento de inércia da seção transversal do reforçador i em relação ao eixo horizontal que passa pelo centróide
\bar{I}_i	momento de inércia da seção transversal do reforçador i em relação ao eixo horizontal que passa pela superfície média do revestimento
P_{cr}	valor de P que provoca a flambagem global do painel
σ_{cr}	tensão de flambagem do painel integral.

Como γ_i e δ_i são parâmetros constantes para todos os reforçadores, pode-se então removê-los do somatório. O número n de reforçadores relaciona-se com $\theta = \sum \text{sen}^2 \frac{\pi c_i}{b}$ por meio de

$$\theta = 0,5(n+1), \quad (2.4)$$

obtendo-se

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 D (1+r^2)^2 + 2\gamma_i \theta}{b^2 h r^2 (1+2\delta_i \theta)}. \quad (2.5)$$

A expressão (2.2) é obtida pelo método Rayleigh-Ritz, utilizando-se a aproximação

$$w(x, y) = W_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.6)$$

para o deslocamento $w(x, y)$ em z do painel, onde W_{11} é uma constante incógnita a ser determinada pelo método. A energia de deformação para o revestimento baseia-se na teoria de placas de Kirchhoff e a energia de deformação dos reforçadores na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, sem considerar a torção. Uma expressão mais precisa para (2.2) poderia ser obtida incluindo-se a energia de deformação associada à torção dos reforçadores e incluindo-se mais termos em (2.6) (série trigonométrica).

2.2 Flambagem Local de um Painel do Revestimento entre Reforçadores

Um painel de revestimento entre reforçadores (Figura 2.3) é considerado como uma placa simplesmente apoiada nas nervuras e elasticamente apoiada nos reforçadores, sujeita à carga de compressão p_1 (por unidade de comprimento).

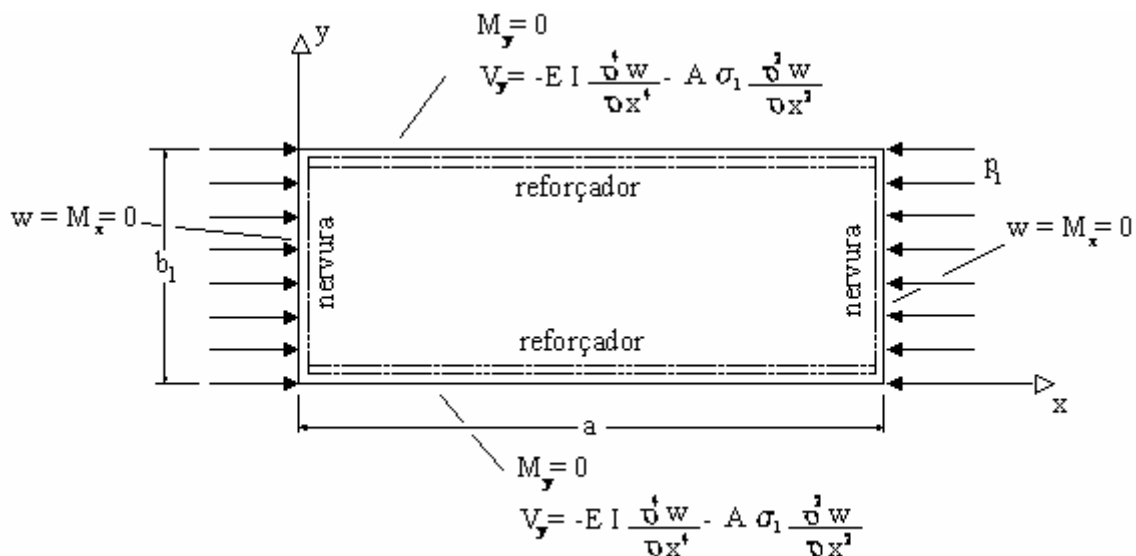


Figura 2.3 Painel de revestimento entre reforçadores.

SILVA (2004) demonstra analiticamente que a carga de flambagem do painel de revestimento é dada pela solução da equação transcendental

$$\beta_1 \left(1 - \nu + \frac{a}{m_1 \pi} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 b_1}{2} + \alpha_1 \left(1 - \nu - \frac{a}{m_1 \pi} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \right)^2 \operatorname{tgh} \frac{\alpha_1 b_1}{2} = \frac{2 m_1 \pi}{a} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \left(\frac{E I_i}{D} - \frac{a^2 A_i \sigma_{cr1}}{m_1^2 \pi^2 D} \right) \quad (2.7)$$

onde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{m_1^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{p_1 m_1^2 \pi^2}{D a^2}}} \quad \sigma_{cr1} = \frac{p_1}{h}$$

$$\beta_1 = \sqrt{-\frac{m_1^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{p_1 m_1^2 \pi^2}{D a^2}}} \quad (2.8)$$

onde

b_1	largura do painel de revestimento entre reforçadores
m_1	número de semi-ondas na direção x em que o painel de revestimento entre reforçadores flamba
p_1	carga de flambagem, por unidade de comprimento, do revestimento
σ_{cr1}	tensão de flambagem do painel de revestimento entre reforçadores.

Para obter a expressão (2.7), admite-se que o painel de revestimento comporte-se como uma placa de Kirchhoff, resolvendo-se a equação diferencial pelo método de Lévy. É uma solução exata.

