

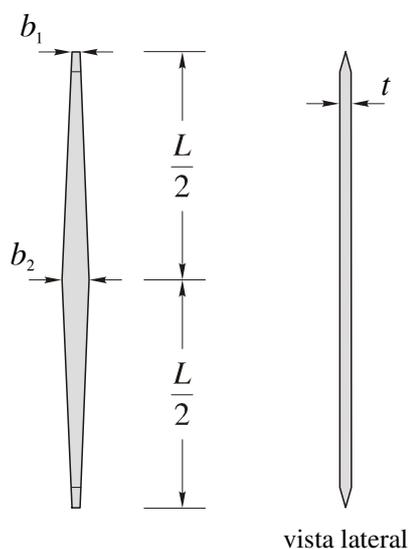
2º Laboratório de EDI-32

Objetivo

Determinação experimental da carga de flambagem de colunas pelo método de Southwell e comparação com resultados teóricos.

Dados

(a) Colunas de ensaio



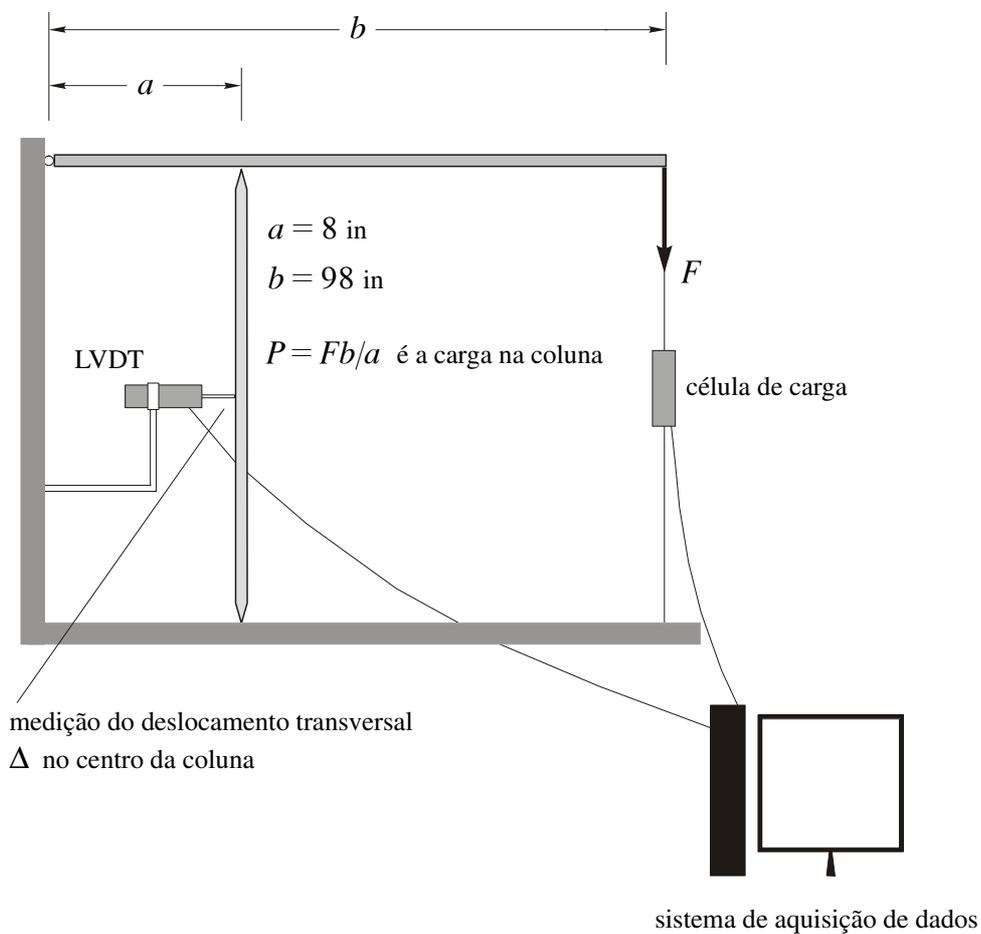
coluna	L (in)	b_1 (in)	b_2 (in)	t (in)
1	42	2	2	0,5
2	42	1	2	0,5