2.3 Flambagem Local do Reforçador

O reforçador é considerado como uma placa simplesmente apoiada nas nervuras, com uma borda livre e a outra elasticamente engastada no revestimento e sujeito à carga de compressão p_2 , por unidade de comprimento (Figura 2.4).

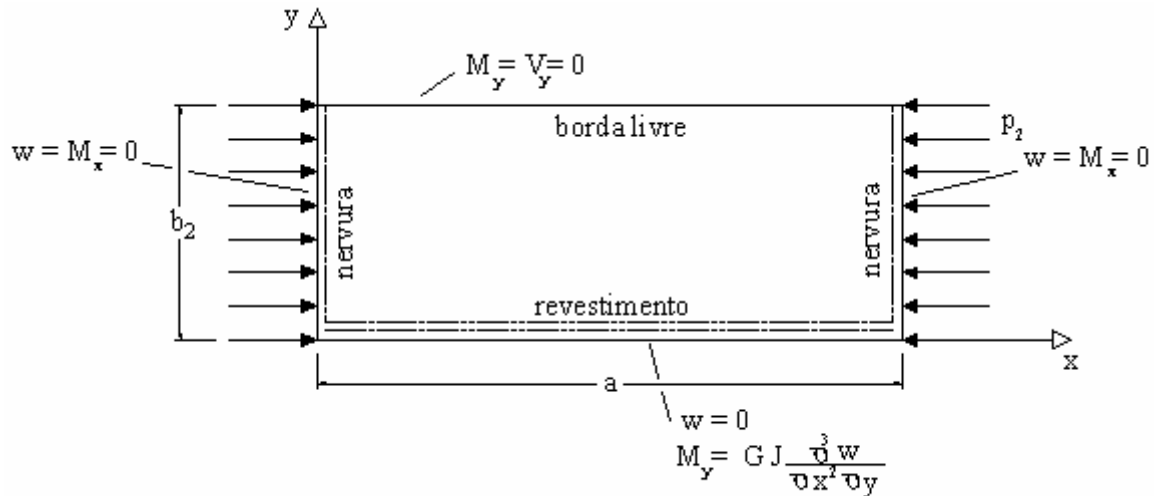


Figura 2.4 Reforçador.

SILVA (2004) demonstra analiticamente que a carga de flambagem do reforçador é dada pela solução da equação transcendental

$$\beta_2 \left[2 s t + (s^2 + t^2) \cos \beta_2 b_2 \cosh \alpha_2 b_2 + s^2 q \cos \beta_2 b_2 \sinh \alpha_2 b_2 \right] =$$

$$\alpha_2 \sin \beta_2 b_2 \left[\left(t^2 - \frac{\beta_2^2 s^2}{\alpha_2^2} \right) \sinh \alpha_2 b_2 + q t^2 \cosh \alpha_2 b_2 \right] \quad (2.9)$$

onde

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{m_2^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{p_2 m_2^2 \pi^2}{D_2 a^2}}} \quad \sigma_{cr2} = \frac{p_2}{h_2} \quad q = \frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2}{\alpha_2 k}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \sqrt{-\frac{m_2^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{p_2 m_2^2 \pi^2}{D_2 a^2}}} & s &= \alpha_2^2 - \nu m_2^2 \frac{\pi^2}{a^2} & t &= \beta_2^2 + \nu m_2^2 \frac{\pi^2}{a^2} \\
k &= \frac{G J}{D_2} \left(\frac{m_2 \pi}{a} \right)^2 & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} & D_2 &= \frac{E h_2^3}{12(1-\nu^2)} \\
k_1 &\cong \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{192 b_1}{\pi^5 h} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{\pi h}{2 b_1} \right) + \frac{1}{3^5} \operatorname{tgh} \left(\frac{3 \pi h}{2 b_1} \right) \right] \right\} & J &= k_1 b_1^3 h & & (2.10)
\end{aligned}$$

e

D_2	rigidez à flexão do reforçador
G	módulo de cisalhamento transversal
J	constante de torção
m_2	número de semi-ondas com que o reforçador flamba
p_2	carga de flambagem do reforçador por unidade de comprimento.
σ_{cr2}	tensão de flambagem do painel de revestimento entre reforçadores.

Para obter a expressão (2.9), admite-se que o reforçador comporte-se como uma placa de Kirchhoff, resolvendo-se a equação diferencial pelo método de Lévy. É uma solução exata.

3. OTIMIZAÇÃO

As *variáveis de projeto* utilizadas na descrição do problema de otimização são o número de reforçadores, como uma variável discreta, e as seguintes variáveis contínuas: a altura $b'_2 = b_2 - h/2$ do reforçador excluída a metade da espessura do revestimento, a espessura h_2 do reforçador e a espessura h do revestimento.

3.1 Formulação do Problema

Considera-se o peso do painel

$$\gamma_{al} A a \tag{3.1}$$

como a *função objetivo* a ser minimizada. O peso específico γ_{al} do alumínio e o comprimento a do painel poderiam ser omitidos da expressão (3.1).

O problema está sujeito a restrições de flambagem local dos reforçadores e dos painéis de revestimento entre reforçadores, além da flambagem global do painel integral em si. Algumas restrições geométricas são também impostas às variáveis de projeto, além da consideração de que o número de semi-ondas dos modos de flambagem local é inteiro. É um total de 12 restrições.

3.1.1 Restrições do Painel Integral

A rigidez do painel integral deverá ser tal que sua carga σ_{cr} de flambagem global (2.2) seja maior ou igual a carga externa aplicada:

$$\sigma_{cr} \geq \frac{P}{A}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Restrições dos Painéis de Revestimento entre Reforçadores

O revestimento sofre restrições geométricas em sua espessura. Por outro lado, tem-se que sua carga σ_{cr1} de flambagem (2.7) deve ser maior ou igual à carga externa aplicada.

O parâmetro β_1 é limitado a ser positivo na equação transcendental (2.7) para contornar dificuldades numéricas óbvias. O número de semi-ondas m_1 do modo de flambagem local do revestimento varia discretamente. As restrições são listadas a seguir:

$$h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$$

$$\beta_1 \left(1 - \nu + \frac{a}{m_1 \pi} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 b_1}{2} + \alpha_1 \left(1 - \nu - \frac{a}{m_1 \pi} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \right)^2 \operatorname{tgh} \frac{\alpha_1 b_1}{2} =$$

$$\frac{2 m_1 \pi}{a} \sqrt{\frac{p_1}{D}} \left(\frac{E I_i}{D} - \frac{a^2 A \sigma_{cr1}}{m_1^2 \pi^2 D} \right)$$

$$\sigma_{cr1} \geq \frac{P}{A}$$

$$\beta_1 \geq 0$$

$$m_1 \text{ é inteiro.} \quad (3.3)$$

3.1.3 Restrições dos Reforçadores

O reforçador sofre restrições geométricas em sua espessura e altura. Por outro lado, tem-se que sua carga σ_{cr2} de flambagem (2.9) deve ser maior ou igual à carga externa aplicada.

De maneira similar ao caso dos painéis de revestimento, o parâmetro β_2 é limitado a ser positivo na equação transcendental (2.9) para contornar dificuldades numéricas. O número de semi-ondas m_2 do modo de flambagem local do reforçador varia discretamente. Essas restrições são listadas a seguir:

$$h_{2\min} \leq h_2 \leq h_{2\max}$$

$$b'_{2\min} \leq b'_2 \leq b'_{2\max}$$

$$\beta_2 \left[2 s t + (s^2 + t^2) \cos \beta_2 b_2 \cosh \alpha_2 b_2 + s^2 q \cos \beta_2 b_2 \sinh \alpha_2 b_2 \right] =$$

$$\alpha_2 \sin \beta_2 b_2 \left[\left(t^2 - \frac{\beta_2^2 s^2}{\alpha_2^2} \right) \sinh \alpha_2 b_2 + q t^2 \cosh \alpha_2 b_2 \right]$$

$$\sigma_{cr2} \geq \frac{P}{A}$$

$$\beta_2 \geq 0$$

m_2 é inteiro. (3.4)

3.2 Método

O problema de otimização é claramente não-linear. Para a sua solução recorre-se ao *método do gradiente reduzido generalizado* implementado no *Solver* do ExcelTM.

Um problema geral de programação não-linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min f(x)$$

sujeito a

$$g(x) = 0$$

$$a \leq x \leq b$$

com $x, a, b \in \mathfrak{R}$; $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$; $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$; $P = \{x \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathfrak{R}$

onde as possíveis restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade por meio da adição de “variáveis de folga” e “de excesso”. Além disso, em problemas de maximização pode-se valer da relação $\max \{f(x)\} = -\min \{-f(x)\}$.

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A Tabela 4.1 contém os dados dos quatro exemplos apresentados. Procurar-se-á por meio do *Solver* do ExcelTM determinar os valores das variáveis de projeto que tornem mínimo o peso de cada painel. A primeira aplicação ($a = 500$ mm) é descrita passo à passo, mostrando-se para as demais apenas os valores iniciais e ótimos das variáveis de projeto.

Tabela 4.1 Comprimento e largura dos painéis e carga aplicada nos mesmos.

Exemplo	a (mm)	b (mm)	P (daN)
1	500	500	40000
2	1000		120000
3	1500		240000
4	2000		480000

4.1 Exemplo 1

O procedimento na solução deste problema é descrito a seguir.

1. Inicializado o Excel, o primeiro passo é inserir numa planilha:
 - 1.1 Os dados a , b , P :

Dados	
a (mm)	500
b (mm)	500
P (daN)	40000

1.2 As constantes do material E , ν , G (expressão (2.10)), γ_{al} :

Constantes	
E (daN/mm ²)	7308
ν	0,25
G (daN/mm ²)	2923,20
γ_{al} (kgf/dm ³)	2,7

1.3 Valores iniciais para as variáveis de projeto:

Variáveis de projeto	
h (mm)	13
h_2 (mm)	13
b_2' (mm)	13
n	4

1.4 Valores iniciais auxiliares $b_1 = b/(n+1)$, $b_2 = b_2' + h_1/2$, A e P/A que serão utilizados em cálculos futuros:

Valores auxiliares	
b_1 (mm)	100
b_2 (mm)	19,5
A (mm ²)	7176
P/A (daN/mm ²)	5,57

1.5 Valor inicial da Função Objetivo (3.1):

Função Objetivo	
Peso (kgf)	9,69

1.6 Valores iniciais relativos ao painel integral:

Painel	
r	1
\bar{I}_i (mm ⁴)	32131,13
D (daN.mm)	1427171
γ	0,329063
δ	0,039
$\theta = \sum \text{sen}^2 \frac{\pi c_i}{b}$	2,5
σ_{cr} (daN/mm ²)	20,47446