$$E = 30\,000 \text{ ksi}$$

$$\sigma_p = 36 \text{ ksi}$$

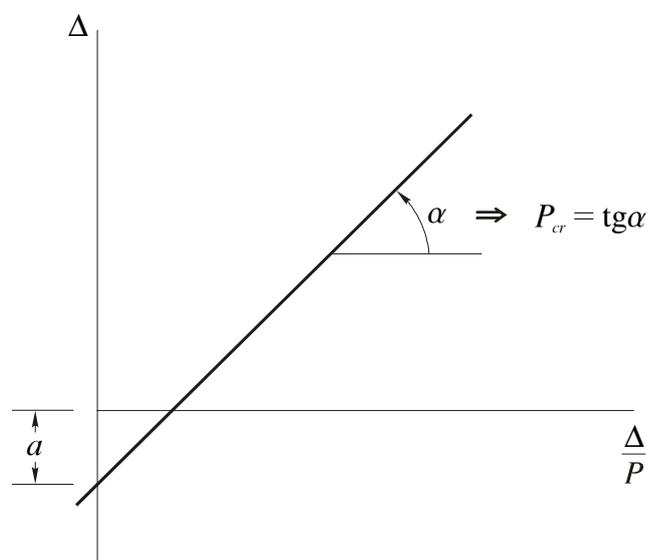
São duas colunas de aço a serem ensaiadas: uma de seção transversal constante e outra de seção transversal variável. As colunas têm apoio simples nas extremidades.

(b) Dispositivo de carregamento



Procedimentos

(a) Trace para cada coluna a reta $\Delta = f(\Delta/P)$, segundo o método de Southwell.



(b) Obtenha a carga crítica e compare com os valores teóricos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{L^2} \quad \text{coluna 1} \qquad P_{cr} = \frac{8,24 EI_2}{L^2} \quad \text{coluna 2,}$$

onde I_2 é o momento de inércia da seção transversal no centro da coluna. O valor de P_{cr} para a coluna 2 decorre de uma interpolação linear entre dois resultados dados no livro: “Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., 1961, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, Auckland” (p. 130, Tabela 2-13). É, portanto, um valor aproximado.

(c) Discuta os resultados.

Anexo

“Método de Southwell”.

Método de Southwell

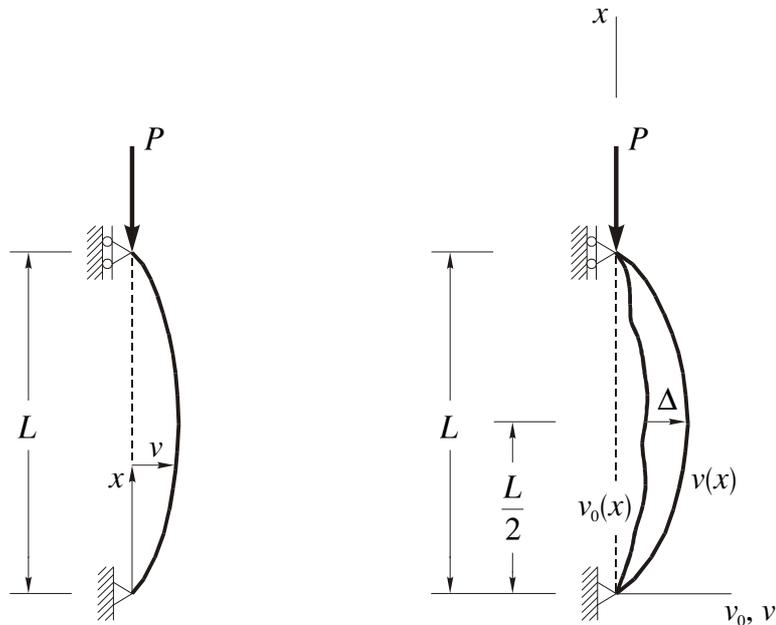
Conforme (1.?), a carga de flambagem de uma coluna de rigidez EI constante e biapoada pode ser determinada da solução de

$$EIv_{,xx} + Pv = 0 \quad (1)$$

sujeita a

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0. \quad (2)$$

Note que a equação (1) tem o significado físico de que o momento interno $-EIv_{,xx}$ deva ser igual, ponto a ponto, ao momento externo Pv .



coluna perfeita

coluna com imperfeição $v_0(x)$

Se a barra não é perfeitamente reta, ou seja, tem uma imperfeição geométrica dada por $v_0(x)$, a equação (1) toma a forma

$$EI(v - v_0)_{,xx} + Pv = 0 \quad (3)$$

ou

$$EIv_{,xx} + Pv = EIv_{0,xx}. \quad (4)$$

O momento interno decorre da mudança de curvatura $(v - v_0)_{,xx}$ provocada pela deformação.