1.7 Valores iniciais relativos ao painel de revestimento entre reforçadores, incluindo

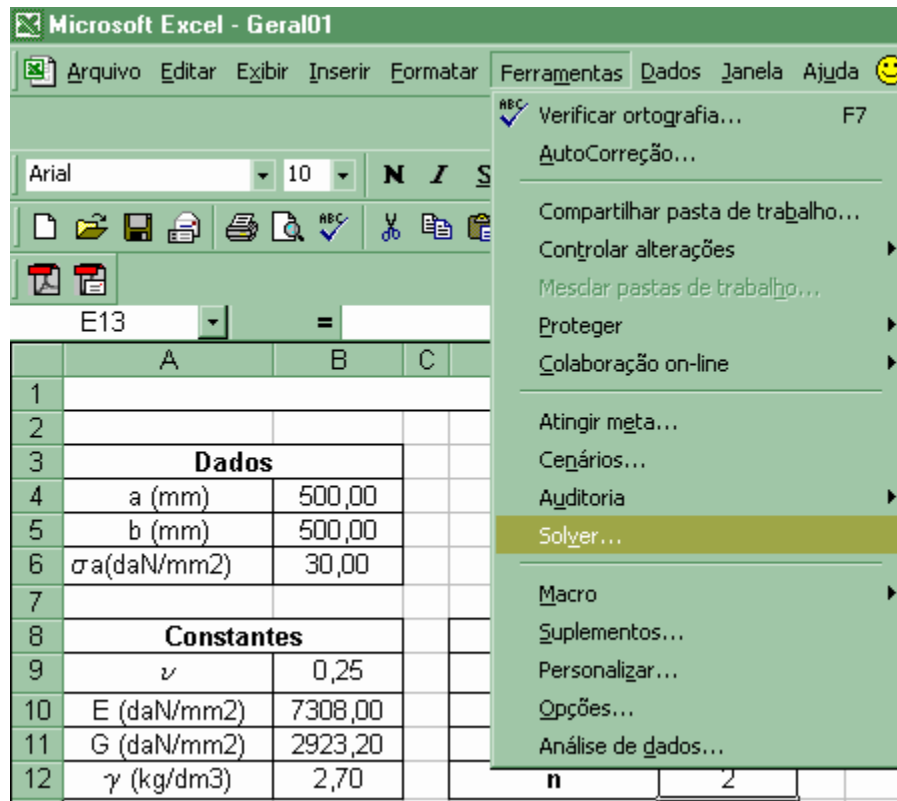
σ_{cr1} , m_1 e os dois lados da equação (2.7):

Revestimento	
σ_{cr1} (daN/mm ²)	15
p_1 (daN/mm)	195
D (daN,mm)	1427171,2
a (cm)	50
b_1 (cm)	10
p_1/D (1/cm ²)	0,0136634
I_i (mm ⁴)	8032,7813
A_i (mm ²)	253,5
m_1	1
$m_1^2 \pi^2 / a^2$ (1/cm ²)	0,0039478
α_1 (1/cm)	0,1062652
β_1 (1/cm)	0,0582804
Lado 1	0,1828394
Lado 2	-0,038714

1.8 Valores iniciais relativos ao reforçador, incluindo σ_{cr2} , m_2 e os dois lados da equação (2,9):


Reforçador	
σ_{cr2} (daN/mm ²)	15
p_2 (daN/mm)	195
D_2 (daN,mm)	1427171,2
a (cm)	50
b_2 (cm)	1,95
p_2 / D_2 (1/cm ²)	0,0136634
k_1	0,3060337
J (mm ⁴)	67235,594
m_2	1
k (1/cm)	0,0543678
$m_2^2 \pi^2 / a^2$ (1/cm ²)	0,0039478
α_2 (1/cm)	0,1062652
β_2 (1/cm)	0,0582804
s (1/cm ²)	0,0103053
t (1/cm ²)	0,0043836
q	2,542475
Lado 1	4,355E-05
Lado 2	1,615E-05

2. Inicializar o *Solver*, escolhendo em seguida o menu **Ferramentas / Solver**:



Na janela acima insere-se na caixa *Definir célula de destino* a célula em que se encontra a Função Objetivo e nas opções de *Igual a* marca-se a opção *Min* já que o problema é de minimização de peso da placa.


Para inserir a Função Objetivo na caixa *Definir célula de destino* faz-se:

- Clica-se com o mouse em  à direita da caixa *Definir célula de destino*, aparecendo a janela



- Seleciona-se com o *mouse* **B15**, que é a célula correspondente à expressão da Função Objetivo:



- Clica-se em  à direita da janela acima e retorna-se para a janela principal do *Solver*
- Clica-se na opção *Mín* e a janela toma a forma:




Após a primeira iteração a célula **B15** possui um valor de 9,69 kgf que corresponde aos valores iniciais atribuídos as variáveis de projeto. No processo de solução do problema, o valor da célula será alterado a cada iteração até que seja atingido o valor de peso mínimo.

3. Na caixa *Células Variáveis* definem-se as células ajustáveis a cada iteração. Obviamente, as quatro variáveis de projeto são ajustáveis e, além dessas, são

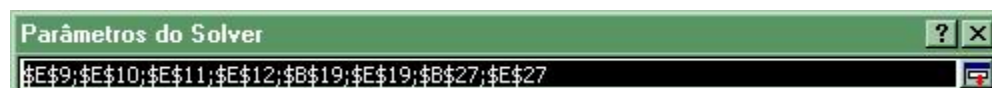
também ajustáveis as células **B19** (valor de σ_{cr2}), **E19** (valor de σ_{cr1}), **B27** (valor de m_2) e **E27** (valor de m_1).


Para seleccionar as oito células ajustáveis faz-se:

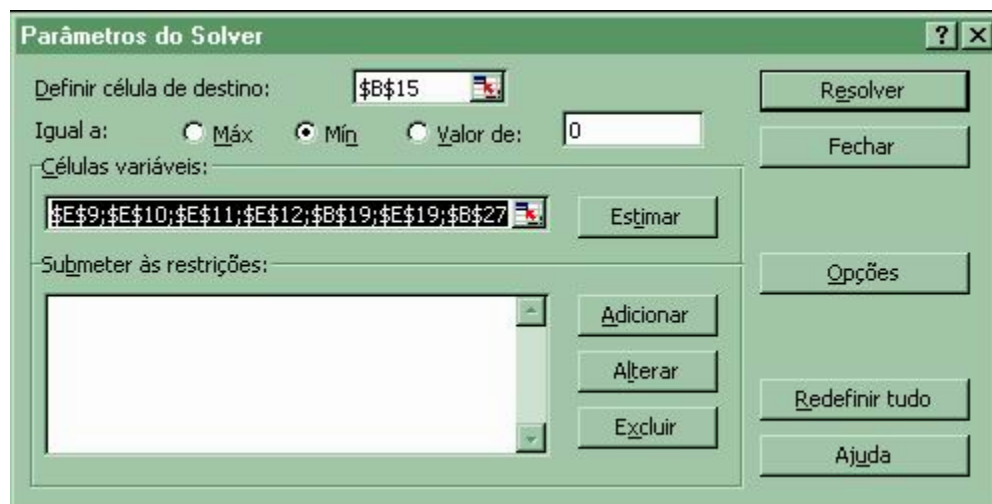
- Clica-se com o mouse em  à direita da caixa *Células Variáveis*:



- Selecionam-se as células **B19**, **B27**, **E9** a **E11**, **E19** e **E27**:




- Clica-se em  à direita da janela acima:



Em seguida, adicionam-se as 12 restrições do problema à caixa *Submeter às restrições*. O procedimento para adicionar cada restrição é, praticamente, idêntico. Por isso, exemplifica-se esse procedimento usando apenas a restrição de que a carga de flambagem do reforçador deva ser maior ou igual à carga externa aplicada. Ou seja:

- Clica-se em Adicionar:




- Clica-se em  à direita da caixa Referência de célula:



- Seleciona-se a célula **B19** (valor de σ_{cr2}):



- Clica-se em  à direita da janela acima:



- Na caixa do meio deixa-se ativo o símbolo “>=” (maior ou igual) e na caixa Restrição repete-se os passos anteriores para inserir a célula **H12** (valor de σ_a). A janela *Adicionar restrição* torna-se:



- Clica-se em **OK**, volta-se para a janela principal do *Solver* e na caixa *Submeter às restrições* aparece a restrição criada:



Segue-se procedimento similar para adicionar as outras 11 restrições.

4. Caso se deseje alterar ou excluir uma restrição, deixa-se a mesma ativa na caixa *Submeter às restrições* e clica-se em “**A**lterar” ou “**E**xcluir”, respectivamente.
5. O botão **R**edefinir tudo permite apagar todas as informações inseridas na janela do *Solver*.
6. O botão **O**pções possui uma série de comandos e a janela correspondente a ele é:



A opção *Tempo máximo* limita o tempo no processo de solução.

A opção *Iterações* limita o número de iterações do algoritmo para determinar a solução.

A caixa com a opção *Presumir modelo linear* permite acelerar o processo de solução quando todas as relações no modelo forem lineares. É a opção para resolver um problema de otimização linear, que não é o caso em questão.

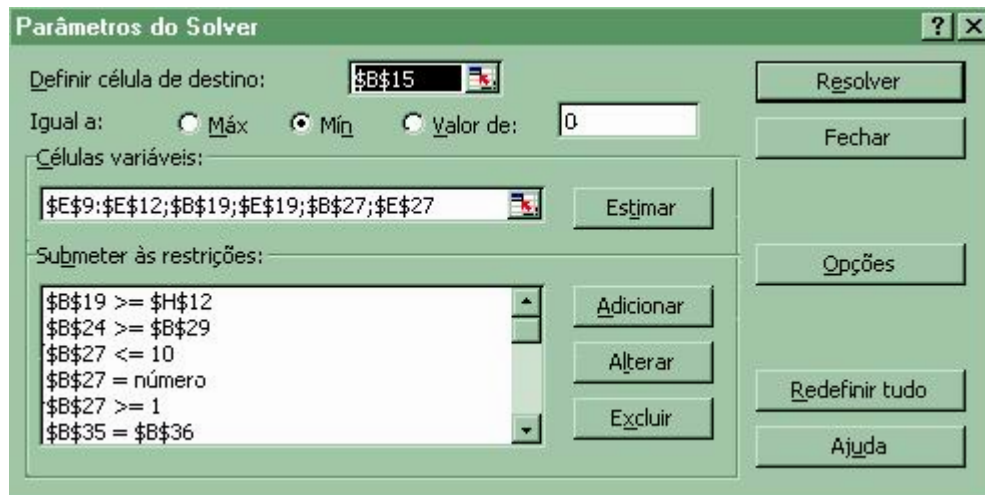
A caixa *Estimativas* está relacionada às estimativas iniciais das variáveis básicas em cada pesquisa unidimensional da solução. Ela possui duas opções. Optou-se pela estimativa *Quadrática*, pois pode melhorar os resultados em problemas altamente não-lineares, como é o caso em questão.