Procuremos a solução de (4) na forma da série

$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}, \quad (5)$$

pois satisfaz as condições de contorno (2). A substituição da série na equação,

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m \left[-EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + P \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = EIv_{0,xx}, \quad (6)$$

indica que a imperfeição $v_0(x)$ deve também ser expressa na forma da série

$$v_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}. \quad (7)$$

Portanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m \left[-EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + P \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = -EI \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \quad (8)$$

ou

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (a_m - v_m) + Pv_m \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = 0. \quad (9)$$

A equação se verifica em todos os pontos do domínio $0 < x < L$ se os coeficientes de $\operatorname{sen} m\pi x/L$ forem nulos para cada m :

$$EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (a_m - v_m) + Pv_m = 0 \quad (10)$$

ou

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{m^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}}{m^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} - P} a_m \\ &= \frac{1}{1 - \frac{P}{m^2 P_{cr}}} a_m \end{aligned} \quad (11)$$

onde

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (12)$$

é a carga crítica da coluna caso fosse perfeitamente reta. Assim,

$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{P}{m^2 P_{cr}}} a_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}. \quad (13)$$

Medimos no ensaio o deslocamento

$$\begin{aligned} \Delta &= v\left(\frac{L}{2}\right) - v_0\left(\frac{L}{2}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} a_1 - \frac{1}{1 - \frac{P}{9P_{cr}}} a_3 + \dots - (a_1 - a_3 + \dots) \\ &= \frac{a_1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} - \frac{a_3}{\frac{9P_{cr}}{P} - 1} a_3 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

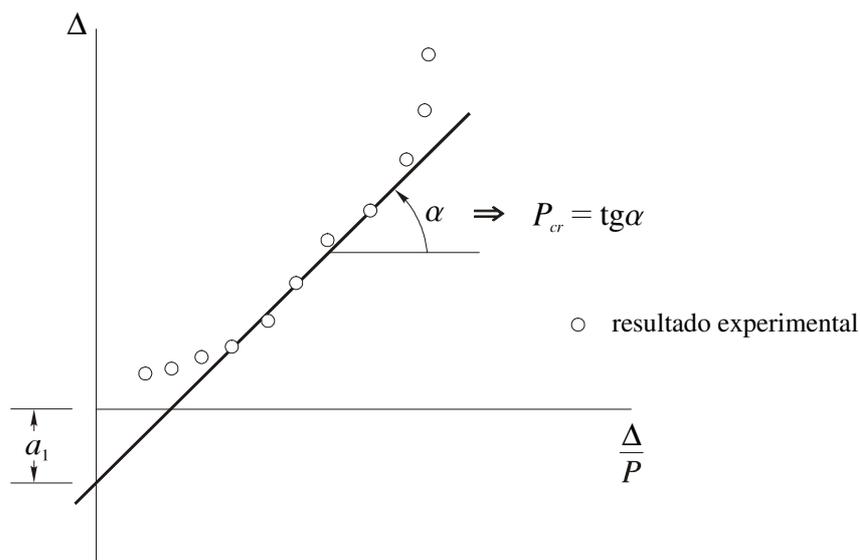
Supondo $a_1 \neq 0$, o primeiro termo na série (14) é dominante para valores de P próximos de P_{cr} . Ou seja, podemos adotar para esses valores de P a aproximação

$$\Delta \approx \frac{a_1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} \quad (15)$$

e dela obter a relação linear

$$\Delta = P_{cr} \frac{\Delta}{P} - a_1 \quad (16)$$

entre Δ e Δ/P . Finalmente, procuramos identificar a reta (16) nos resultados experimentais para estimar P_{cr} (carga crítica da coluna perfeita) e a_1 .



Comentários:

- Para pequenos valores de P os resultados experimentais aparecem desalinhados no espaço $\Delta/P \times \Delta$ por causa da influência dos demais coeficientes a_3, a_5, \dots em (14). Os resultados voltam a desalinhar-se para valores mais elevados de P , agora por influência da não linearidade desprezada por (4) (veja Seção 1.?).
- O método não determina a carga crítica da coluna real (imperfeita), mas da correspondente coluna perfeita no regime elástico linear.
- O ensaio tem a vantagem de ser não destrutivo e de não exigir do usuário a difícil tarefa de identificar a priori a imperfeição para estimar P_{cr} .
- Nada garante que a carga P tenha sido aplicada sem nenhuma excentricidade. A distribuição $M_0(x)$ de momento fletor, que essa possível excentricidade provocaria, apareceria no segundo membro da equação (4) e a expansão (7) em série de senos incluiria também esse momento. Assim, o coeficiente a_1 identificado no experimento corresponde à imperfeição que efetivamente existe, não distinguindo se provém de um desalinhamento inicial da barra ou de uma excentricidade da carga ou de uma outra imperfeição.