A caixa *Derivadas* especifica a diferenciação usada para estimar derivadas parciais das funções objetivo e de restrição. Optou-se pela opção *Adiante* que é a utilizada na maioria dos problemas em que os valores de restrição são alterados com relativa lentidão.

A caixa *Pesquisar* especifica o algoritmo utilizado em cada iteração para decidir em que direção procurar uma solução. Optou-se por *Newton*, pois como o método utilizado é o do gradiente reduzido generalizado, esse algoritmo é o mais compatível (VANDERPLAATS, 1999).

No botão *Ajuda*, pode-se obter mais detalhes sobre todas as opções constantes da janela *Opções do Solver*.

7. Clica-se em **OK**, retorna-se para a janela *Parâmetros do Solver*:



8. Para resolver o problema, clica-se em *Resolver*.

O sucesso de se encontrar uma solução ótima pelo *Solver* dependerá bastante dos valores iniciais atribuídos para as variáveis inseridas na caixa *Células Variáveis*. No caso deste exemplo, obtém-se a solução apresentada na Tabela 4.2 que correspondem a um peso de 2,17 kgf para o painel integral.

Tabela 4.2 Valores ótimos das variáveis de projeto do Exemplo 1.

h (mm)	2,00
h_2 (mm)	5,18
b_2' (mm)	23,39
n	5

A planilha da última iteração é apresentada a seguir.

Exemplo 01					
Dados					
a (mm)	500.00				
b (mm)	500.00				
P(daN)	40000.00				
Constantes		Variáveis de Projeto		Valores Úteis	
ν	0.25	h (mm)	2.00	b1 (mm)	83.33
E (daN/mm ²)	7308.00	h2 (mm)	5.18	b2 (mm)	24.39
G (daN/mm ²)	2923.20	b*2 (mm)	23.39	Atotal (mm ²)	1606.0648
γ al (kg/dm ³)	2.70	n	5	P/A (daN/mm ²)	24.91
Função Objetivo					
Peso (kg)	2.17				
Componentes					
Painel		Revestimento		Reforçador	
r	1	σ_{cr1} (daN/mm ²)	24.905595	σ_{cr2} (daN/mm ²)	25.836357
I (mm ⁴)	25061.66	p1 (daN/mm)	49.81119	p2 (daN/mm)	133.89441
D (daN*mm)	5196.8	D (daN*mm)	5196.8	D2 (daN*mm)	90414.788
γ	70.48593	a (cm)	50	a (cm)	50
δ	0.126395	b1 (cm)	8.3333333	b2 (cm)	2.4389337
Teta	3	p1/D (1/cm ²)	0.9584974	p2/D2 (1/cm ²)	0.1480891
σ_{cr} (daN/mm ²)	24.9056	I (mm ⁴)	6265.4157	k1	0.3282934
		Ai (mm ²)	126.39536	J (mm ⁴)	218.86226
		m1	2.189012	m2	5.9931046
		(m1) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.0189172	k (1/cm)	0.1003352
		alfa 1 (1/cm)	0.3918832	(m2) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.1417958
		beta 1 (1/cm)	0.3402031	alfa 2 (1/cm)	0.5354476
		Lado 1	151.04642	beta 2 (1/cm)	0.0557894
		Lado 2	151.04642	s (1/cm ²)	0.2512552
				t (1/cm ²)	0.0385614
				q	5.3945204
				Lado 1	1106.5941
				Lado 2	1106.5941

4.2 Exemplo 2

Na Tabela 4.3 abaixo estão os dados desse exemplo.

Tabela 4.3 Dados do Exemplo 2.

a (mm)	1000
b (mm)	500
P (daN)	120000

Conforme já foi mencionado, os valores iniciais das variáveis, que constam da caixa *Células Variáveis* da janela principal do *Solver*, são decisivos para a convergência da solução do problema. Na Tabela 4.4 estão listados esses valores.

Tabela 4.4 Valores iniciais das variáveis do Exemplo 2.

h (mm)	20,00
h_2 (mm)	17,00
b_2' (mm)	16,00
n	3
σ_{cr1} (daN/mm ²)	20
σ_{cr2} (daN/mm ²)	20
m_1	2,5
m_2	2,5

Os valores das variáveis de projeto obtidos que minimizam o peso do painel estão indicados na Tabela 4.5

Tabela 4.5 Valores ótimos das variáveis de projeto do Exemplo 2.

h (mm)	11,52
h_2 (mm)	10,96
b_2' (mm)	10,96
n	2

O peso ótimo correspondente é de 16,20 kgf.

A planilha da última iteração é apresentada a seguir.

Exemplo 02					
Dados					
a (mm)	1000.00				
b (mm)	500.00				
P(daN)	120000.00				
Constantes		Variáveis de Projeto		Valores Úteis	
ν	0.25	h (mm)	11.52	b1 (mm)	166.67
E (daN/mm ²)	7308.00	h2 (mm)	10.96	b2 (mm)	16.72
G (daN/mm ²)	2923.20	b'2 (mm)	10.96	Atotal (mm ²)	5999.9695
γ_{al} (kg/dm ³)	2.70	n	2	P/A (daN/mm ²)	20.00
Função Objetivo					
Peso (kg)	16.20				
Componentes					
Painel		Revestimento		Reforçador	
r	2	σ_{cr1} (daN/mm ²)	20.000106	σ_{cr2} (daN/mm ²)	20.000106
I (mm ⁴)	17091.31	p1 (daN/mm)	230.38415	p2 (daN/mm)	219.27101
D (daN*mm)	992903.2	D (daN*mm)	992903.2	D2 (daN*mm)	856037.52
γ	0.251592	a (cm)	100	a (cm)	100
δ	0.031833	b1 (cm)	16.666667	b2 (cm)	1.6723066
Teta	1.5	p1/D (1/cm ²)	0.0232031	p2/D2 (1/cm ²)	0.0256146
σ_{cr} (daN/mm ²)	20.00011	I (mm ⁴)	4272.8277	k1	0.3188194
		Ai (mm ²)	183.34321	J (mm ⁴)	81218.386
		m1	4.5449489	m2	1.0144045
		(m1) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.0203872	k (1/cm)	0.0281671
		alfa 1 (1/cm)	0.2052726	(m2) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.0010156
		beta 1 (1/cm)	0.0369109	alfa 2 (1/cm)	0.0782049
		Lado 1	0.0580058	beta 2 (1/cm)	0.0639125
		Lado 2	0.058003	s (1/cm ²)	0.0058621
				t (1/cm ²)	0.0043387
				q	4.6308315
				Lado 1	1.488E-05
				Lado 2	1.304E-05

4.3 Exemplo 3

Abaixo estão os dados do exemplo em questão.

Tabela 4.6 Dados do Exemplo 3.

a (mm)	1500
b (mm)	500
P (daN)	240000

No quadro abaixo estão listados os valores iniciais das variáveis do problema.

Tabela 4.7 Valores iniciais das variáveis do Exemplo 3.

h (mm)	22
h_2 (mm)	22
b_2' (mm)	22
n	10
σ_{cr1} (daN/mm ²)	25,8
σ_{cr2} (daN/mm ²)	25,8
m_1	3
m_2	3

Os valores das variáveis de projeto obtidas, que minimizam o peso do painel do exemplo em questão, estão indicados abaixo:

Tabela 4.8 Valores ótimos das variáveis de projeto do Exemplo 3.

h (mm)	12,04
h_2 (mm)	9,10
b_2' (mm)	9,10
n	2

O peso ótimo desse painel integral é de 25,05 kgf.

A planilha da última iteração é apresentada a seguir.

Exemplo 03					
Dados					
a (mm)	1500.00				
b (mm)	500.00				
P(daN)	240000.00				
Constantes		Variáveis de Projeto		Valores Úteis	
ν	0.25	h (mm)	12.04	b1 (mm)	166.67
E (daN/mm ²)	7308.00	h2 (mm)	9.10	b2 (mm)	15.12
G (daN/mm ²)	2923.20	b'2 (mm)	9.10	Atotal (mm ²)	6184.9227
γ_{al} (kg/dm ³)	2.70	n	2	P/A (daN/mm ²)	38.80
Função Objetivo					
Peso (kg)	25.05				
Componentes					
Painel		Revestimento		Reforçador	
r	3	σ_{cr1} (daN/mm ²)	38.804052	σ_{cr2} (daN/mm ²)	38.804052
I (mm ⁴)	10481.33	p1 (daN/mm)	467.14881	p2 (daN/mm)	353.08745
D (daN*mm)	1133393	D (daN*mm)	1133393	D2 (daN*mm)	489397.38
γ	0.135165	a (cm)	150	a (cm)	150
δ	0.022854	b1 (cm)	16.666667	b2 (cm)	1.5118572
Teta	1.5	p1/D (1/cm ²)	0.0412168	p2/D2 (1/cm ²)	0.0721474
σ_{cr} (daN/mm ²)	38.80404	I (mm ⁴)	2620.3318	k1	0.3181648
		Ai (mm ²)	137.56754	J (mm ⁴)	92519.951
		m1	9.5091003	m2	10
		(m1) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.039664	k (1/cm)	2.4240943
		alfa 1 (1/cm)	0.283014	(m2) ² pi ² /a ² (1/cm ²)	0.0438649
		beta 1 (1/cm)	0.0277306	alfa 2 (1/cm)	0.3164189
		Lado 1	0.0406015	beta 2 (1/cm)	0.1113153
		Lado 2	0.0406035	s (1/cm ²)	0.0891547
				t (1/cm ²)	0.0233573
				q	0.1466854
				Lado 1	-0.00673
				Lado 2	-0.006721

4.4 Exemplo 4

Abaixo estão os dados do Exemplo 4:

Tabela 4.9 Dados do Exemplo 4.

a (mm)	2000
b (mm)	500
P (daN)	480000

No quadro abaixo estão listados os valores iniciais das variáveis do problema:

Tabela 4.10 Valores iniciais das variáveis do Exemplo 4.

h (mm)	28
h_2 (mm)	28
b_2' (mm)	28
n	15
σ_{cr1} (daN/mm ²)	25
σ_{cr2} (daN/mm ²)	25
m_1	3
m_2	3

Os valores das variáveis de projeto obtidas, que minimizam o peso do painel do exemplo em questão, estão indicados abaixo:

Tabela 4.11 Valores ótimos das variáveis de projeto do Exemplo 4.

h (mm)	13,11
h_2 (mm)	18,30
b_2' (mm)	24,65
n	2

O peso ótimo desse painel integral é de 40,28 kgf.

A planilha da última iteração é apresentada a seguir.

Exemplo 04					
Dados					
a (mm)	2000.00				
b (mm)	500.00				
P(daN)	480000.00				
Constantes		Variáveis de Projeto		Valores Úteis	
ν	0.25	h (mm)	13.11	b1 (mm)	166.67
E (daN/mm ²)	7308.00	h2 (mm)	18.30	b2 (mm)	31.21
G (daN/mm ²)	2923.20	b'2 (mm)	24.65	Atotal (mm ²)	7458.6751
γ_{al} (kg/dm ³)	2.70	n	2	P/A (daN/mm ²)	64.35
Função Objetivo					
Peso (kg)	40.28				
Componentes					
Painel		Revestimento		Reforçador	
r	4	σ_{cr1} (daN/mm ²)	64.354596	σ_{cr2} (daN/mm ²)	64.354596
I (mm ⁴)	185431.7	p1 (daN/mm)	843.8529	p2 (daN/mm)	1177.9089
D (daN*mm)	1464561	D (daN*mm)	1464561.3	D2 (daN*mm)	3983294.7
γ	1.850568	a (cm)	200	a (cm)	200
δ	0.087123	b1 (cm)	16.666667	b2 (cm)	3.1207408
Teta	1.5	p1/D (1/cm ²)	0.0576181	p2/D2 (1/cm ²)	0.0295712
σ_{cr} (daN/mm ²)	64.35459	I (mm ⁴)	46357.923	k1	0.3168117
		Ai (mm ²)	571.20215	J (mm ⁴)	119045.1
		m1	10	m2	10
		(m1) ² 2pi ² /a ² (1/cm ²)	0.024674	k (1/cm)	0.2155596
		alfa 1 (1/cm)	0.249758	(m2) ² 2pi ² /a ² (1/cm ²)	0.024674
		beta 1 (1/cm)	0.1141536	alfa 2 (1/cm)	0.2273453
		Lado 1	0.9772933	beta 2 (1/cm)	0.0483513
		Lado 2	0.9772941	s (1/cm ²)	0.0455174
				t (1/cm ²)	0.0085064
				q	1.1023797
				Lado 1	0.0080194
				Lado 2	0.0080115

5. CONCLUSÃO

A otimização possibilita realizar um projeto que melhor atenda às restrições estruturais e geométricas, minimizando a função que se tem como objetivo. É imprescindível, entretanto, que o modelo matemático descreva o mais próximo possível da realidade o comportamento da estrutura, pois, caso contrário, realizar-se-á um projeto otimizado de algo que não pode ser executado na prática.

Conhecer as limitações e os parâmetros de ajustes do algoritmo de otimização é importante, visto que o sucesso de se encontrar a solução ótima dependerá desse conhecimento.

Deve-se destacar que não se pode deixar o projeto estrutural nas mãos apenas de um algoritmo de otimização. A sensibilidade e experiência do engenheiro são indispensáveis no julgamento final do projeto.

Verificam-se que as soluções obtidas para os quatro exemplos apresentados estão coerentes quanto ao peso mínimo obtido, à espessura do revestimento, à espessura e altura do reforçador. O termo coerência refere-se ao fato de que se o comprimento do painel e a carga aplicada aumentam de um exemplo para o seguinte, o peso e as variáveis de projeto deveriam também aumentar. É o que se observa.

Quando se insere a restrição do número de semi-ondas dos modos de flambagem local do revestimento e do reforçador como um número inteiro, o problema mostra dificuldades de convergência para uma solução viável. Por isso considerou-se o número de semi-ondas como sendo uma variável contínua.

REFERÊNCIAS

TIMOSHENKO, S. P., and GERE, J. M., 1961, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York.

VANDERPLAATS, G.N.,1999, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill, New York.

REDDY, J.N., 1999, *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor and Francis, Philadelphia.

GALLAGHER, R. H., and ZIENKIEWICZ, C. O., 1973, *Optimum Structural Design*, John Willey, London.

SACOMAN, M. A. R., 1994, *Aplicação da Programação Não-Linear na Solução de Problemas de Energia na Agricultura*, Tese de doutorado, FCA-UNESP, Botucatu.

SILVA, A. T., 2004, *Projeto de Painéis Integrais com Minimização de Peso*, Tese de Mestrado Profissionalizante, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.